



Politecnico di Milano

Fondamenti di Automatica

▶ POLITECNICO DI MILANO



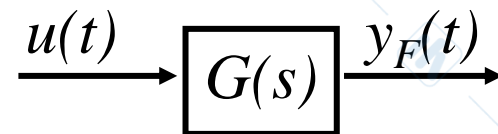
La risposta allo scalino

Prof. Bruno Picasso

La risposta allo scalino: cos'è?

2

Problema: sia $G(s)$ la funzione di trasferimento di un sistema lineare asintoticamente stabile (**AS**).



Vogliamo caratterizzare l'andamento di $y_F(t)$ quando $u(t)=sca(t)$

In particolare, vogliamo essere in grado di tracciare un grafico qualitativo di $y_F(t)$ che ne colga le caratteristiche dinamiche salienti individuando come esse dipendano da $G(s)$ e dai suoi parametri (guadagno, poli, zeri, costante di trasferimento, ...)



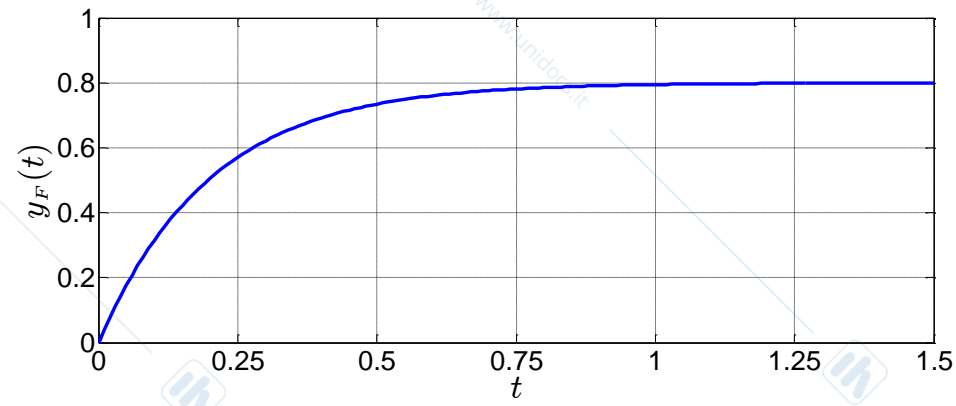
Esempio: le risposte allo scalino di 3 differenti $G(s)$...

3

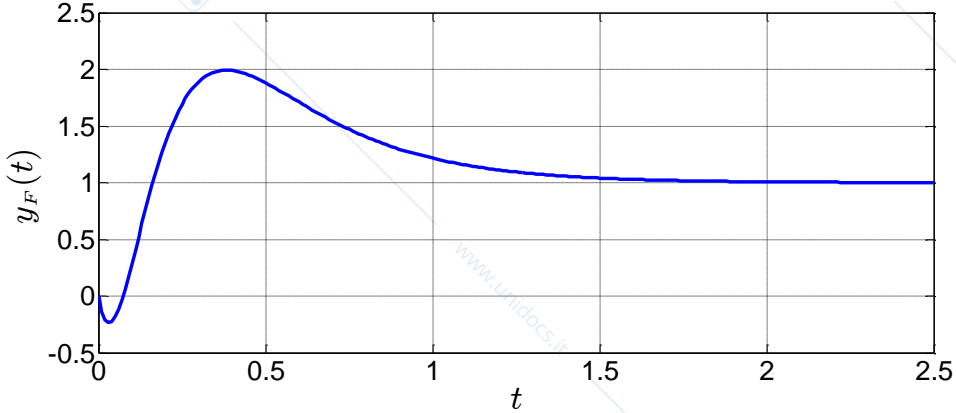
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$u(t) = sca(t)$

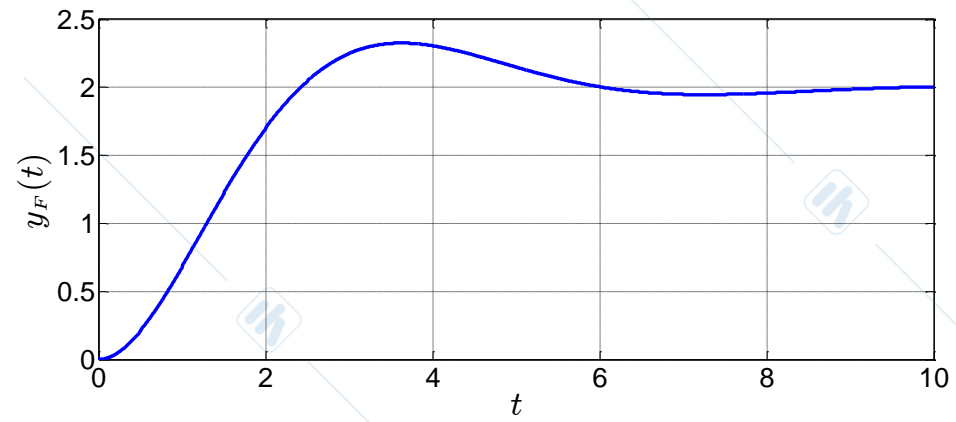
$$G(s) = \frac{0.8}{1+0.2s}$$



$$G(s) = \frac{(1+s)(1-0.05s)}{(1+0.3s)(1+0.1s)^2}$$



$$G(s) = \frac{2}{1+s+s^2}$$



www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari



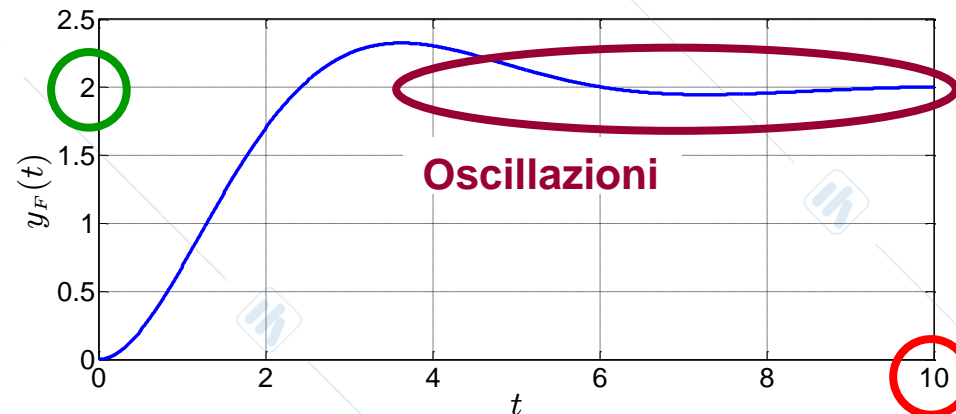
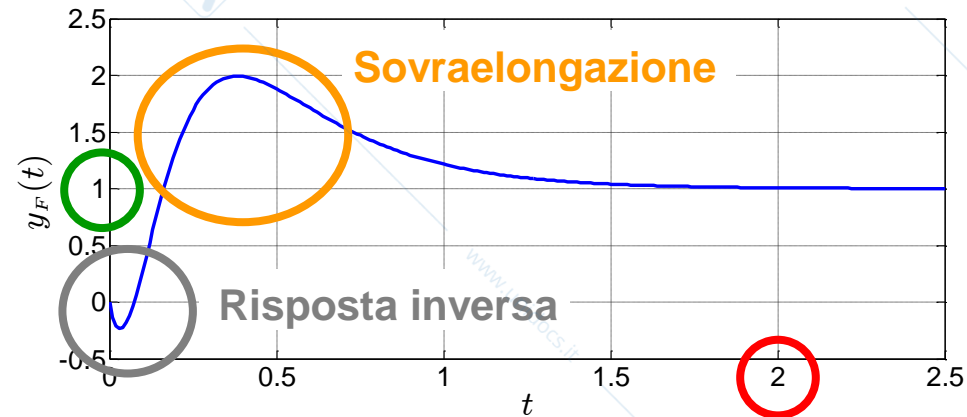
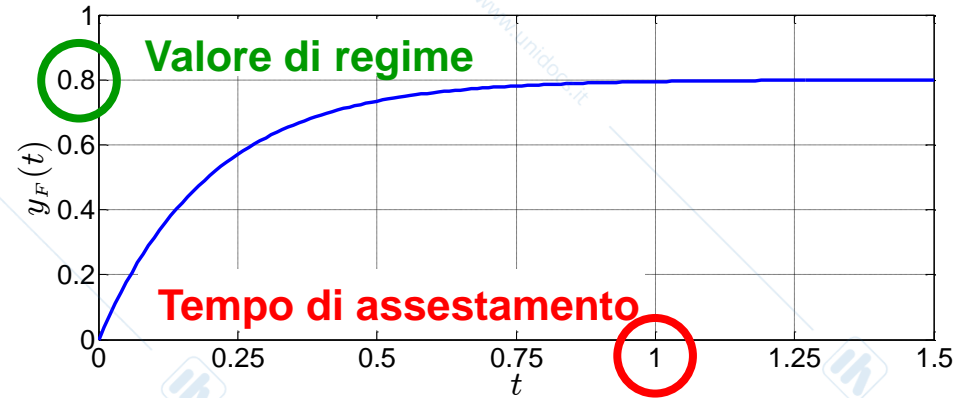
Esempio: in cosa differiscono?

4

$$G(s) = \frac{0.8}{1+0.2s}$$

$$G(s) = \frac{(1+s)(1-0.05s)}{(1+0.3s)(1+0.1s)^2}$$

$$G(s) = \frac{2}{1+s+s^2}$$

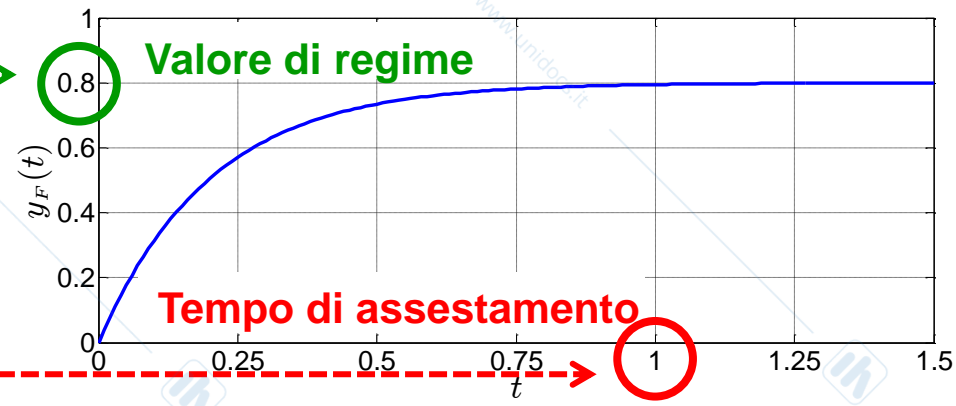




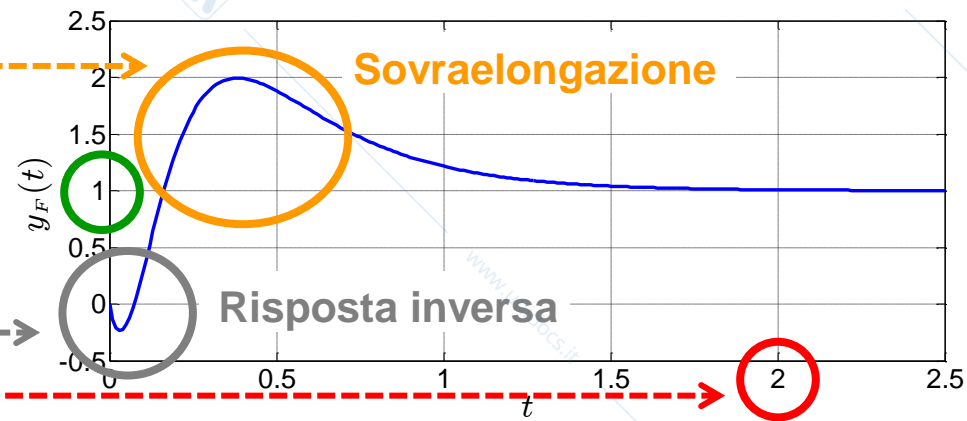
Esempio: quali parametri di $G(s)$ determinano le differenze?

5

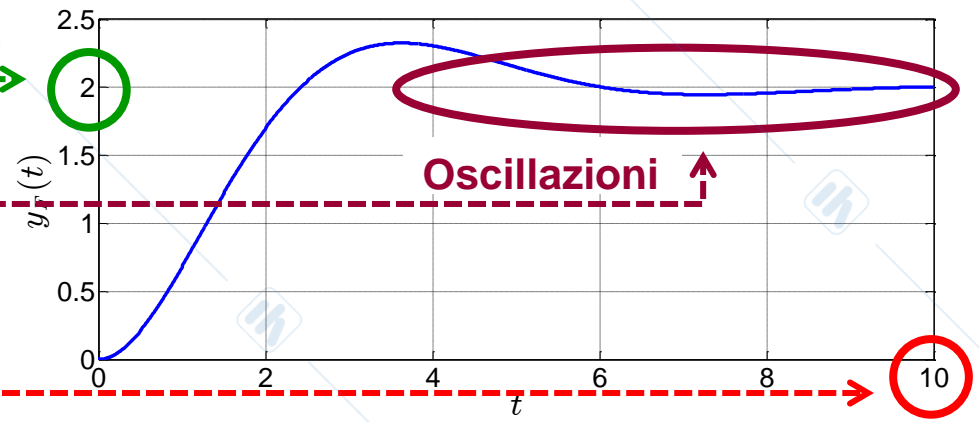
$$G(s) = \frac{0.8}{1+0.2s}$$



$$G(s) = \frac{(1+s)(1-0.05s)}{(1+0.3s)(1+0.1s)^2}$$



$$G(s) = \frac{2}{1+s+s^2}$$





Motivazioni: perché studiare la risposta allo scalino?

6

- Lo scalino è un segnale d'ingresso “semplice” adatto ad un primo caso di studio del comportamento di un sistema nel transitorio.
- Vedremo che lo studio della risposta allo scalino fornisce un esempio paradigmatico per lo studio dei transitori di un dato sistema: in esso si trovano le caratteristiche salienti della risposta ad un segnale qualsiasi.
- La risposta allo scalino descrive il modo in cui un sistema passa da uno stato di equilibrio ad un altro (ossia, come transita tra due diversi punti di lavoro).



Come si studia?

Operativamente, lo studio della risposta allo scalino consiste nel rispondere alle seguenti domande e, in base alle risposte, tracciare un grafico qualitativo di $y_F^{[sca]}(t)$:

A) $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_F^{[sca]}(t) = ?$

B) Dopo quanto tempo $y_F^{[sca]}(t) \simeq y_R$ (dove $y_R = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_F^{[sca]}(t)$) ?

C) Cosa accade per $0 < t < T_a$, cioè nel transitorio ?

C1) Qual è il comportamento per $t \rightarrow 0^+$?

Cioè, quanto valgono $\lim_{t \rightarrow 0^+} y_F^{[sca]}(t) = ?$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{y}_F^{[sca]}(t) = ?$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \ddot{y}_F^{[sca]}(t) = ?$$

...

C2) Qual è l'andamento qualitativo di $y_F^{[sca]}(t)$ per $0 < t < T_a$?



Rispondiamo ad A e B

8

Alle domande **A-B-C1** sappiamo già rispondere:

● **Risp. A:** abbiamo visto che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_F^{[sca]}(t) = G(0).$$

[*Dim:* Per sistemi AS, $G(0)$ è uguale al guadagno statico, il quale fornisce l'uscita di equilibrio \bar{y} corrispondente ad un ingresso costante e uguale a 1. Grazie alla proprietà di AS, in presenza di tale ingresso costante, l'uscita $y(t)$ converge a \bar{y} qualunque sia lo stato iniziale.

In alternativa, segue dall'applicazione del Teorema del valore finale.]

● **Risp. B:** abbiamo visto che, a meno dell'1% di errore relativo, $y(t)$ coincide con l'uscita di regime per

$$t \geq T_a,$$

dove

$$T_a \simeq \frac{5}{|\Re(\text{polo dominante})|}.$$



Rispondiamo a C1

9

• **Risp. C1:** sappiamo rispondere impiegando il Teorema del Valore Iniziale (TVI). Infatti:

0. Ricorda che, posto

$$G(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0},$$

si ha:

$$G(s) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\beta_m / \alpha_n}{s^{n-m}} = \frac{\rho_G}{s^{\text{rd}(G)}}.$$

1. $\mathcal{L}[y_F(t)] = Y_F(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$ è una funzione razionale *strettamente propria*, possiamo applicare il TVI e ottenere

$$\begin{aligned} y_F^{[sca]}(0^+) &:= \lim_{t \rightarrow 0^+} y_F^{[sca]}(t) = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s Y_F(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } G(s) \text{ è strettamente} \\ & \text{propria, } \text{rd}(G) > 0 \\ \rho_G & \text{se } G(s) \text{ è propria non} \\ & \text{strettamente, } \text{rd}(G) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$



Rispondiamo a C1

$$G(s) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\rho_G}{s^{\text{rd}(G)}}.$$

2. $\mathcal{L}[\dot{y}_F(t)] = sY_F(s) - y_F(0^-) = sY_F(s) = G(s)$:

se $\text{rd}(G) = 0 \rightarrow$ *non posso applicare il TVI* \rightarrow ci fermiamo;

$$\begin{aligned} \text{se } \text{rd}(G) \geq 1 \rightarrow \dot{y}_F(0^+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } \text{rd}(G) \geq 2 \\ \rho_G & \text{se } \text{rd}(G) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

3. $\mathcal{L}[\ddot{y}_F(t)] = s^2Y_F(s) = sG(s)$:

se $\text{rd}(G) = 1 \rightarrow$ *non posso applicare il TVI* \rightarrow ci fermiamo;
($sG(s)$ non è strettamente propria)

$$\begin{aligned} \text{se } \text{rd}(G) \geq 2 \rightarrow \ddot{y}_F(0^+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s^2G(s) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } \text{rd}(G) \geq 3 \\ \rho_G & \text{se } \text{rd}(G) = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

4. e così via ...



Rispondiamo a C1

11

• **Risp. C1:** in conclusione, la risposta alla domanda **C1** è sintetizzata dal seguente risultato:

Teorema. Sia $G(s)$ AS con grado relativo k e costante di trasferimento ρ_G :

$$G(s) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\rho_G}{s^k}.$$

Sia $y_F(t)$ la risposta forzata del sistema corrispondente all'ingresso $u(t) = sca(t)$, allora:

$$\begin{cases} y_F(0^+) = \dot{y}_F(0^+) = \dots = y_F^{(k-1)}(0^+) = 0 \\ y_F^{(k)}(0^+) = \rho_G. \end{cases}$$

Ossia, la prima derivata iniziale non nulla è la $rd(G)$ -ma e tale derivata è pari a ρ_G .

Osservazione: questo risultato fornisce un'interpretazione *sistemistica* del grado relativo e della costante di trasferimento.



Esempio 1

Esempio 1. Studiare la risposta allo scalino del sistema lineare avente la seguente funzione di trasferimento:

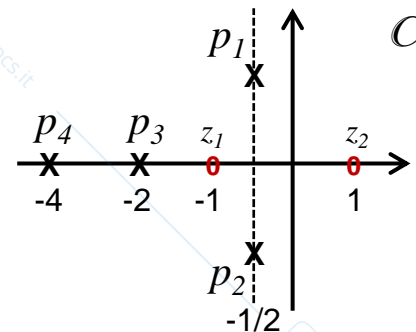
$$G(s) = \frac{(s - 1)(s + 1)}{(s + 2)(s + 4)(s^2 + s + 5/4)}$$

Osserviamo che $G(s)$ è AS, quindi rispondiamo alle domande **A-B-C1** e iniziamo a tracciare il grafico di $y_F^{[sca]}(t)$ in base alle informazioni raccolte:

A. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_F^{[sca]}(t) = G(0) = \frac{(-1) \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot \frac{5}{4}} = -1/10;$

B. $T_a \simeq \frac{5}{|\Re(\text{polo dominante})|}:$

$s + 2$	\rightarrow	$ \Re(\text{polo}) = 2$	}	\Rightarrow
$s + 4$	\rightarrow	$ \Re(\text{polo}) = 4$		
$s^2 + s + 5/4$	\rightarrow	$ \Re(\text{poli}) = 1/2$		



\Rightarrow i poli dominanti sono la coppia di poli Complessi coniugati

Quindi: $T_a \simeq \frac{5}{1/2} = 10 \text{ s}$



Esempio 1

C1. Si ha:

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+1)}{(s+2)(s+4)(s^2+s+5/4)} = \frac{s^2-1}{s^4+\dots} \Rightarrow \dots$$

$$\dots \Rightarrow \begin{cases} \text{rd}(G) = 2 \\ \rho_G = 1 \end{cases} \Rightarrow y_F(0^+) = \dot{y}_F(0^+) = 0 \text{ e } \ddot{y}_F(0^+) = 1,$$

ossia (vedi corso di Analisi)

$$y_F(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2} t^2$$



Esempio 1

C1. Si ha:

$$G(s) = \frac{(s - 1)(s + 1)}{(s + 2)(s + 4)(s^2 + s + 5/4)} = \frac{s^2 - 1}{s^4 + \dots} \Rightarrow \dots$$

$$\dots \Rightarrow \begin{cases} \text{rd}(G) = 2 \\ \rho_G = 1 \end{cases} \Rightarrow y_F(0^+) = \dot{y}_F(0^+) = 0 \text{ e } \ddot{y}_F(0^+) = 1,$$

ossia (vedi corso di Analisi)

$$y_F(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2} t^2$$

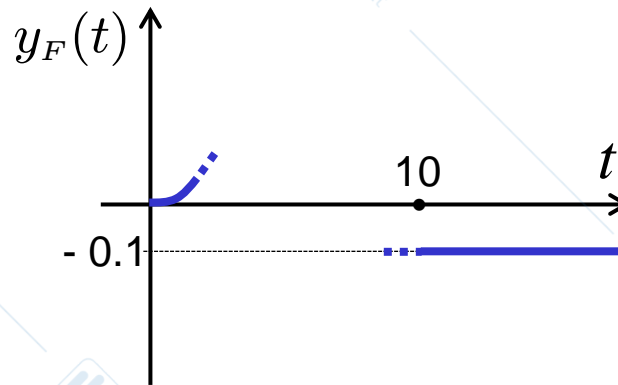
Riepilogando:

A. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_F^{[sca]}(t) = -1/10$

B. $T_a \simeq 10 \text{ s}$

C1. $y_F(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2} t^2$

\Rightarrow





Rispondiamo a C2

- **Risp. C2:** si pone la seguente alternativa

$$G(s) \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente propria (rd}(G) \geq 1) & \longrightarrow \text{ [C2}\alpha\text{]} \\ \text{propria non strettamente (rd}(G) = 0) & \longrightarrow \text{ [C2}\beta\text{]} \end{cases}$$

Rinviamo a dopo la trattazione del caso **[C2β]**

(seguirà in modo semplice dalla trattazione del caso **[C2α]**).

Iniziamo la trattazione del caso **[C2α]**.

Il caso di funzioni razionali strettamente proprie viene a sua volta suddiviso in 6 sotto-casi (**[C2αI]**, **[C2αII]**, ... , **[C2αVI]**) dipendenti dall'ordine di $G(s)$, dalla natura dei suoi poli (Reali piuttosto che Complessi) e dall'eventuale presenza di zeri.



Rispondiamo a C2αI

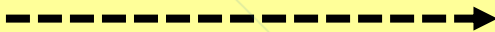
- **Caso C2αI:** sistema di ordine 1.

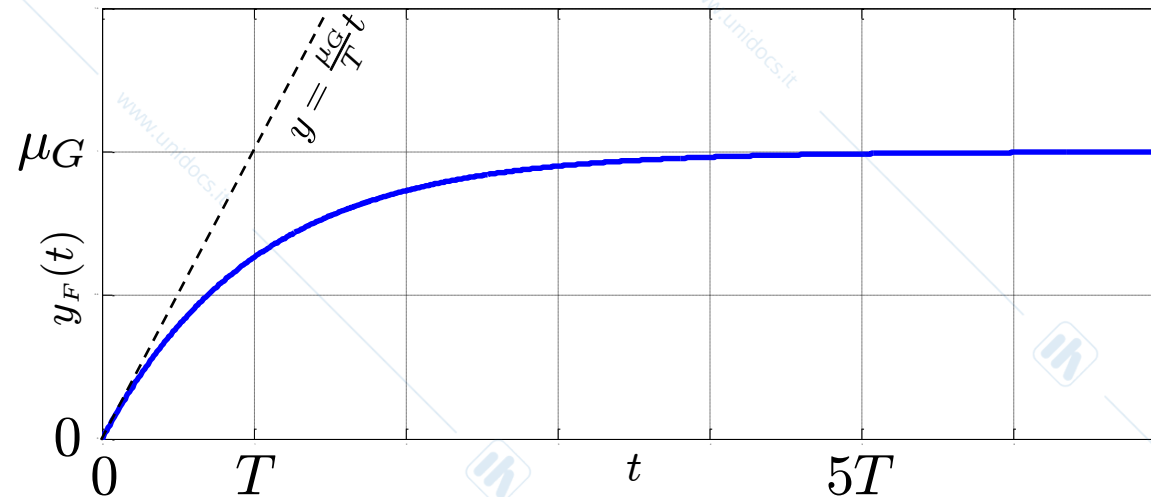
In questo caso

$$G(s) = \frac{\mu_G}{1 + Ts} \quad (T > 0 \Leftrightarrow AS).$$

Calcoliamo la risposta allo scalino. Si ha:

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{\mu_G/T}{s+1/T} &\Rightarrow Y_F(s) = \frac{\mu_G/T}{(s+1/T)s} = \frac{\mu_G}{s} - \frac{\mu_G}{s+1/T} \\ &\Rightarrow y_F(t) = \mu_G (1 - e^{-\frac{1}{T}t}), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

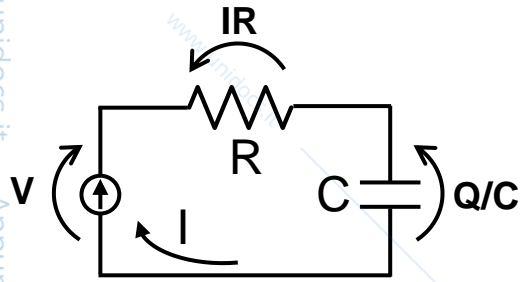
- A. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_F(t) = \mu_G$
- B. $T_a \simeq 5T$ s
- C1. $y_F(0^+) = 0$ e $\dot{y}_F(0^+) = \mu_G/T$
ossia $y_F(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\mu_G}{T} t$
- C2. 





Esempi caso C2α

- Circuito RC: carica del condensatore



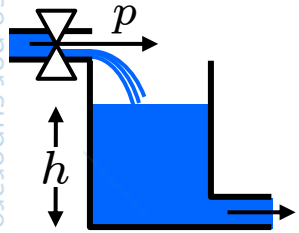
$$V = IR + \frac{Q}{C}, \quad I = \dot{Q} \Rightarrow \dot{Q} = -\frac{1}{RC}Q + \frac{1}{R}V$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{R}u \\ y = x \end{cases} \Rightarrow G(s) = \frac{C}{1 + RCs}$$

$$G(s) = \frac{C}{1 + RCs}$$

$$\begin{matrix} \mu_G = C \\ T = RC \end{matrix}$$

- Serbatoio

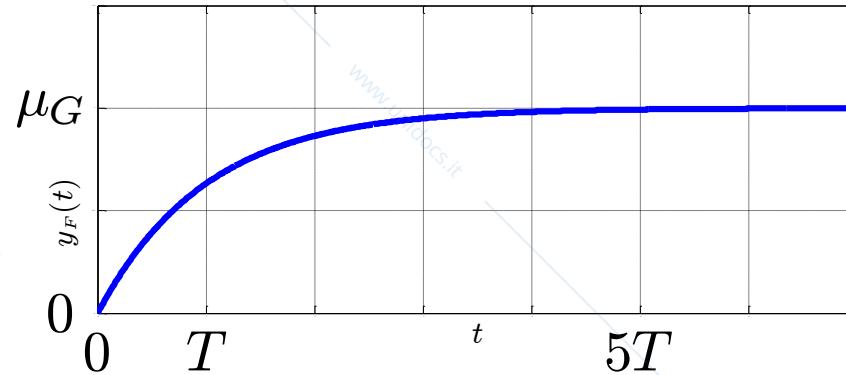


$$\dot{h} = -\alpha h + \beta p$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\alpha x + \beta u \\ y = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{\beta/\alpha}{1 + \frac{1}{\alpha}s}$$

$$\begin{matrix} \mu_G = \beta/\alpha \\ T = \alpha \end{matrix}$$



- Automobile



$$\dot{v} = -\frac{\gamma}{M}v + \lambda\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\frac{\gamma}{M}x + \lambda u \\ y = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{\lambda M/\gamma}{1 + \frac{M}{\gamma}s}$$

$$\begin{matrix} \mu_G = \lambda M/\gamma \\ T = M/\gamma \end{matrix}$$



Esempi caso C2α1

• Automobile



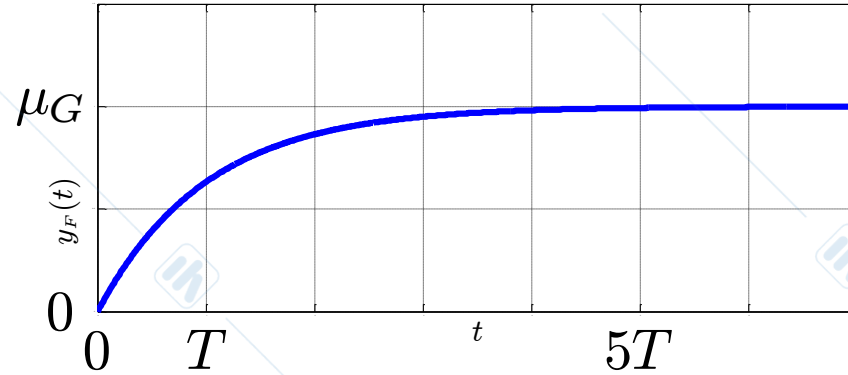
$$\dot{v} = -\frac{\gamma}{M}v + \lambda\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\frac{\gamma}{M}x + \lambda u \\ y = x \end{cases}$$

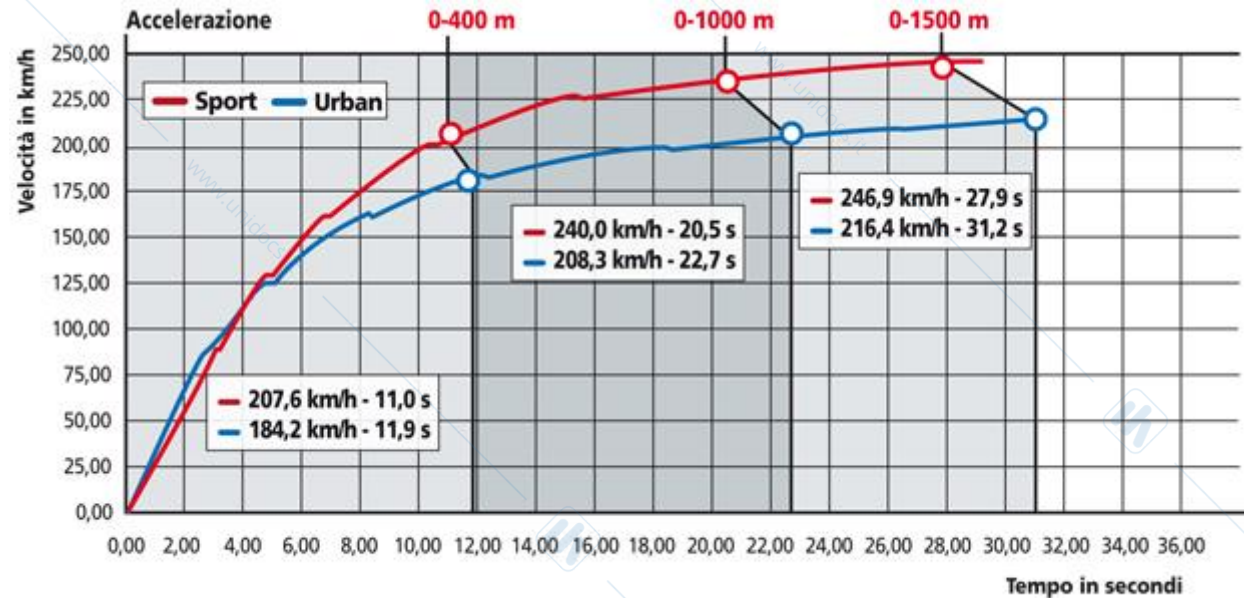
$$\Rightarrow G(s) = \frac{\lambda M/\gamma}{1 + \frac{M}{\gamma}s}$$

$$\mu_G = \lambda M/\gamma$$

$$T = M/\gamma$$



Da notare la somiglianza con le curve di velocità che si trovano nelle riviste di motori...





Rispondiamo a C2αII

- **Caso C2αII:** sistema di ordine 2 con poli Reali e no zeri.

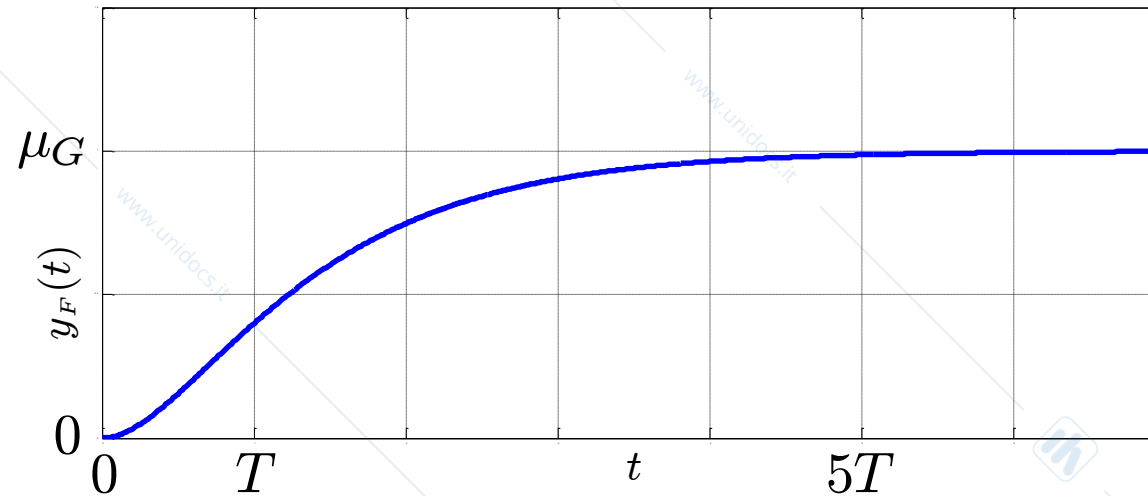
In questo caso

$$G(s) = \frac{\mu_G}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad (T_1 > 0, T_2 > 0 \Leftrightarrow AS).$$

Si calcola la risposta $y_F(t)$ allo scalino (ad esempio, come nel caso precedente, mediante sviluppo di Heaviside e antitrasformata di Laplace, vedi i dettagli sul libro) e si effettua lo studio di funzione.

Si ottiene:

- A.** $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_F(t) = \mu_G$
- B.** $T_a \simeq 5T \text{ s}, \quad T = \max\{T_1, T_2\}$
- C1.** $y_F(0^+) = \dot{y}_F(0^+) = 0$
 e $\ddot{y}_F(0^+) = \frac{\mu_G}{T_1 T_2}$
 ossia $y_F(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\mu_G}{2T_1 T_2} t^2$
- C2.** ----->

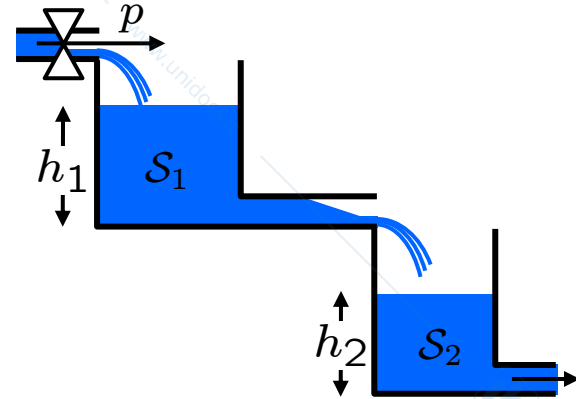


Andamento simile al caso [C2αI], cambia solo la pendenza iniziale



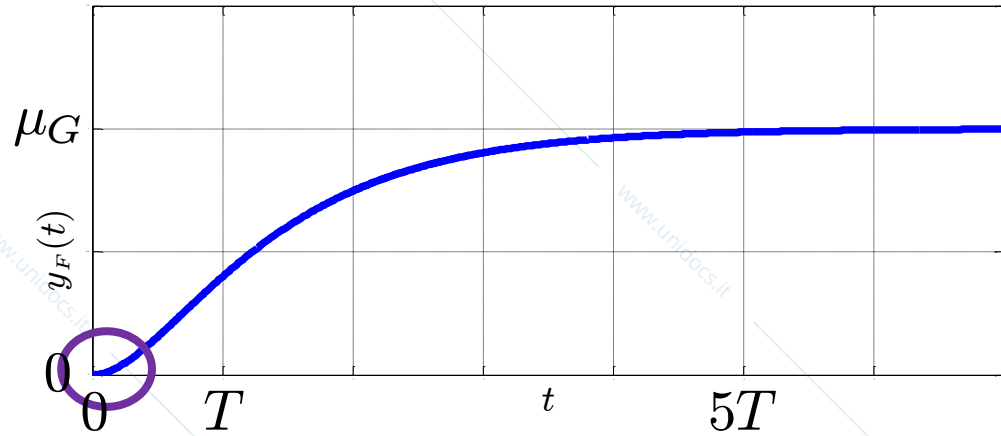
Esempio caso C2αII

- Rete idrica: 2 serbatoi in cascata



$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -\alpha_1 h_1 + \beta_1 p \\ \dot{h}_2 = \beta_2 h_1 - \alpha_2 h_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 = \beta_2 x_1 - \alpha_2 x_2 \\ y = x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{\beta_1 \beta_2}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} = \frac{(\beta_1 \beta_2) / (\alpha_1 \alpha_2)}{(1 + \frac{1}{\alpha_1} s)(1 + \frac{1}{\alpha_2} s)}$$



$$\begin{aligned} \mu_G &= (\beta_1 \beta_2) / (\alpha_1 \alpha_2) \\ T &= \max\{1/\alpha_1, 1/\alpha_2\} \end{aligned}$$

La presenza del serbatoio S_1 a monte di S_2 , con la sua dinamica (inerzia), ha l'effetto di **smussare** l'andamento del livello h_2 .



Rispondiamo a C2αIII

- **Caso C2αIII:** sistema di ordine 2 con poli Complessi e no zeri.

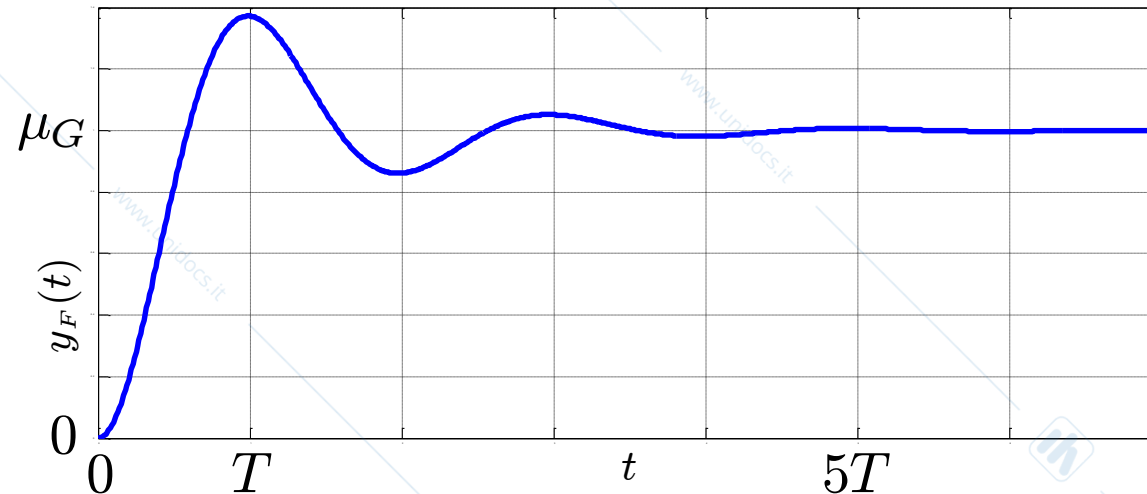
In questo caso

$$G(s) = \frac{\mu G}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1} \quad (\omega_n > 0, 0 < \xi < 1).$$

Si calcola la risposta $y_F(t)$ allo scalino e si effettua lo studio di funzione.

Si ottiene:

- A. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_F(t) = \mu G$
- B. $T_a \simeq 5T$ s, $T = \frac{1}{\xi\omega_n}$
- C1. $y_F(0^+) = \dot{y}_F(0^+) = 0$
e $\ddot{y}_F(0^+) = \mu G \omega_n^2$
ossia $y_F(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\mu G \omega_n^2}{2} t^2$
- C2. **----->**



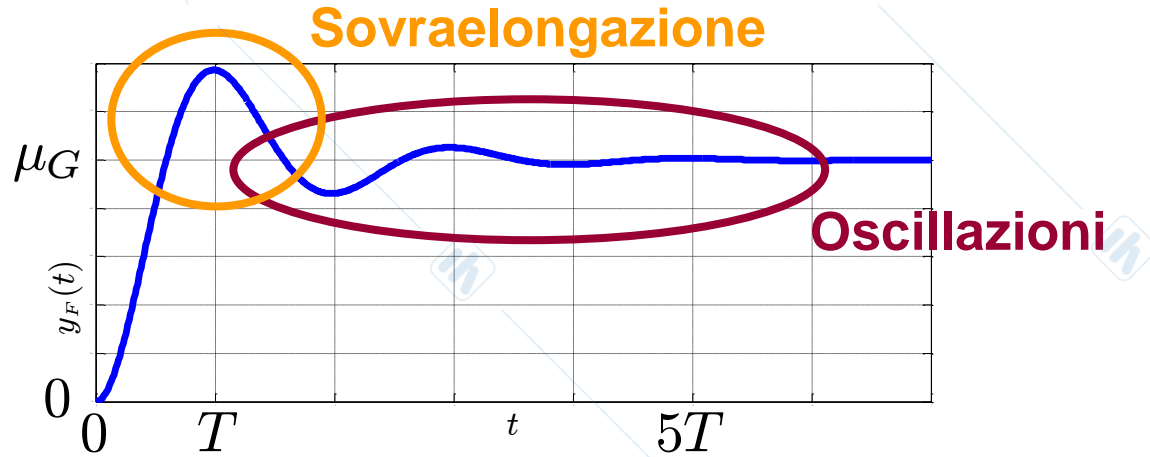
Rispetto ai casi precedenti ci sono due nuovi fenomeni...



Caso C2 α III: oscillazioni e sovraelongazione

- **Caso C2 α III:** sistema di ordine 2 con poli Complessi e no zeri (*continuazione*).

- A. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_F(t) = \mu_G$
- B. $T_a \simeq 5T$ s, $T = \frac{1}{\xi\omega_n}$
- C1. $y_F(0^+) = \dot{y}_F(0^+) = 0$
e $\ddot{y}_F(0^+) = \mu_G\omega_n^2$
ossia $y_F(t) \sim \frac{\mu_G\omega_n^2}{2} t^2$
 $t \rightarrow 0^+$
- C2. ----->



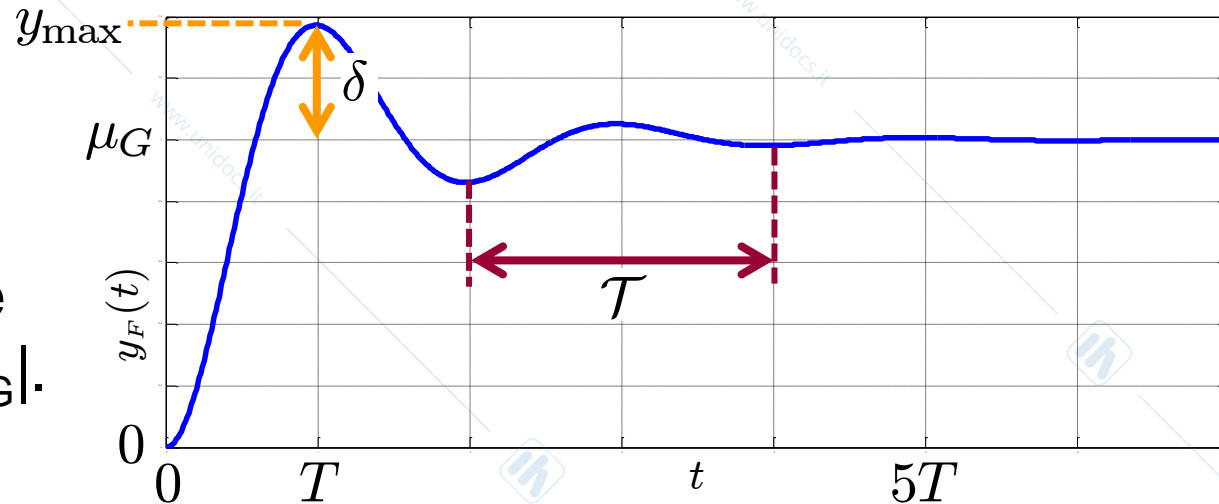
Oscillazioni:

- $\mathcal{T} = ?$

Sovraelongazione:

l'uscita "supera" il valore di regime, cioè $|y_{max}| > |\mu_G|$.

- $\delta = |y_{max} - \mu_G| = ?$





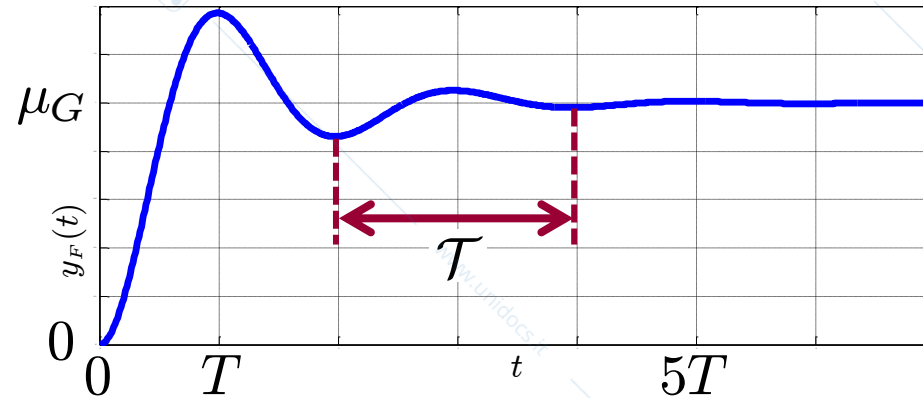
Caso C2αIII: oscillazioni

- **Caso C2αIII:** sistema di ordine 2 con poli Complessi e no zeri (*continuazione*).

$$G(s) = \frac{\mu G}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1}$$

Oscillazioni:

$$\mathcal{T} = \frac{2\pi}{|\Im m(\text{poli})|} =$$
$$= \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$



Infatti, l'uscita forzata è combinazione lineare della forzante e dei modi propri del sistema e questi ultimi sono gli unici termini oscillanti...



Caso C2αIII: oscillazioni (dettagli)

- **Caso C2αIII:** sistema di ordine 2 con poli Complessi e no zeri (*continuazione*).

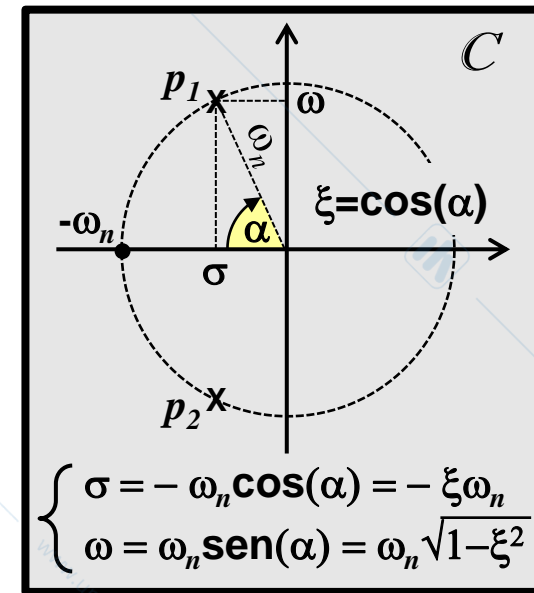
In dettaglio:

$$G(s) = \frac{\mu_G}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1} = \frac{\mu_G \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\rightarrow \text{poli}(G) = \sigma \pm j\omega = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

a cui sono associati i modi

$$\begin{cases} \phi_1(t) = e^{\sigma t} \cos(\omega t) \\ \phi_2(t) = e^{\sigma t} \sin(\omega t) \end{cases}$$



che oscillano (smorzandosi) con periodo $\mathcal{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$.

Si ha

$$Y_F(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{\mu_G \omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)s} = \frac{As + B}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{\mu_G}{s}$$

$$y_F(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \mu_g, \quad t \geq 0$$

$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$ (green arrow) $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$ (red arrow) $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$ (black arrow)



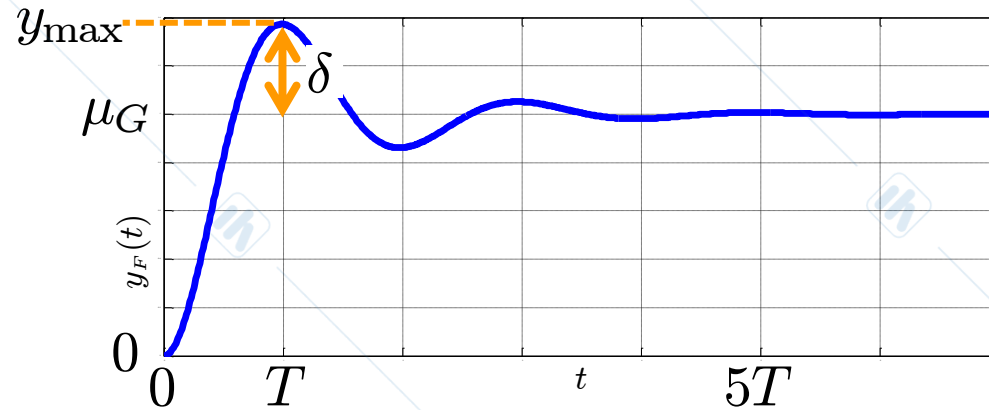
Caso C2 α III: sovraelongazione

- Caso C2 α III: sistema di ordine 2 con poli Complessi e no zeri (*continuazione*).

Sovraelongazione:

piuttosto che l'errore assoluto $\delta = |y_{\max} - \mu_G|$, è conveniente quantificare l'errore relativo percentuale,

cioè:
$$\Delta_{\%} = 100 \cdot \frac{|y_{\max} - \mu_G|}{|\mu_G|}$$



Facendo il calcolo a partire dall'espressione analitica di $y_F(t)$, si ottiene:

$$\Delta_{\%} = 100 \cdot e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

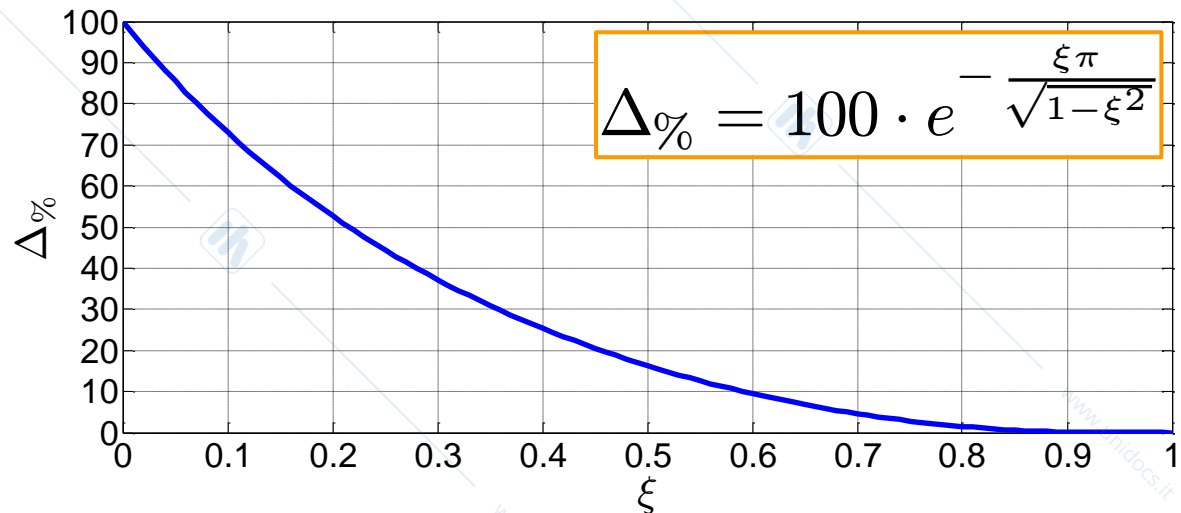
Osservazione: l'entità della sovraelongazione massima dipende **solo** dallo smorzamento ξ dei poli



Caso C2 α III: sovraelongazione

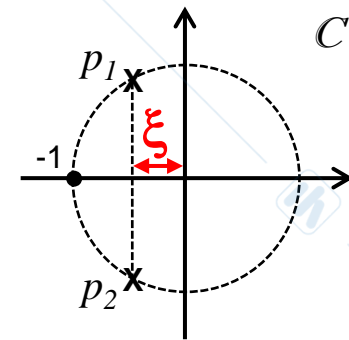
- Caso C2 α III: sistema di ordine 2 con poli Complessi e no zeri (*continuazione*).

Sovraelongazione. Andamento di $\Delta_{\%}$ in funzione di ξ :



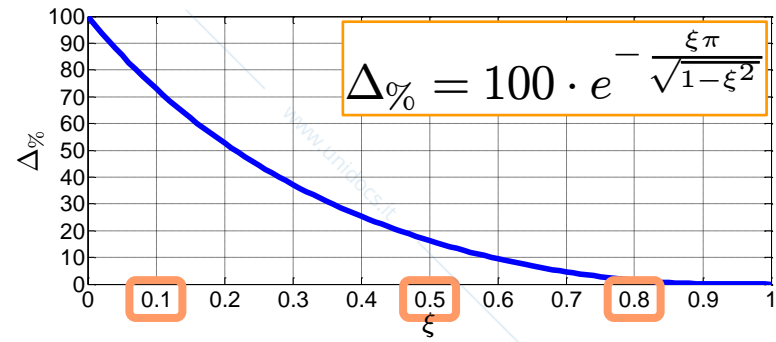
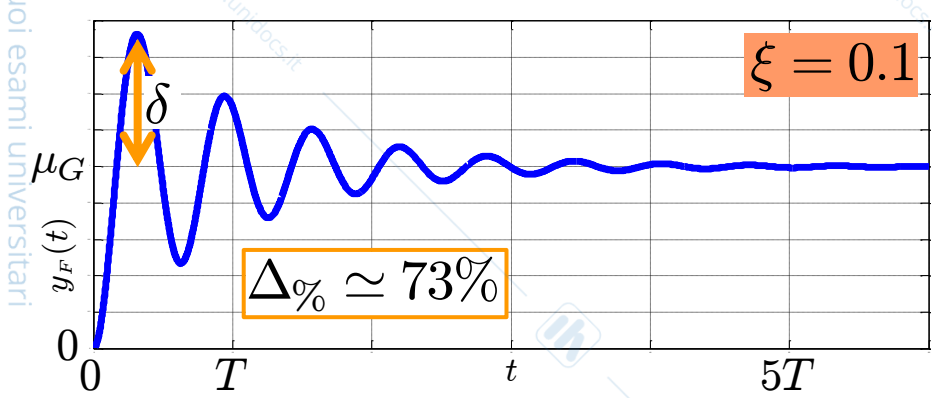
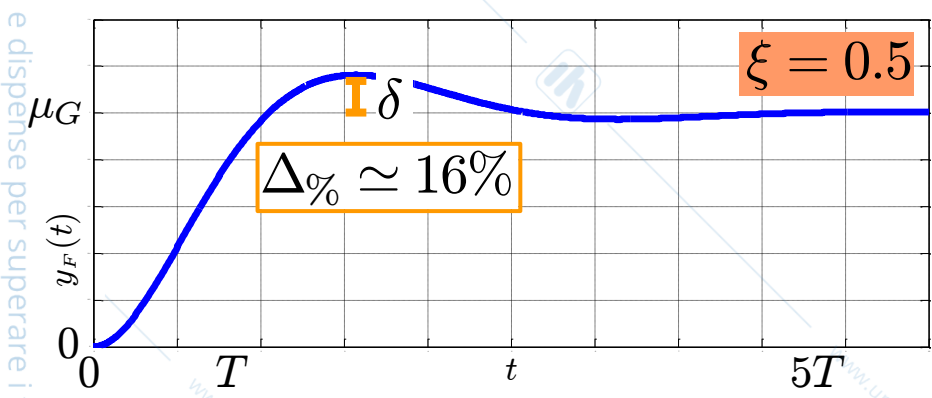
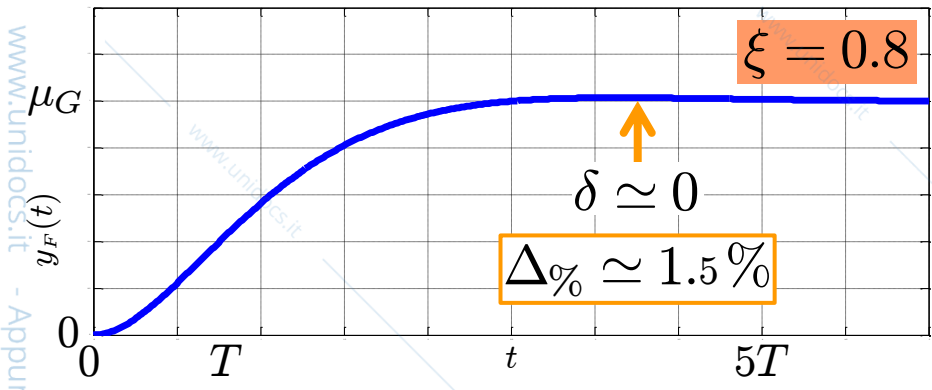
$$\Delta_{\%} = 100 \cdot e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

- la sovraelongazione aumenta al diminuire dello smorzamento (cioè, all'avvicinarsi dei poli all'asse Immaginario);
- si annulla per $\xi=1$ (poli Reali, caso [C2 α II])





Caso C2αIII: sovraelongazione

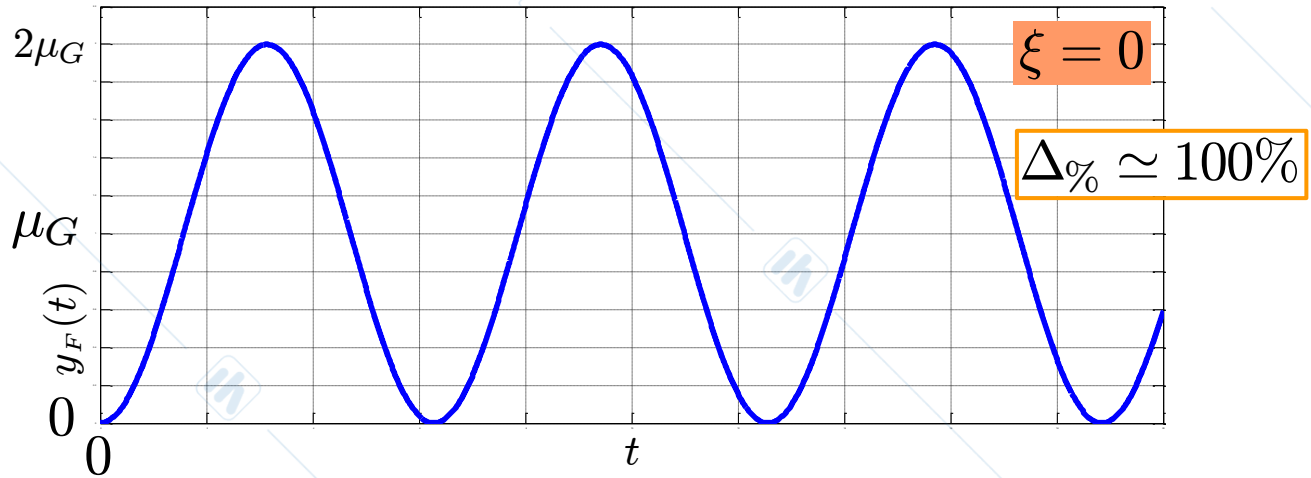


Modifiche nella risposta al diminuire dello smorzamento (a periodo delle oscillazioni costante)

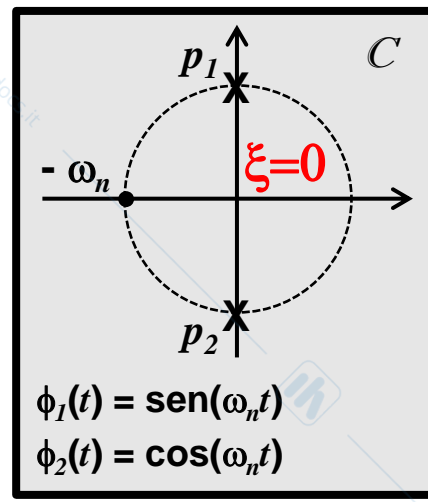


Caso C2αIII: sovraelongazione

Caso $\xi=0$:



- il sistema diventa semplicemente stabile con una coppia di poli \mathcal{I} mmaginari puri;
- i modi associati a tali poli sono limitati e non convergenti a 0;
- s'innescano oscillazioni **permanenti** (di periodo $\mathcal{T} = \frac{2\pi}{\omega_n}$).



Nota Bene: *questo è l'unico caso di sistema non asintoticamente stabile che trattiamo nell'ambito della risposta allo scalino*



Esempio caso C2αIII

L'oscillatore armonico senza attrito e sotto l'effetto di una forza costante (ad esempio, la gravità).

$$m\ddot{y} = -ky + u$$

$$(ms^2 + k)Y(s) = U(s) \rightarrow T_{yu}(s) = \frac{1}{ms^2 + k}$$

$$u(t) \equiv mg \rightarrow U(s) = \frac{mg}{s} \rightarrow Y_F(s) = \frac{mg}{ms^2 + k} \cdot \frac{1}{s},$$

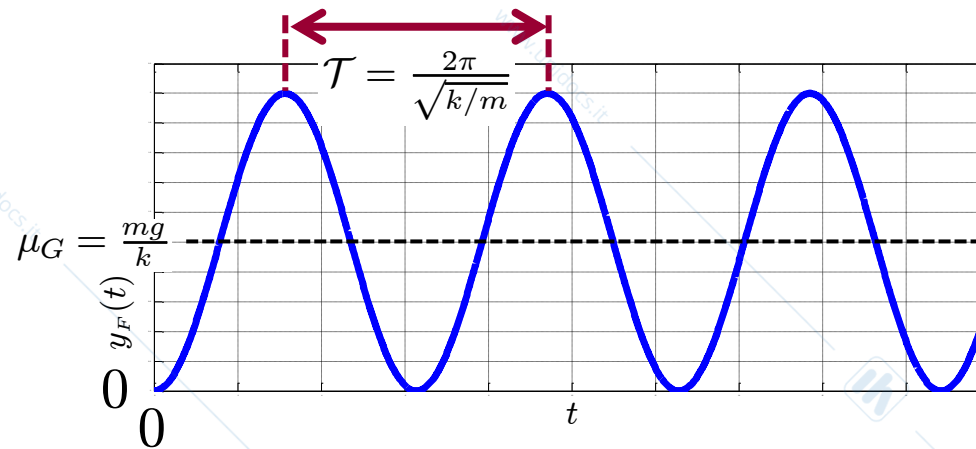
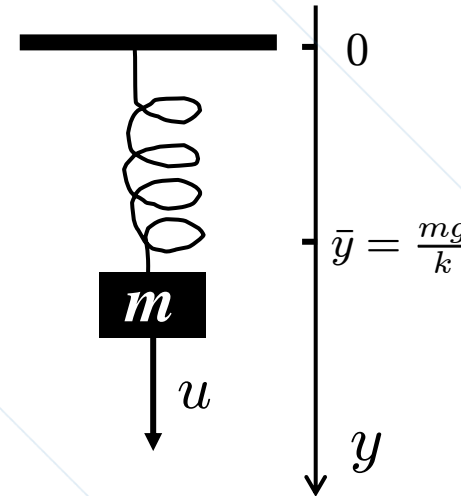
ossia $y_F(t)$ è la risposta allo scalino unitario di

$$G(s) = \frac{mg}{ms^2 + k} = \frac{g}{s^2 + \frac{k}{m}}$$

• $\mu_G = \frac{mg}{k}, \omega_n = \sqrt{k/m}, \xi = 0$

$$\Rightarrow \mathcal{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}}$$

$$\Delta_{\%} = 100\%$$



Osservazione: il sistema è semplicemente stabile, quindi non ha senso parlare di tempo di assestamento T_a (vi sono oscillazioni permanenti attorno a μ_G ma $\nexists \lim_{t \rightarrow +\infty} y_F(t)$)



Esempio caso C2αIII

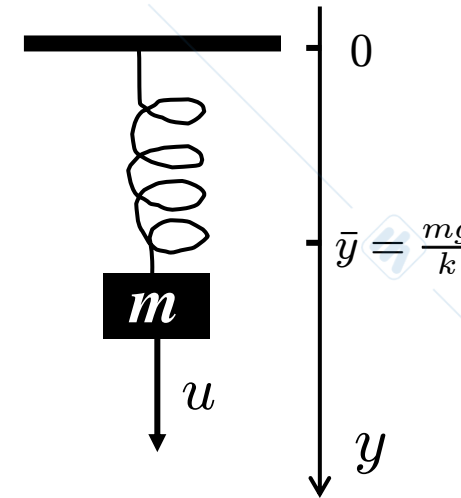
L'oscillatore armonico con attrito e sotto l'effetto di una forza costante

$$m\ddot{y} = -ky - h\dot{y} + u$$

$$T_{yu}(s) = \frac{1}{ms^2 + hs + k}; \quad \text{se } u(t) \equiv mg \rightarrow Y_F(s) = \frac{mg}{ms^2 + hs + k} \cdot \frac{1}{s},$$

ossia $y_F(t)$ è la risposta allo scalino unitario di

$$G(s) = \frac{mg}{ms^2 + hs + k} = \frac{g}{s^2 + \frac{h}{m}s + \frac{k}{m}}$$

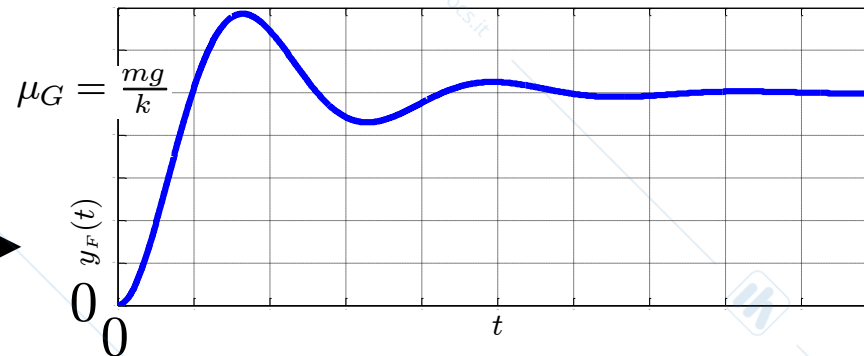


- $\mu_G = \frac{mg}{k}$, $\omega_n = \sqrt{k/m}$, $\xi = \frac{h}{2\sqrt{km}}$
(supponiamo $0 < h < 2\sqrt{km}$ cosicché $0 < \xi < 1$, poli Complessi)

$$\Rightarrow T_a \simeq \frac{5}{\xi\omega_n} = \frac{10m}{h}$$

$$\mathcal{T} = \frac{4\pi m}{\sqrt{4km - h^2}} \quad (\text{il periodo } \mathcal{T} \text{ aumenta al crescere di } h \dots)$$

$$\Delta_{\%} = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \% = \dots \quad \dashrightarrow$$



In presenza di attrito, $\xi > 0 \rightarrow$ le oscillazioni si smorzano e la massa m si porta nel nuovo equilibrio $\bar{y} = \frac{mg}{k}$ in un tempo T_a dipendente dal coefficiente di attrito h



Rispondiamo a C2αIV

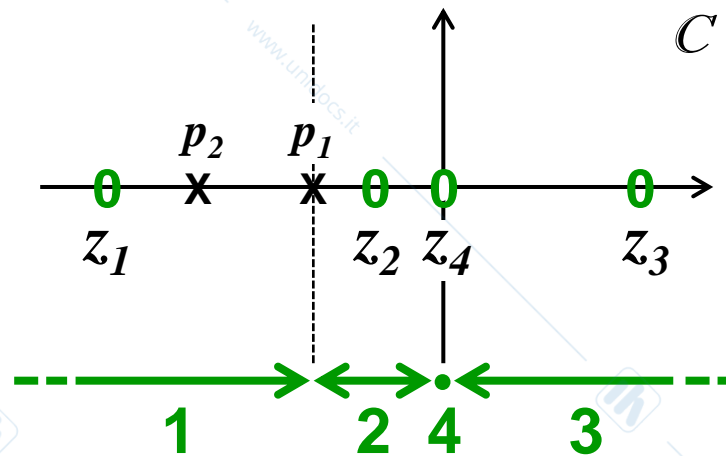
- **Caso C2αIV:** sistema di ordine 2 con 2 poli Reali e 1 zero.

In questo caso

$$G(s) = \mu_G \frac{1 + \tau s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}, \quad T_1 > 0, T_2 > 0, \tau \geq 0$$

- A. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_F(t) = \mu_G$
- B. $T_a \simeq 5T$ s, $T = \max\{T_1, T_2\}$ (salvo eccezioni che discuteremo)
- C1. $y_F(0^+) = 0$ e $\dot{y}_F(0^+) = \mu_G \frac{\tau}{T_1 T_2}$ ossia $y_F(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\mu_G \tau}{T_1 T_2} t$
- C2. Si calcola $y_F(t)$ e si effettua lo studio di funzione...

... In base alla posizione dello **0** rispetto ai poli, si ottengono 4 diversi comportamenti:



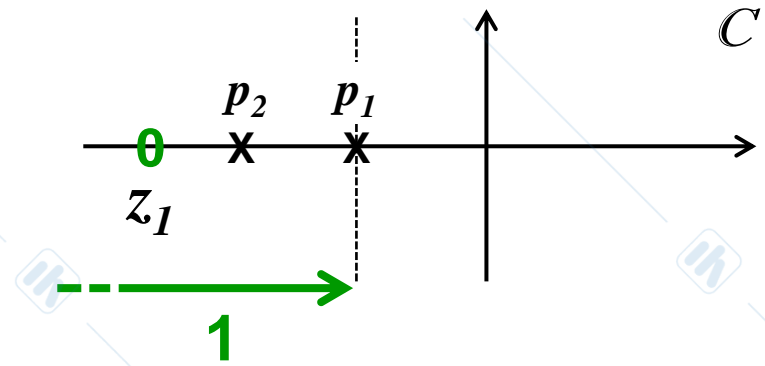


C2αIV - z1

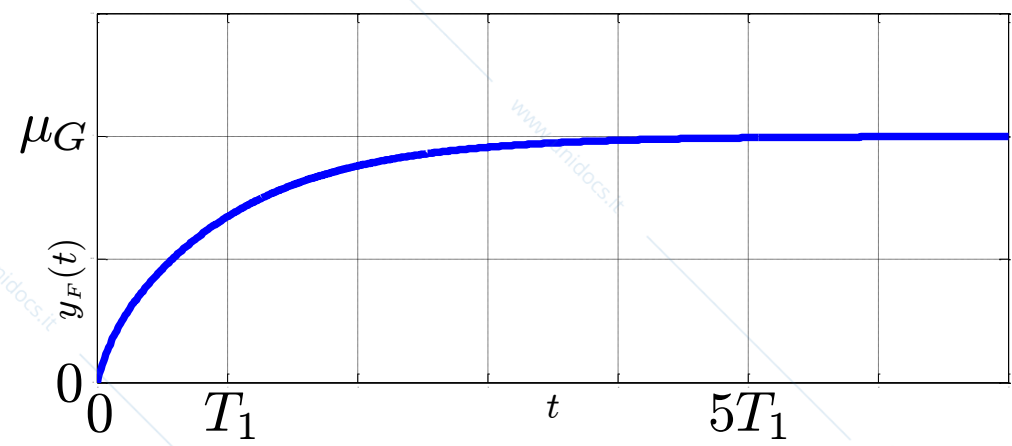
- **Caso C2αIV - z1:** 2 poli Reali e 1 zero a sinistra del polo dominante.

$$G(s) = \mu_G \frac{1 + \tau s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)},$$

$$T_1 = -\frac{1}{p_1} > T_2 = -\frac{1}{p_2} > 0, \quad 0 < \tau < T_1.$$



- A. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_F(t) = \mu_G$
- B. $T_a \simeq 5T_1$ s (salvo eccezioni...)
- C1. $y_F(0^+) = 0$ e $\dot{y}_F(0^+) = \mu_G \frac{\tau}{T_1 T_2}$
 ossia $y_F(t) \sim \frac{\mu_G \tau}{T_1 T_2} t$
- C2. Non ha effetti significativi sulla risposta che dunque si assesta *monotonamente* al valore di regime (similmente ai casi [C2αI-II] in cui i poli erano Reali)



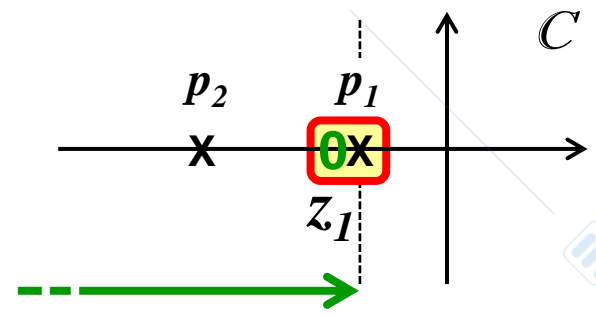
A meno che...

C2αIV - z1: quasi-cancellazione

• Caso C2αIV - z1: 2 poli Reali e 1 zero a sinistra del polo dominante (cont.).

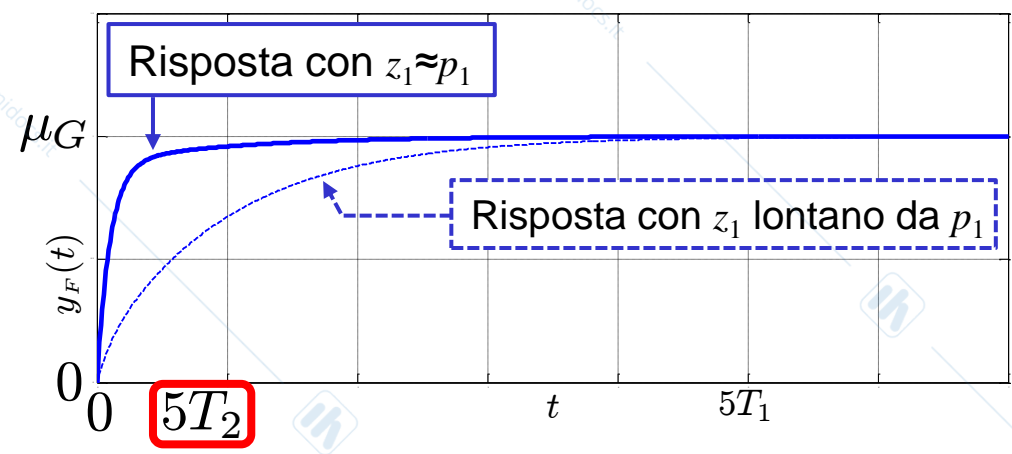
... A meno che $z_1 \simeq p_1$ (ossia, $\tau \simeq T_1$):
in questo caso

$$G(s) = \mu_G \frac{1 + \tau s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \simeq \mu_G \frac{1}{1 + T_2 s},$$



si ha cioè una *quasi-cancellazione* di quello che consideravamo come polo dominante: in pratica, quindi, il polo dominante è p_2 e dunque la risposta è più veloce (si assesta in un tempo minore).

- A. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_F(t) = \mu_G$
- B. $T_a \simeq 5 T_2$ s
- C1. $y_F(0^+) = 0$ e $\dot{y}_F(0^+) = \mu_G \frac{\tau}{T_1 T_2}$
ossia $y_F(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\mu_G \tau}{T_1 T_2} t$
- C2. In pratica, ci siamo ricondotti al caso [C2αI]



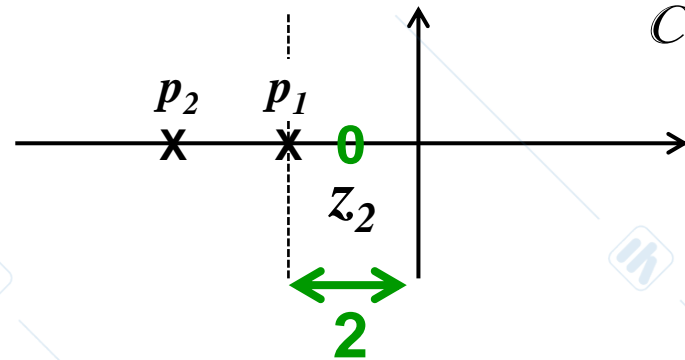


C2αIV - z2

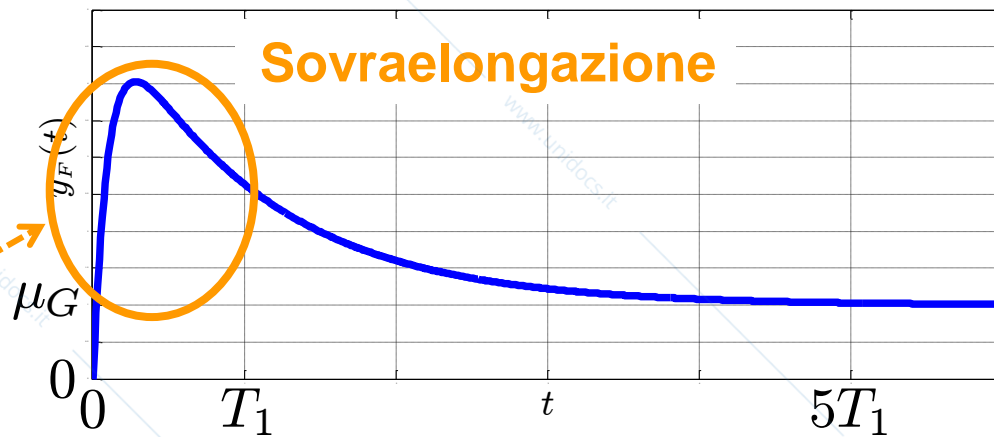
- **Caso C2αIV - z2:** 2 poli Reali e 1 zero a destra del polo dominante ma a sinistra dell'asse Immaginario.

$$G(s) = \mu_G \frac{1 + \tau s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)},$$

$$T_1 = -\frac{1}{p_1} > T_2 = -\frac{1}{p_2} > 0, \quad \tau > T_1.$$



- A. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_F(t) = \mu_G$
- B. $T_a \simeq 5T_1$ s (salvo eccezioni...)
- C1. $y_F(0^+) = 0$ e $\dot{y}_F(0^+) = \mu_G \frac{\tau}{T_1 T_2}$
ossia $y_F(t) \sim \frac{\mu_G \tau}{T_1 T_2} t$
- C2. Si manifesta una **sovraelongazione** tanto più marcata quanto più lo zero si trova vicino all'asse Immaginario



Nota Bene: vi è sovraelongazione ma la risposta **non è** oscillante.

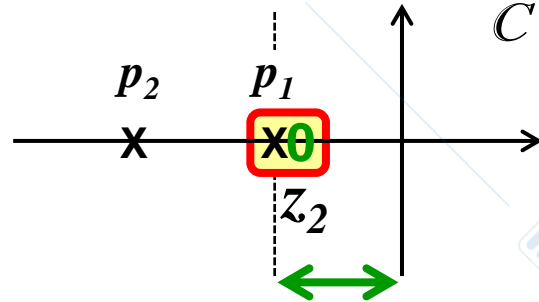
A meno che...

C2αIV - z2: quasi-cancellazione

• **Caso C2αIV - z2:** 2 poli Reali e 1 zero a destra del polo dominante ma a sinistra dell'asse Immaginario (*cont.*).

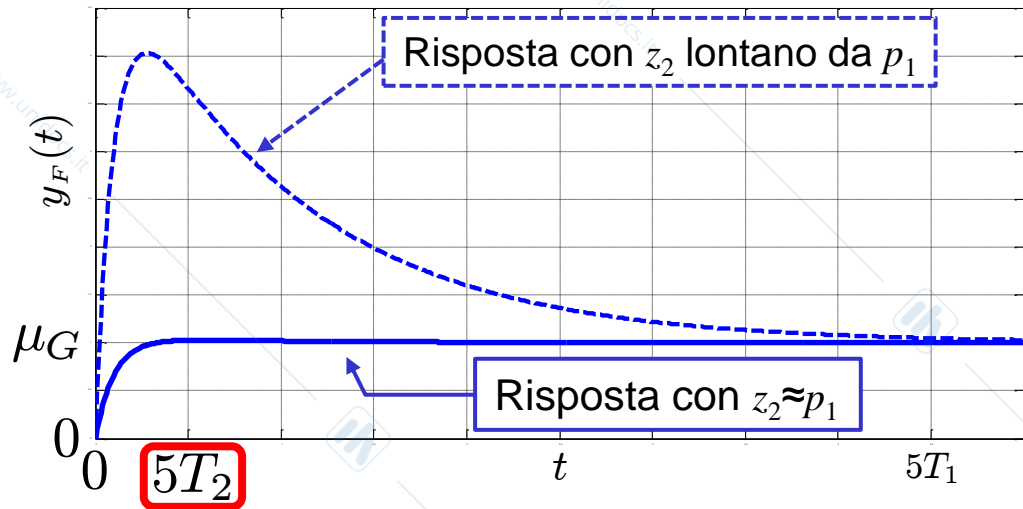
... A meno che $z_2 \simeq p_1$ (ossia, $\tau \simeq T_1$):
in questo caso

$$G(s) = \mu_G \frac{1 + \tau s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \simeq \mu_G \frac{1}{1 + T_2 s},$$



anche in questo caso si ha una *quasi-cancellazione* di p_1 e, in pratica, il polo dominante è p_2 (dunque la risposta è più veloce).

- A. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_F(t) = \mu_G$
- B. $T_a \simeq 5 T_2$ s
- C1. $y_F(0^+) = 0$ e $\dot{y}_F(0^+) = \mu_G \frac{\tau}{T_1 T_2}$
ossia $y_F(t) \sim \frac{\mu_G \tau}{T_1 T_2} t$ as $t \rightarrow 0^+$
- C2. In pratica, ci siamo ricondotti al caso [C2αI] (*sostanzialmente* la sovraelongazione scompare [...])



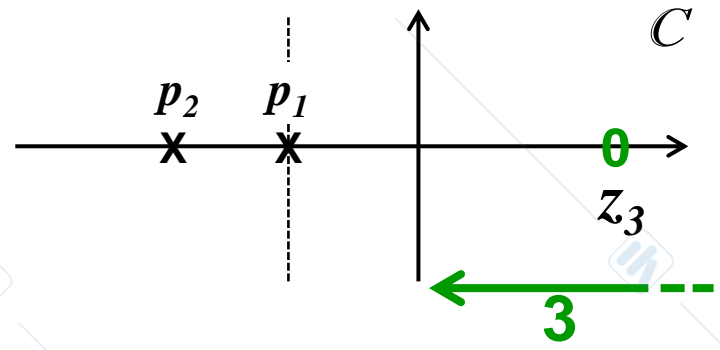


C2αIV - z3

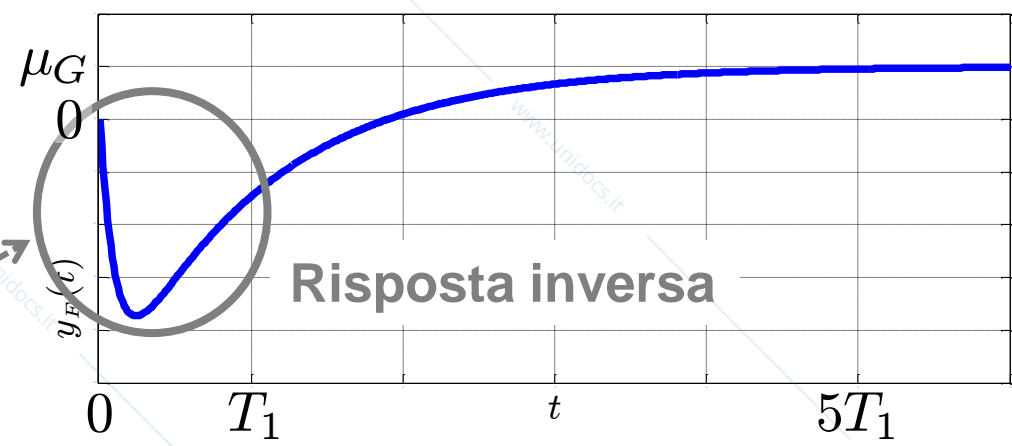
• **Caso C2αIV - z3:** 2 poli Reali e 1 zero a destra dell'asse Immaginario.

$$G(s) = \mu_G \frac{1 + \tau s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)},$$

$$T_1 = -\frac{1}{p_1} > T_2 = -\frac{1}{p_2} > 0, \quad \tau < 0.$$



- A. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_F(t) = \mu_G$
- B. $T_a \simeq 5T_1$ s (senza eccezioni!)
- C1. $y_F(0^+) = 0$ e $\dot{y}_F(0^+) = \mu_G \frac{\tau}{T_1 T_2}$
ossia $y_F(t) \sim \frac{\mu_G \tau}{T_1 T_2} t$
- C2. Si manifesta una **risposta inversa** (o **sottoelongazione**) tanto più marcata quanto più lo zero si trova vicino all'asse Immaginario. Si osservi che da C1. segue che $\mu_G \cdot \dot{y}_F(0^+) < 0 \dots$



Nota Bene: vi è risposta inversa ma la risposta **non** è oscillante.

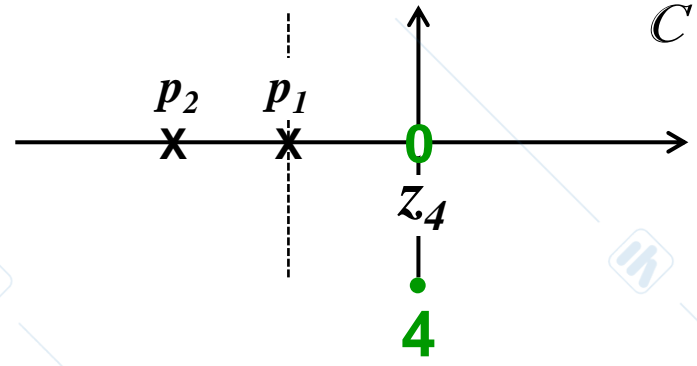


C2αIV – z4

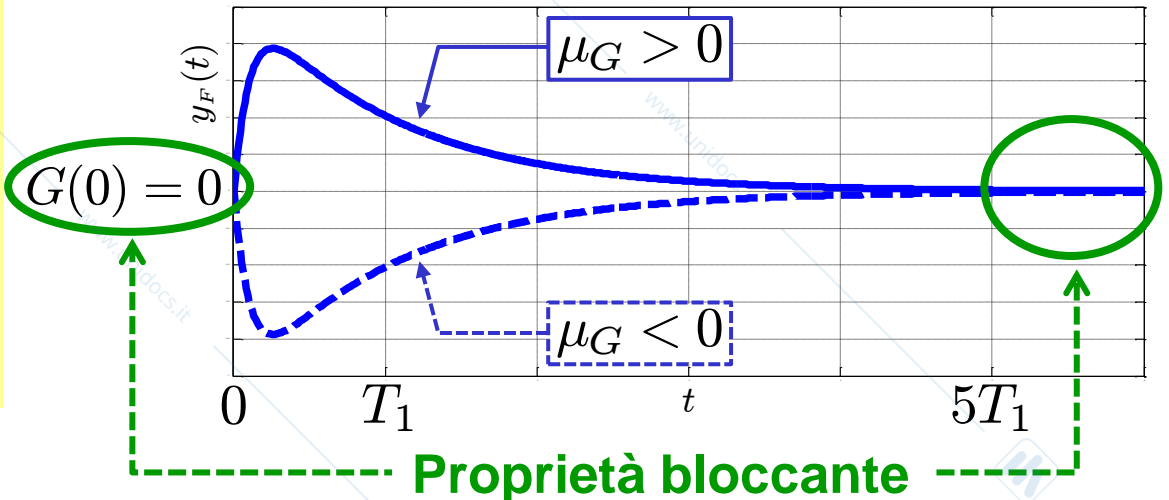
- Caso C2αIV - z4: 2 poli Reali e 1 zero in 0.

$$G(s) = \frac{\mu_G}{s^{-1}} \cdot \frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)} = \frac{\mu_G s}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

$$T_1 = -\frac{1}{p_1} > T_2 = -\frac{1}{p_2} > 0.$$



- A. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_F(t) = G(0) = 0$ ($\neq \mu_G$!)
- B. $T_a \simeq 5T_1$ s (senza eccezioni!)
- C1. $y_F(0^+) = 0$ e $\dot{y}_F(0^+) = \frac{\mu_G}{T_1 T_2}$
ossia $y_F(t) \sim \frac{\mu_G}{T_1 T_2} t$
- C2. Ha un massimo se $\mu_G > 0$,
un minimo se $\mu_G < 0$.



Si manifesta la **proprietà bloccante** dello zero in 0: a fronte di un ingresso costante *non-nullo* (\leftrightarrow polo in 0), l'uscita di regime si *annulla*.



Rispondiamo a C2αV

• **Caso C2αV:** sistema di ordine 2 con poli Complessi e uno zero.

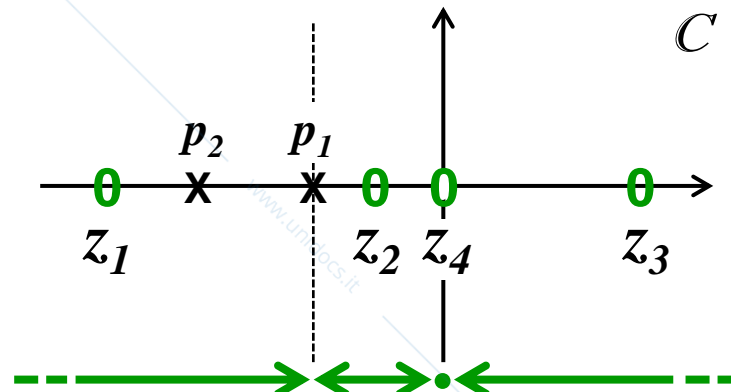
In questo caso

$$G(s) = \mu_G \frac{1 + \tau s}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1} \quad (\omega_n > 0, 0 < \xi < 1, \tau \geq 0).$$

Si combinano i risultati del caso C2αIII e C2αIV:

Risposta oscillante con periodo $T = 2\pi / \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$

E i fenomeni indotti dallo zero in accordo con i casi $z_1 \rightarrow z_4$ di C2αIV



Non rilevante **Sovraelongazione** **Proprietà bloccante** Risposta inversa

Esempio caso C2 α V

• **Caso C2 α V:** sistema di ordine 2 con poli Complessi e uno zero (cont.).

Si combinano i risultati del caso C2 α III e C2 α IV:

Risposta oscillante con periodo $T = 2\pi/\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

E i fenomeni indotti dallo zero in accordo con i casi $z_1 \rightarrow z_4$ di C2 α IV

Esempio:

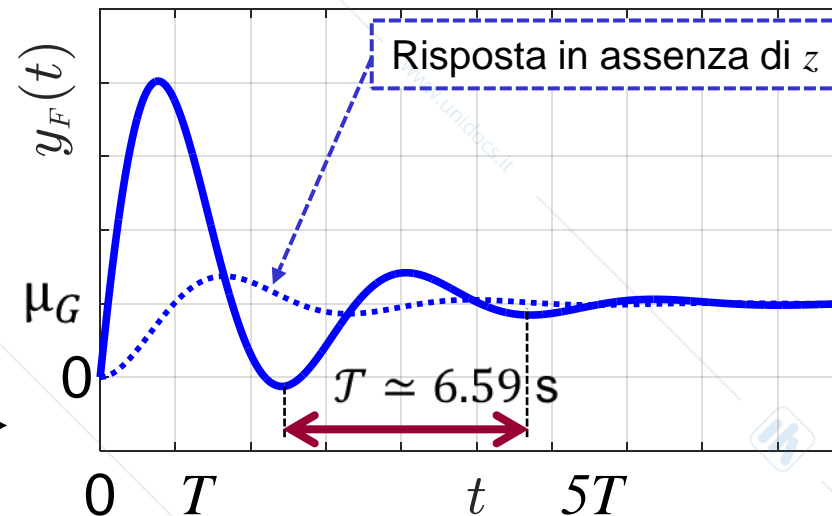
$$G(s) = \frac{1+5s}{s^2+0.6s+1} \quad (\omega_n = 1, \xi = 0.3 \Rightarrow \Re(p_{1,2}) = -\xi\omega_n = -0.3; z = -0.2)$$

A. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_F(t) = \mu_G = 1$

B. $T_a \simeq 5T = \frac{5}{\xi\omega_n} = \frac{5}{0.3} \simeq 16.66 \text{ s}$

C1. $y_F(0^+) = 0$ e $\dot{y}_F(0^+) = 5$
ossia $y_F(t) \sim 5t$
 $t \rightarrow 0^+$

C2. Caso C2 α III + C2 α IV- z2 \dashrightarrow



In realtà l'effetto degli zeri è leggermente differente rispetto al caso C2 α IV ma, in questo corso, non è necessario né utile andare in maggiori dettagli



Rispondiamo a C2αVI

• **Caso C2αVI:** sistema di ordine $n \geq 3$.

$$Y_F(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{a_{11}}{s+p_1} + \frac{a_{12}}{(s+p_1)^2} + \dots + \frac{a_{21}}{s+p_2} + \dots + \frac{G(0)}{s} \quad \mathcal{L}^{-1}$$

$$y_F(t) = \underbrace{a_{11}e^{-p_1t} + a_{12}te^{-p_1t} + \dots + a_{21}e^{-p_2t} + \dots}_{y'_F(t)} + G(0), \quad t \geq 0$$

$$y_F(t) = \underbrace{y'_F(t)}_{\substack{\downarrow t \rightarrow +\infty \\ 0}} + y_R(t)$$

- $y_F(t)$ converge a $y_R(t)$ e tale convergenza avviene esattamente nel modo in cui $y'_F(t)$ converge a 0
- Le caratteristiche del transitorio dipendono esattamente dal comportamento di $y'_F(t)$ [$y'_F(t)$ è combinazione lineare dei modi propri]
- Il comportamento di $y'_F(t)$ è dettato dai **poli dominanti** [essi danno il contributo più importante, gli altri termini "si annullano" prima]



Rispondiamo a C2 α VI

42

• **Caso C2 α VI:** sistema di ordine $n \geq 3$.

In questo caso si individuano i poli dominanti:

da essi dipendono le caratteristiche principali dell'andamento della risposta, si trascurano dunque gli altri poli e ci si riconduce all'opportuno caso C2 α I \rightarrow C2 α V.

L'effetto degli zeri è in accordo con i casi $z_1 \rightarrow z_4$ di C2 α IV [...]

Esempio:

• Se i poli dominanti sono *Reali*, la risposta non è oscillante, possono esserci sovraelongazione e/o risposta inversa indotte da eventuali zeri.

• Se i poli dominanti sono *Complessi*, la risposta è oscillante con periodo $\mathcal{T} = 2\pi/\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$, dove ξ e ω_n sono lo smorzamento e la pulsazione naturale di tali poli (+ i fenomeni indotti da eventuali zeri)



Esempio caso C2 α VI

43

Esempio 1 (reprise):

$$G(s) = \frac{(s - 1)(s + 1)}{(s + 2)(s + 4)(s^2 + s + 5/4)}$$

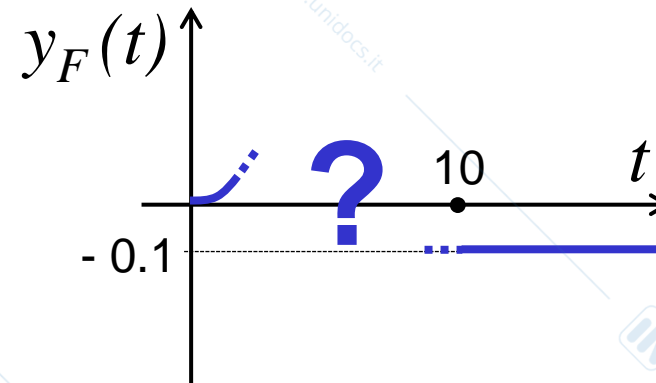
A. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_F(t) = -0.1$

B. $T_a \simeq \frac{5}{\xi\omega_n} = \frac{5}{0.5} = 10 \text{ s}$

C1. $y_F(0^+) = \dot{y}_F(0^+) = 0$ e $\ddot{y}_F(0^+) = 1$

ossia $y_F(t) \sim \frac{1}{2}t^2$
 $t \rightarrow 0^+$

C2. ?...

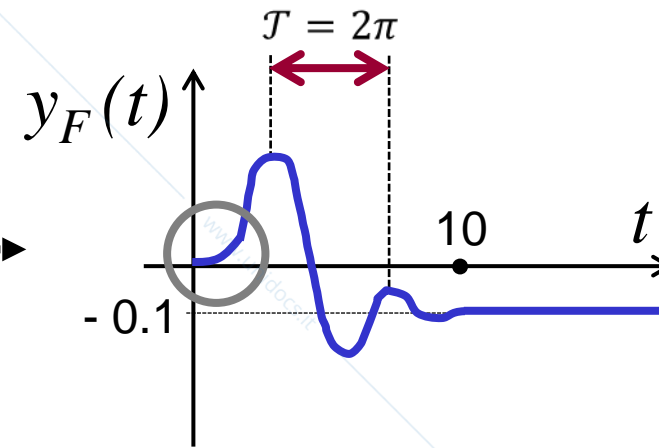
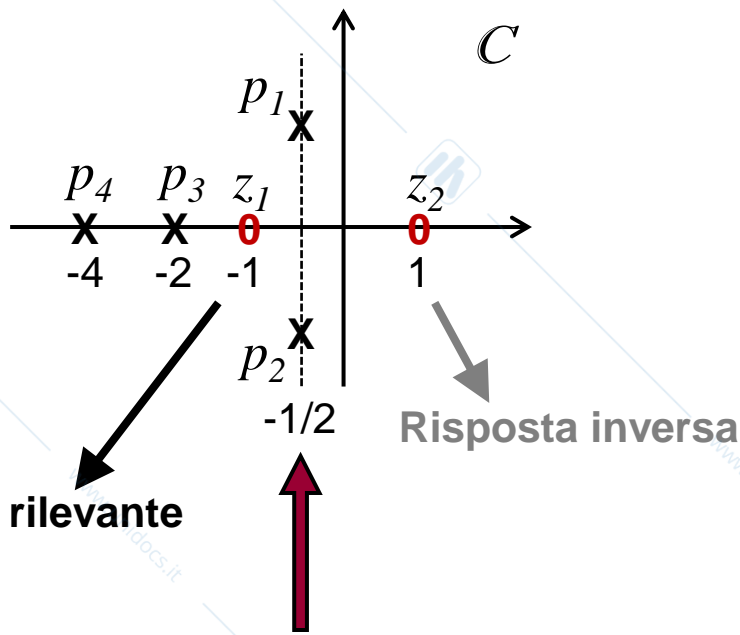




Esempio caso C2αVI

Esempio 1 (reprise):

$$G(s) = \frac{(s - 1)(s + 1)}{(s + 2)(s + 4)(s^2 + s + 5/4)}$$



Poli dominanti Complessi: $\omega_n = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\xi = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0.45$

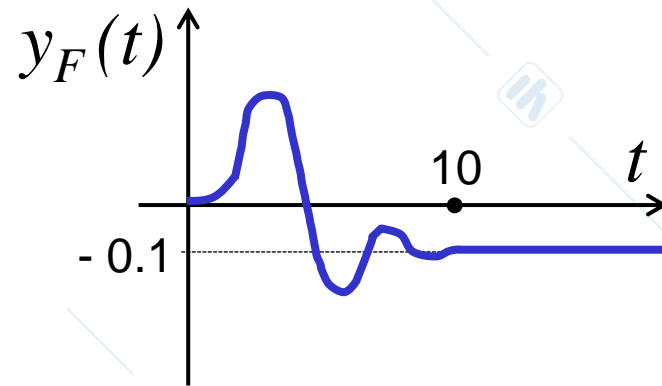
→ Risposta oscillante con periodo $T = 2\pi/\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = 2\pi$ e $\Delta_{\%} \approx 21\%$



Esempio caso C2 α VI

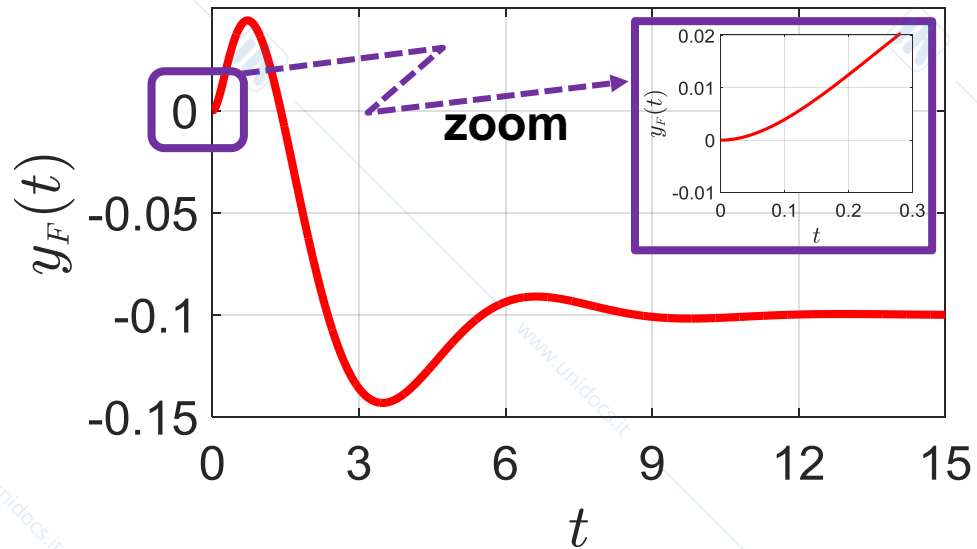
Esempio 1 (reprise):

$$G(s) = \frac{(s - 1)(s + 1)}{(s + 2)(s + 4)(s^2 + s + 5/4)}$$



Qualitativo

vs



Effettivo

NB: anche senza usare Matlab, potrei calcolare l'espressione analitica di $y_F(t)$ e fare lo studio di funzione come imparato in Analisi ma...



Rispondiamo a **C2β**

• **Caso C2β:** sistema di ordine qualsiasi con $G(s)$ propria non strettamente [$\text{reldeg}(G) = 0$]

$$G(s) = \hat{G}(s) + d \quad \text{con } \hat{G}(s) \text{ strettamente propria}$$

$$Y_F(s) = G(s) \frac{1}{s} = \hat{G}(s) \frac{1}{s} + \frac{d}{s} \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$y_F(t) = \underbrace{\hat{y}(t)} + d, \quad t \geq 0$$

Questa è la risposta allo scalino di $\hat{G}(s)$!

Cioè, la risposta allo scalino di $G(s)$ è la risposta allo scalino di $\hat{G}(s)$ traslata di d , e $\hat{y}(t)$ abbiamo imparato a studiarla in **[C2α]** !



Esempio caso C2β

Caso C2β: sistema con $G(s)$ propria non strettamente

$$G(s) = \hat{G}(s) + d \quad \text{con } \hat{G}(s) \text{ strettamente propria}$$

La risposta allo scalino di $G(s)$ è la risposta allo scalino di $\hat{G}(s)$ traslata di d

Esempio:
$$G(s) = \frac{6s-1}{3s+4}$$

Si ha:
$$G(s) = \frac{(6s+8)-9}{3s+4} = 2 - \frac{9}{3s+4} = 2 - \frac{3}{s+4/3},$$

quindi la risposta allo scalino è quella di $\hat{G}(s) = -\frac{3}{s+4/3}$ traslata di +2.

Studio della risposta di $\hat{G}(s)$:

A. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{y}_F(t) = \hat{G}(0) = -9/4$

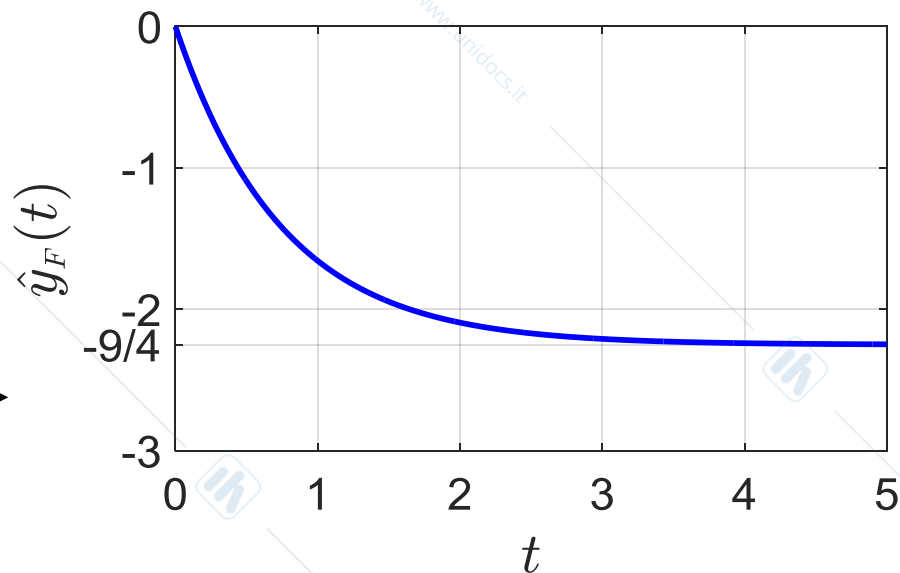
B. $T_a \approx \frac{5}{4/3} = 3.25 \text{ s}$

C1. $\text{reldeg}(\hat{G}) = 1$ e $\rho_{\hat{G}} = -3$:

$\hat{y}_F(0^+) = 0$ e $\dot{\hat{y}}_F(0^+) = -3$

ossia $\hat{y}_F(t) \sim -3t$
 $t \rightarrow 0^+$

C2. Caso C2αI





Esempio caso C2β

Caso C2β: sistema con $G(s)$ propria non strettamente

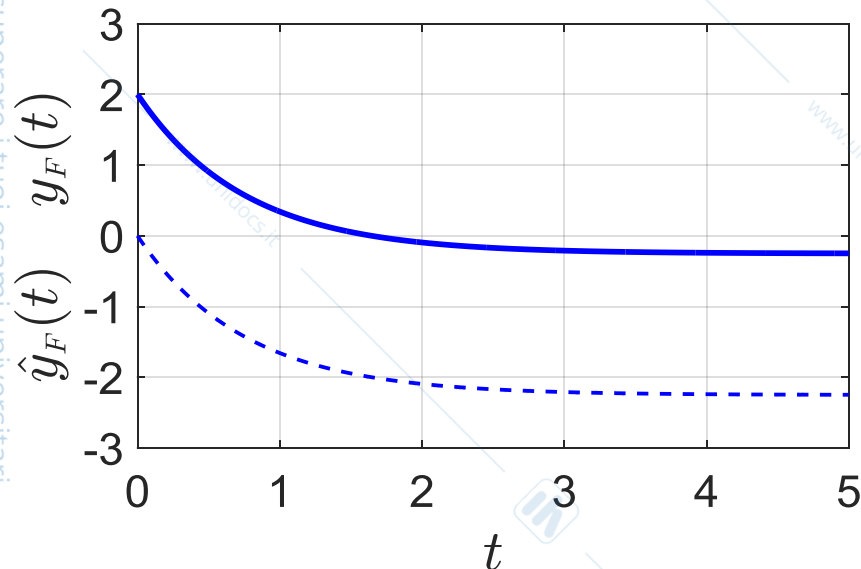
$$G(s) = \hat{G}(s) + d \quad \text{con } \hat{G}(s) \text{ strettamente propria}$$

La risposta allo scalino di $G(s)$ è la risposta allo scalino di $\hat{G}(s)$ traslata di d

Esempio:
$$G(s) = \frac{6s-1}{3s+4}$$

Si ha:
$$G(s) = \frac{(6s+8)-9}{3s+4} = 2 - \frac{9}{3s+4} = 2 - \frac{3}{s+4/3},$$

quindi la risposta allo scalino è quella di $\hat{G}(s) = -\frac{3}{s+4/3}$ traslata di +2.



Osservazione:

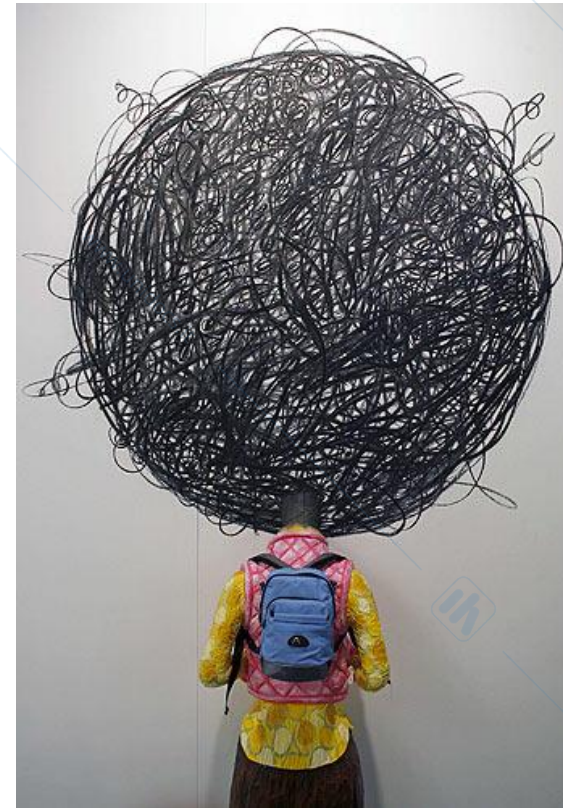
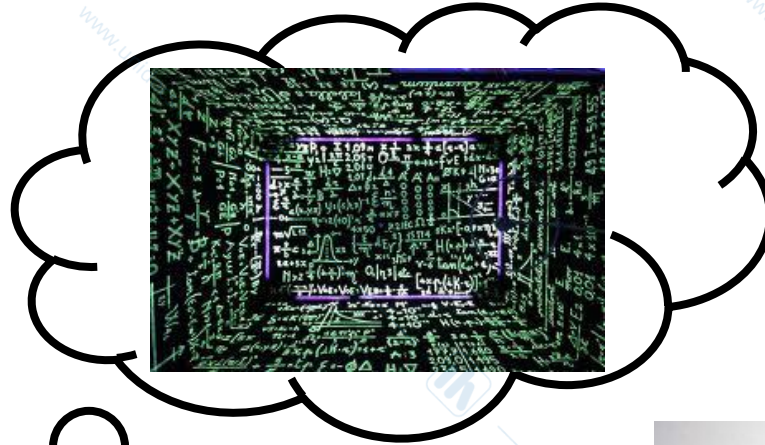
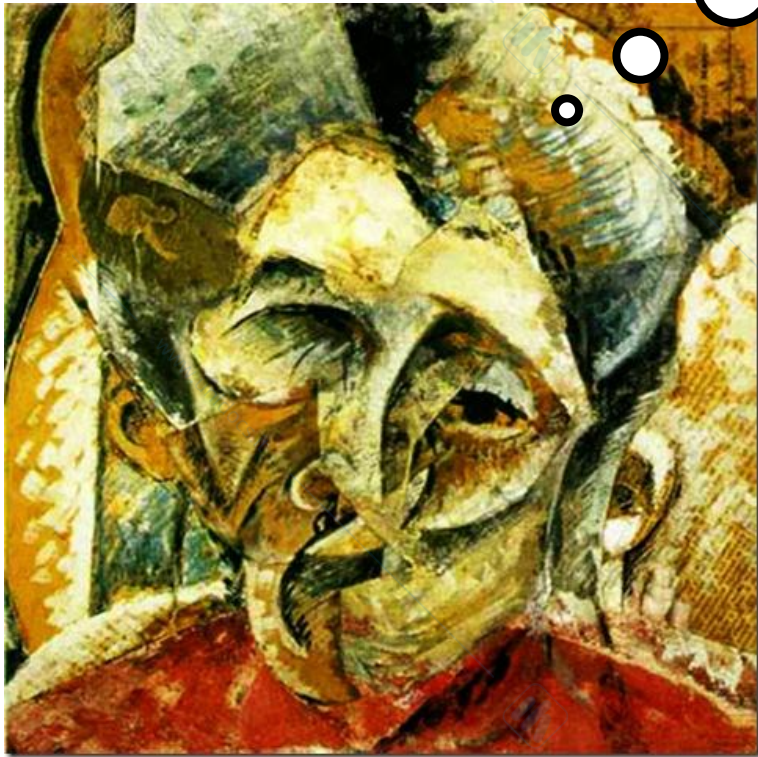
C1. $\text{reldeg}(G) = 0$ e $\rho_G = 2$:

$$y_F(0^+) = 2 \quad [y_F(t) = 0 \text{ per } t \leq 0]$$

L'uscita forzata è discontinua in 0: ciò è dovuto al fatto che, essendo $\text{reldeg}(G) = 0$, $d \neq 0$: vi è quindi un legame algebrico diretto fra il segnale d'ingresso (che è discontinuo in 0) e l'uscita.



Let's make it easy!...





Riassumendo. Data $G(s)$ asintoticamente stabile, per tracciare il grafico *qualitativo* della risposta allo scalino, procedo come segue:

Se $G(s)$ è strett.te propria procedo, altrimenti scompongo $G(s) = \hat{G}(s) + d$, con $\hat{G}(s)$ strett.te propria, poi procedo (applico i passi successivi a $\hat{G}(s)$, poi traslo).

A. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_F(t) = y_R = G(0)$

Determino poli e zeri di $G(s)$ ed individuo i poli dominanti (facendo attenzione ad eventuali quasi-cancellazioni e ricordandomi di calcolare gli zeri di $\hat{G}(s)$, se $G(s)$ non era strett.te propria), sia T la loro costante di tempo.

B. $T_a \simeq 5 * T = \begin{cases} \frac{5}{|p_{dom}|} & \text{se } p_{dom} \in \mathbb{R} \\ \frac{5}{\xi \omega_n} & \text{se } p_{dom} \in \mathbb{C} \end{cases}$

C1. Determino $\text{reldeg}(G)$ e ρ_G : posto $k = \text{reldeg}(G)$, si ha

$$y_F(0^+) = \dot{y}_F(0^+) = \dots = y_F^{(k-1)}(0^+) = 0 \text{ e } y_F^{(k)}(0^+) = \rho_G.$$

C2. In base ai poli / poli dominanti e agli zeri di $G(s)$, individuo l'opportuno sottocaso **[C2 α]** e considero l'effetto degli zeri secondo la tabella degli zeri [...].



Casistica: sintesi

• G(s) Strettamente propria [C2α]

Sotto-casi [C2α]:

[C2αI] Sistema di ordine 1

[C2αII] Sist. di ordine 2 con 2 poli Reali e no zeri

[C2αIII] Sist. di ordine 2 con 2 poli Complessi e no zeri

[C2αIV] Sist. di ordine 2 con 2 poli Reali ($p_2 < p_1 < 0$) e 1 zero (z)

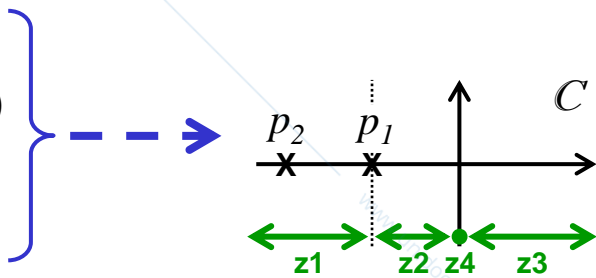
Sotto-casi [C2αIV] (ruolo degli zeri):

[C2αIV-z1] ($z < p_1$)

[C2αIV-z2] ($p_1 < z < 0$)

[C2αIV-z3] ($z > 0$)

[C2αIV-z4] ($z = 0$)



[C2αV] Sist. di ordine 2 con 2 poli Complessi e 1 zero

[C2αVI] Sist. di ordine 3 o maggiore

• G(s) Propria non strettamente [C2β]



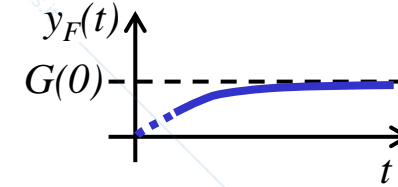
Casistica: sintesi

• G(s) Strettamente propria [C2α]

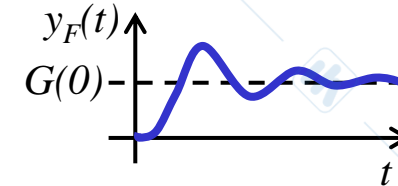
Sotto-casi [C2α]:

[C2αI] Sistema di ordine 1

[C2αII] Sist. di ordine 2 con 2 poli Reali e no zeri



[C2αIII] Sist. di ordine 2 con 2 poli Complessi e no zeri



[C2αIV] Sist. di ordine 2 con 2 poli Reali ($p_2 < p_1 < 0$) e 1 zero (z)

Sotto-casi [C2αIV] (ruolo degli zeri):

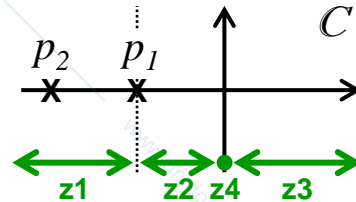
[C2αIV-z1] ($z < p_1$)

[C2αIV-z2] ($p_1 < z < 0$)

[C2αIV-z3] ($z > 0$)

[C2αIV-z4] ($z = 0$)

Come [C2αII] + seguente effetto dello zero:



z1: non rilevante (tranne quasi-cancellazione)

z2: sovraelongazione (tranne quasi-canc.)

z3: risposta inversa

z4: proprietà bloccante degli zeri

[C2αV] Sist. di ordine 2 con 2 poli Complessi e 1 zero

Come [C2αIII] + effetto dello zero come [C2αIV]

[C2αVI] Sist. di ordine 3 o maggiore

→ Approx a poli dominanti + opportuno sottocaso [C2αI-V]

• G(s) Propria non strettamente [C2β]

Scomposizione $G(s) = d + G'(s)$ + opportuno sottocaso [C2α] e traslazione di d



Casistica: sintesi

• $G(s)$ Strettamente propria [C2 α]

Sotto-casi [C2 α]:

[C2 α I] Sistema di ordine 1

[C2 α II] Sist. di ordine 2 con 2 poli Reali e no zeri

[C2 α III] Sist. di ordine 2 con 2 poli Complessi e no zeri

[C2 α IV] Sist. di o

Sotto-casi [C2 α IV]:

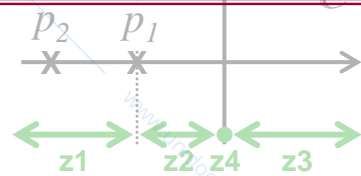
[C2 α IV-z1] ($z < p_1$)

[C2 α IV-z2] ($p_1 < z < 0$)

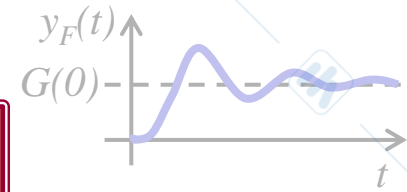
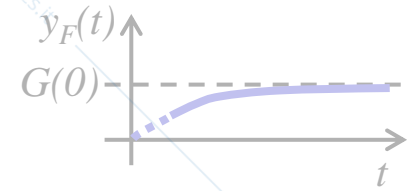
[C2 α IV-z3] ($z > 0$)

[C2 α IV-z4] ($z = 0$)

**I casi da ricordare sono
[C2 α I] [C2 α III] [C2 α IV]
il resto sono variazioni sul tema**



z2: sovraelongazione (tranne quasi-canc.)
z3: risposta inversa
z4: proprietà bloccante degli zeri



[C2 α V] Sist. di ordine 2 con 2 poli Complessi e 1 zero

Come [C2 α III] + effetto dello zero come [C2 α IV]

[C2 α VI] Sist. di ordine 3 o maggiore

→ Approx a poli dominanti + opportuno sottocaso [C2 α I-V]

• $G(s)$ Propria non strettamente [C2 β]

→ Scomposizione $G(s) = d + G'(s)$ + opportuno sottocaso [C2 α] e traslazione di d

...E la risposta esponenziale?

- Data $G(s)$ AS, grafico *qualitativo* di $y_F(t)$ quando $u(t) = e^{\lambda t}$ ($\lambda > 0$)

$$Y_F(s) = G(s) \frac{1}{s+\lambda} = \frac{\tilde{a}_{11}}{s+p_1} + \frac{\tilde{a}_{12}}{(s+p_1)^2} + \dots + \frac{\tilde{a}_{21}}{s+p_2} + \dots + \frac{G(\lambda)}{s+\lambda} \quad \mathcal{L}^{-1}$$

$$y_F(t) = \underbrace{\tilde{a}_{11}e^{-p_1t} + \tilde{a}_{12}te^{-p_1t} + \dots + \tilde{a}_{21}e^{-p_2t} + \dots}_{y'_F(t)} + G(\lambda)e^{\lambda t}, \quad t \geq 0$$

$$y_F(t) = \underbrace{y'_F(t)}_{\substack{\downarrow t \rightarrow +\infty \\ 0}} + y_R(t)$$

- Stesse formule del caso C2αVI, cambiano solo i valori delle costanti a_{ij}

- $y_F(t)$ converge a $y_R(t)$ e la convergenza avviene nel modo in cui $y'_F(t)$ va a 0
- Le caratteristiche del transitorio dipendono esattamente dal comportamento di $y'_F(t)$ [$y'_F(t)$ è combinazione lineare dei modi propri]
- Il comportamento di $y'_F(t)$ è dettato dai **poli dominanti**

Non andiamo in dettaglio come per la risposta allo scalino, ma abbiamo gli strumenti per l'analisi macroscopica del suo andamento (conosciamo $y_R(t)$, T_a , $y_F(0^+)$, $\dot{y}_F(0^+)$,... e il transitorio è caratterizzato dai poli dominanti).