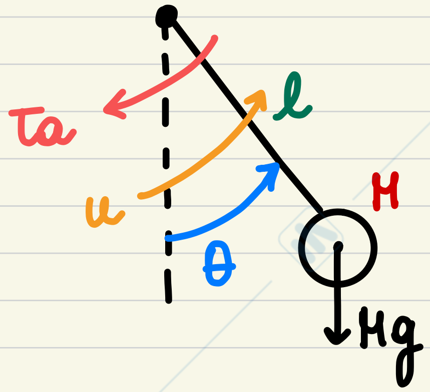
Si consideri il sistema dinamico riportato nella figura sottostante.



M = massa [kg]
l = lunghezza dell'asta a cui è sospesa la massa [m]
θ = angolo tra l'asta e la verticale [rad]
Ta = forza di attrito [N]
u = azione forzante [N]

Nell'ipotesi che la massa dell'asta a cui è sospesa la massa sia trascurabile, il momento di inerzia del pendolo è dato da $J = Ml^2$. Si supponga che il termine di dissipazione Ta sia proporzionale alla velocità angolare del pendolo, ossia

$$Ta(t) = K\dot{\theta}(t).$$

L'equazione che descrive la dinamica del pendolo è:

$$J\ddot{\theta}(t) = -Mgl\,sen(\theta(t)) - K\dot{\theta}(t) + u(t)$$

ossia
$$Ml^2\ddot{\theta}(t) = -Mgl\,sen(\theta(t)) - K\dot{\theta}(t) + u(t)$$

Si noti che questa equazione dipende sia dalla velocità che dall'accelerazione angolare.

Per ottenere un modello in spazio di stato dobbiamo in primo luogo scegliere il vettore di stato. Vista la dipendenza dell'equazione della dinamica da $\ddot{\theta}(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ una possibile scelta è:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

Sulla base di questa scelta, l'equazione della dinamica può essere esplicitamente riscritta come funzione dello stato come segue.

$$Ml^2 \frac{dx_2(t)}{dt} = -Mgl\,sen(x_1(t)) - Kx_2(t) + u(t)$$

Isolando la derivata si ottiene:

seconda eq. della dinamica $\quad \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} sen(x_1(t)) - \frac{K}{Ml^2} x_2(t) + \frac{u(t)}{Ml^2}$

Per come è stato definito lo stato si ha inoltre che: $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$. Quindi, nell'ipotesi di riuscire a misurare $\theta(t)$, le equazioni della dinamica del sistema sono:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} sen(x_1(t)) - \frac{K}{Ml^2} x_2(t) + \frac{u(t)}{Ml^2} \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Si noti che il sistema è nonlineare data la dipendenza dal $sen(x_1(t))$ della seconda equazione della dinamica (come evidenziato di seguito).

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} sen(x_1(t)) - \frac{K}{Ml^2} x_2(t) + \frac{u(t)}{Ml^2} \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Il sistema è quindi descritto come: $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$

dove $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $f(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} f_1(x(t), u(t)) \\ f_2(x(t), u(t)) \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ $\left. \begin{array}{l} f_1(x(t), u(t)) = x_2(t) \\ f_2(x(t), u(t)) = -\frac{g}{l} sen(x_1(t)) - \frac{K}{Ml^2} x_2(t) + \frac{u(t)}{Ml^2} \end{array} \right]$ derivate dalle equazioni di sistema

$\rightarrow$ $g(x(t), u(t)) = g(x(t)) = x_1(t)$

Nell'ipotesi che $\theta \in [0, \pi]$, cerchiamo adesso gli equilibri del sistema, ossia quelle coppie $(\bar{x}, \bar{u})$ tali per cui:

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$

Per trovare questi punti dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} f_1(\bar{x},\bar{u})=0 \\ f_2(\bar{x},\bar{u})=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{x}_2=0 \\ -\frac{g}{l}\,sen(\bar{x}_1)-\frac{K}{Ml^2}\bar{x}_2+\frac{\bar{u}}{Ml^2}=0 \end{cases}$$

Vediamo quindi che la seconda componente dello stato di equilibrio è sempre nulla (velocità nulla), mentre la prima componente dello stato di equilibrio dipende da $\bar{u}$ ed è la soluzione dell'equazione trigonometrica:

$$-\frac{g}{l}\,sen(\bar{x}_1)+\frac{\bar{u}}{Ml^2}=0 \rightarrow \bar{x}_1 = arcsen\left(\frac{\bar{u}}{Mgl}\right)$$

Si noti che una volta calcolata $\bar{x}_1$, siamo anche a conoscenza dell'uscita di equilibrio. Infatti sulla base delle equazioni della dinamica

$$y(t)=x_1(t)$$

e quindi $\bar{y}=\bar{x}_1$.

Consideriamo tre casi specifici per la scelta di $\bar{u}$.

- caso (a) $\rightarrow$ $\bar{u}=Mgl$

In questo caso : $\bar{x}_1=arcsen(1)=\pi/2$

Quindi il punto di equilibrio è dato da $(\bar{x},\bar{u})=\left(\begin{bmatrix}\pi/2\\0\end{bmatrix}, Mgl\right)$

Il pendolo è parallelo al suolo in quanto su di esso agisce una forza esterna che compensa l'effetto della forza peso.

- caso (b) $\rightarrow$ $\bar{u}=0$

In questo caso dobbiamo risolvere : $\bar{x}_1=arcsen(0)$.

Dato che $\theta\in[0,\pi]$, questa equazione ammette due soluzioni. Nello specifico:

(b1) $\bar{x}_1=0 \longrightarrow (\bar{x},\bar{u})=\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},0\right)$

(b2) $\bar{x}_1 = \pi \longrightarrow (\bar{x}, \bar{u}) = \left(\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \right)$

Si noti che entrambi i punti di equilibrio $\bar{x}$ dei casi (b1) e (b2) sono ottenuti quando la forzante è nulla. Ma:

- (b1) il pendolo è verticale con la massa rivolta verso il basso
  → per piccole perturbazioni mi aspetto di rimanere comunque vicino al punto di equilibrio e (per effetto dell'attrito) di ritornarci (equilibrio stabile)
- (b2) il pendolo è verticale con la massa rivolta verso l'alto
  → per piccole perturbazioni mi allontano dal punto di equilibrio e (data l'assenza di ingresso) mi aspetto di non tornarci (equilibrio instabile)

Nonostante siano ottenuti per la stessa $\bar{u}$ i due equilibri hanno caratteristiche diverse.

Cerchiamo ora i sistemi linearizzati negli intorni dei punti di equilibrio trovati (che sono una approssimazione del sistema nonlineare di partenza nell'intorno del punto di equilibrio)

Matematicamente il sistema linearizzato è definito come:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \delta y(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t) \end{cases}$$

con: $\delta x(t) = x(t) - \bar{x}$, $\delta u(t) = u(t) - \bar{u}$ e $\delta y(t) = y(t) - \bar{y}$ e

$$A = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{(\bar{x},\bar{u})}, \quad B = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{(\bar{x},\bar{u})},$$

$$C = \left.\left[\frac{\partial g(x,u)}{\partial x_1}, \ \frac{\partial g(x,u)}{\partial x_2} \right]\right|_{(\bar{x},\bar{u})}, \quad D = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})}$$

Guardando il sistema si vede che g non dipende da u → D = 0 in qualsiasi caso (il sistema è strettamente proprio) $\frac{\partial g(x,u)}{\partial u} = \frac{\partial (x_1(t))}{\partial u} = 0$

Guardando l'equazione di uscita

$$y(t) = x_1(t)$$

si nota che questa è già lineare nello stato. Quindi non è necessario calcolare C come da definizione ma possiamo direttamente dire:

$$C = [\,1 \quad 0\,]$$

Guardando le equazioni della dinamica dello stato, si nota inoltre che tali equazioni dipendono linearmente dall'ingresso. Siamo quindi in grado di ricavare B come:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/Ml^2 \end{bmatrix} \begin{cases} \dfrac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} = 0 \quad \text{dato che } \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\[2ex] \dfrac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} = \dfrac{1}{Ml^2} \quad \text{dato che } \dot{x}_2(t) = -\dfrac{g}{l}\,\mathrm{sen}(x_1(t)) - \dfrac{k}{Ml^2}x_2(t) + \dfrac{u(t)}{Ml^2} \end{cases}$$

Dobbiamo solo trovare la matrice A. Si noti anche in questo caso che alcuni elementi sono comuni a tutte le matrici. Infatti:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} &= 1 \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} &= -\frac{k}{Ml^2} \end{aligned}\right\} \text{indipendentemente dal valore dell'equilibrio}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \star & -\dfrac{k}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

l'elemento in posizione (2,1) varia al variare dell'equilibrio

Infatti: $\dfrac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} = -\dfrac{g}{l}\cos(x_1(t))$

Quindi:

- caso (a) $(\bar{x},\bar{u}) = \left(\begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix}, Mgl\right) \rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -k/Ml^2 \end{bmatrix}$
- caso (b1) $(\bar{x},\bar{u}) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0\right) \rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & -\dfrac{k}{Ml^2} \end{bmatrix}$
- caso (b2) $(\bar{x},\bar{u}) = \left(\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}, 0\right) \rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{l} & -\dfrac{k}{Ml^2} \end{bmatrix}$

I modelli linearizzati ottenuti sono quindi:

• Caso (a)

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k}{Ml^2} \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta u(t) \\ \delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \delta x(t) \end{cases}$$

• caso (b1)

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -k/Ml^2 \end{bmatrix} \delta x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta u(t) \\ \delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \delta x(t) \end{cases}$$

• caso (b2)

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/l & -k/Ml^2 \end{bmatrix} \delta x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta u(t) \\ \delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \delta x(t) \end{cases}$$

Si noti che il caso (b1) e (b2) (nonostante $\bar{u} = 0$ per entrambi) hanno caratteristiche diverse. In particolare sono diverse le matrici A del sistema linearizzato. (intuitivamente, questa differenza è legata alle diverse caratteristiche degli EQUILIBRI in termini di stabilità)