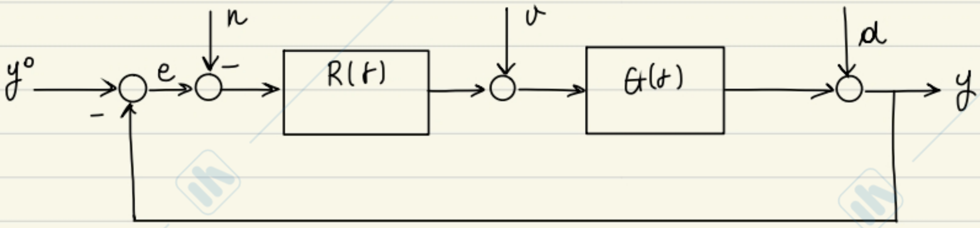
Esercizio 1



Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove

$$G(s) = \frac{10(1+0.02s)}{1+20s} \qquad P=0, \quad \mu_L = 0$$

(1) Progettare $R(s)$ in modo che: SPECIFICHE STATICHE
   (a) $|e_{\infty y^o}| = 0$ per $y^o(t) = sca(t)$
   (b) $|e_{\infty d}| \leq 0.1$ per $d(t) = \sin(\bar{\omega} t)$ con $\bar{\omega} \in [0.05, 1]$ rad/s
   (c) $\omega_c \geq 10$ rad/s — SPECIFICHE DINAMICHE
   (d) $\varphi_m \geq 60°$

(2) Dire quanto vale l'ampiezza a regime di $y(t)$ quando
$$y^o(t) = 2 + 10\sin(t) + 5\sin(100t)$$

(1)

Per trovare un regolatore $R(s)$ che permetta di soddisfare le specifiche (a)-(d) definiamo $R(s)$ come:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s)$$

dove
- $R_1(s)$ è utilizzato per soddisfare le specifiche statiche (progetto statico) a) b)
- $R_2(s)$ è utilizzato per soddisfare le specifiche dinamiche e per la stabilizzazione in anello chiuso (progetto dinamico e stabilizzazione) c) d)

Cominciamo con il progetto statico, considerando $R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^{g_R}}$. Si noti che questa parte del regolatore va ad agire sul guadagno di $L(s)$ e sul numero di poli in zero.

Sulla base di questa scelta si ricorda che $R_2(s)$ sarà:
- di tipo 0
- a guadagno unitario ($R_2(0) = 1$)

Assumendo che $R(s)$ sia progettata correttamente, in modo tale da stabilizzare il sistema si noti che:

$$L(s) = R(s)G(s) = \underbrace{\boxed{\frac{\mu_R}{s^{g_R}}}}_{R_1} \cancel{R_2(s)}^{\,1} \frac{10(1+0.02s)}{1+20s} \xrightarrow{s\to 0} L(0) \to \frac{\mu_R 10}{s^{g_R}} = \frac{\mu_L}{s^{g_R}}$$

Sempre nell'ipotesi che $R(s)$ stabilizzi il sistema retroazionato possiamo quindi applicare il teorema del valore finale per trovare $e_{\infty y^o}$.

TVF $\quad e_{\infty y^o} = \lim_{s\to 0} sEy^o(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot S(s) \frac{1}{\cancel{s}} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+L(s)} \simeq \lim_{s\to 0} \frac{s^{g_R}}{s^{g_R}+\mu_L}$

La specifica $|e_{\infty} y^{o}| = 0$ (a) è quindi verificata se e solo se $\boxed{g_R \geq 1}$.

Per capire le condizioni che devono essere verificate per soddisfare la condizione (b), applichiamo il teorema della risposta in frequenza, sempre nell'ipotesi che $R(s)$ sia progettato in modo tale da stabilizzare il sistema retroazionato.

sempre nell'ipotesi che il sist. retroaz. sia poi as. stab.

$\rightarrow E_d(s) = -S(s)D(s)$

Si ottiene così: $|e_{\infty d}| = \underbrace{\left| \dfrac{1}{1+L(j\bar{\omega})} \right|}$, $\bar{\omega} \in [0.05, 1] \ \frac{rad}{s}$

ampiezza della sinusoide $e_d(t)$, considerando che $d(t) = \sin(\bar{\omega} t)$

$e_{\infty d}(t) = |S(j\bar{\omega})| \sin(\bar{\omega} t + \angle S(j\bar{\omega}))$

Sapendo che $\omega_c \geq 10 \ \frac{rad}{s}$ (specifica (c)) notiamo che $\bar{\omega} << \omega_c$ e quindi, dato che

prendiamo questa

$$|S(j\omega)| = \begin{cases} |L(j\omega)|^{-1} & \omega << \omega_c \\ 1 & \omega >> \omega_c \end{cases}$$

$\rightarrow$ Per sapere quale approx. prendere guardiamo la specifica c)

Allora $|e_{\infty d}| \simeq |L(j\bar{\omega})|^{-1}$.

Dalla specifica (b) sappiamo che $|e_{\infty d}| \leq 0.1$ e quindi:

troviamo una cond. su L

$$|L(j\bar{\omega})|^{-1} \leq 0.1 \rightarrow |L(j\bar{\omega})| \geq 10$$

Convertendo la relazione in decibel otteniamo infine: $|L(j\bar{\omega})|_{dB} \geq 20 \ dB \quad \bar{\omega} \in [0.05, 1] \ \frac{rad}{s}$

Si noti che abbiamo ottenuto un vincolo nel progetto dinamico imponendo il comportamento a regime (statico) desiderato.

Visti i risultati ottenuti possiamo imporre: $R_1(s) = \dfrac{1}{s}$ (così che $g_R \geq 1$)

$R_1(s) = \dfrac{\mu_R}{s} \rightarrow \mu_R = 1$

Procediamo quindi al progetto di $R_2(s)$ utilizzando la sintesi per tentativi. Prima di fare questo analizziamo però $L_1(s) = R_1(s)G(s)$ (corrisponde ad $L(s)$ se $R_2(s) = 1$)

$$L_1(s) = \frac{10(1+0.02s)}{s(1+20s)}$$

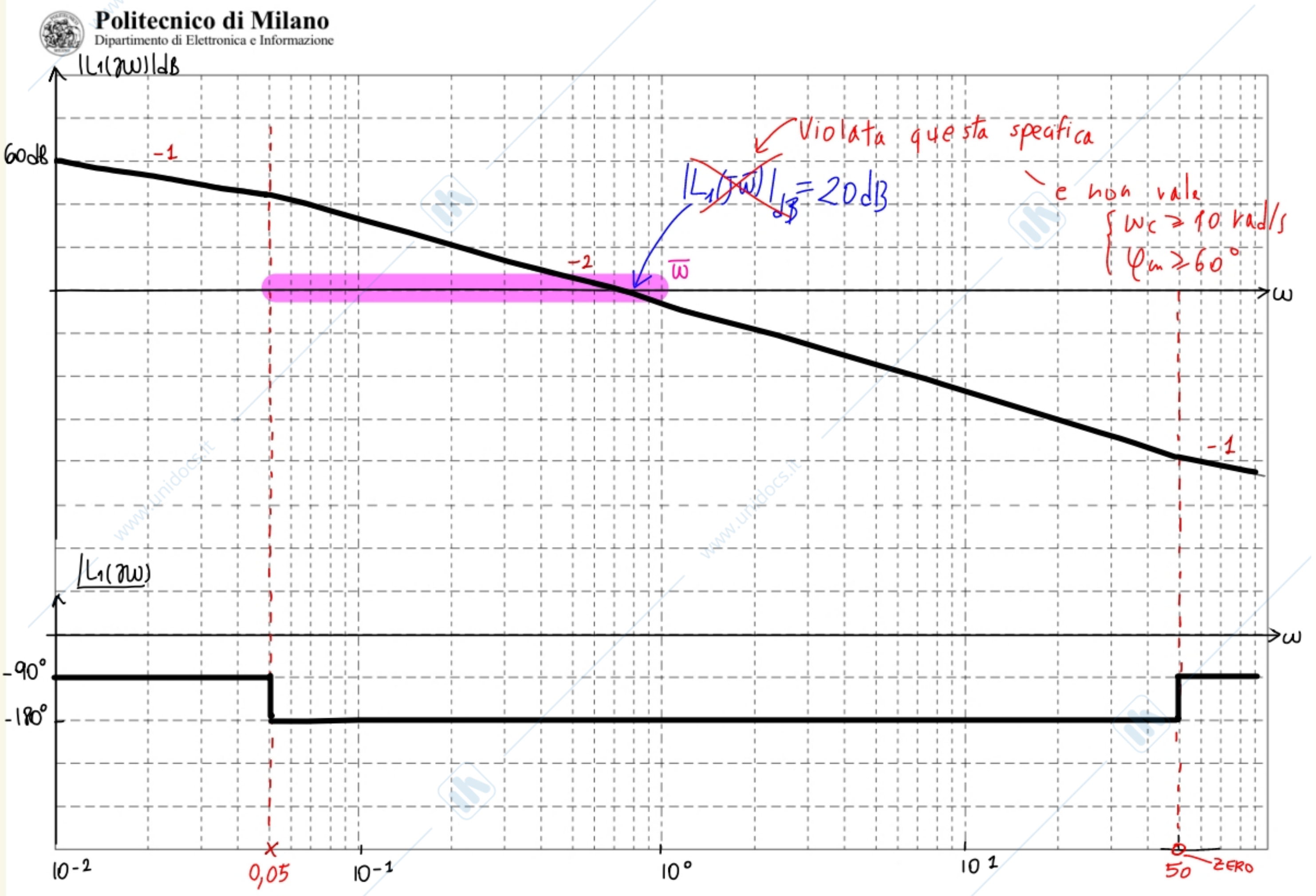
La funzione di trasferimento:

- è di tipo $g = 1$
- ha guadagno generalizzato $\mu = 10 \leftarrow \mu_G$
- ha un polo in $p = -0.05$ (stabile)
- ha uno zero in $z = -50$ (stabile)

Tracciando il diagramma di Bode a partire da $\omega = 10^{-2}$ rad/s si ha:

$$|L_1(j10^{-2})|_{dB} \simeq 20 \log|10| - 20 \log|10^{-2}| = 20 + 40 = 60 \ dB$$

SCELTA ARBITRARIA



Si nota quindi che:

- $\omega_c \simeq 0.7$ rad/s
- $\varphi_m > 0°$ (mi aspetto che $\angle L_1(j\omega_c)$ sia leggermente sopra 0°)
- $|L(j\bar{\omega})|_{dB} \in [-5, 45]$ dB (in prima approssimazione)

} non si verificano le altre specifiche.

ma se scegliamo $L(s)$ in questo modo

Se scegliessi $R(s)$ tale che $L(s) = \frac{10}{s}$ allora avrei una funzione di anello tale che:

Verifica a-b-c-d

$|L(j\omega_c)| = 1 \rightarrow \left|\frac{10}{j\omega_c}\right| = 1 \Rightarrow \omega_c = 10 \frac{rad}{s}$ (verifico (c))

$$\begin{cases} |L(j0.05)| = \left|\frac{10}{j0.05}\right| = 200 \geq 10 \\ |L(j1)| = \left|\frac{10}{j1}\right| = 10 \geq 10 \end{cases}$$

→ verificando la condizione derivata da (b)

Inoltre dato che $\angle L(j\omega) = -90° \ \forall \omega$, il margine di fase $\varphi_m \geq 60°$ verificando (d)

$\angle L(j\omega) = \angle \mu - \angle j\omega = -90°$

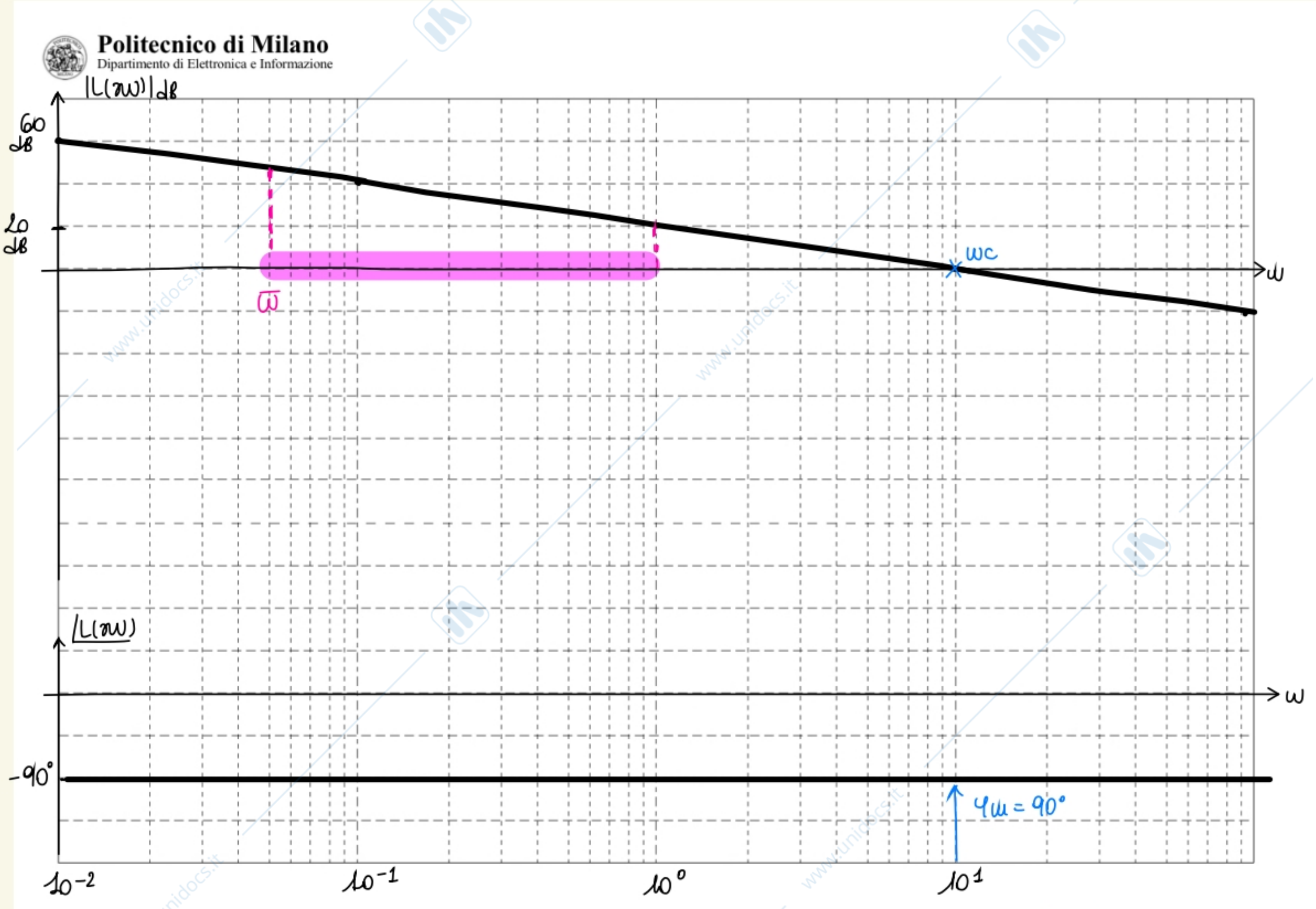
→ Il nostro obiettivo diventa quindi scegliere $R_2(s)$ tale che: Vogliamo $L(s) = \frac{10}{s}$ $\quad L_1(s) = \frac{G(s)}{s}$

$$L = L_1 R_2 \leftarrow R_2 = \frac{L}{L_1}$$

$$L(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{10}{s}$$

$$\rightarrow \quad R_2(s)\,\frac{10}{s}\,\frac{(1+0.02s)}{1+20s} = \frac{10}{s} \quad \Rightarrow \quad R_2(s) = \frac{\cancel{10}}{\cancel{s}}\;\frac{s(1+20s)}{10(1+0.02s)}$$

$R_2(s)$ cancella la dinamica di $G(s)$ (lo possiamo fare perché $G(s)$ è a fase minima)



Nota: $|L(j10^{-2})|_{dB} = 20\log|10| - 20\log|10^{-2}| = 20+40 = 60\ dB$

(2) Per il principio di sovrapposizione degli effetti (poiché lineare): $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$

Vogliamo capire l'uscita rispetto ai 3 ingressi

dove:

- $y_1(t)$: uscita legata a $y^\circ_1(t) = 2\,sca(t)$ (a)
- $y_2(t)$: uscita legata a $y^\circ_2(t) = 10\sin(t)$ (b)
- $y_3(t)$: uscita legata a $y^\circ_3(t) = 5\sin(100t)$ (c)

poiché abbiamo progettato $R(s)$ x inseguire lo scalino
↳ senza fare calcoli $\rightarrow y_{1\infty} = 2$

(a) sulla base della 1° specifica di progetto $|e_\infty y^\circ| = 0$ e quindi ci aspetto che $y_{\infty 1} = 2$. Questo può essere verificato sia sulla base del principio del modello interno ($L(s)$ ha il modello dello scalino ed è tale per cui $F(s)$ ha guadagno unitario) o applicando il teorema del valore finale.

TVF $\quad y_{\infty 1} = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\, F(s)\,\frac{2}{\cancel{s}} = \lim_{s\to 0} 2\,\frac{L(s)}{1+L(s)} = \lim_{s\to 0} 2\,\frac{10}{s+10} = 2$

Per trovare $y_{\infty 2}$ ed $y_{\infty 3}$ consideriamo l'approssimazione:

$$|F(jw)| \simeq \begin{cases} |L(jw)| & w >> wc \\ 1 & w << wc \end{cases}$$

(b) Dato che $w = 1$ allora $w << wc$ (con $wc = 10$ rad/s) e quindi, sulla base del teorema della risposta in frequenza possiamo affermare che:

$$|y_{\infty 2}| \leq 10\,|F(jw)| = 10$$

(c) Dato che $w = 100$ allora $w >> wc$ (con $wc = 10$ rad/s) e quindi, sulla base del teorema della risposta in frequenza possiamo affermare che:

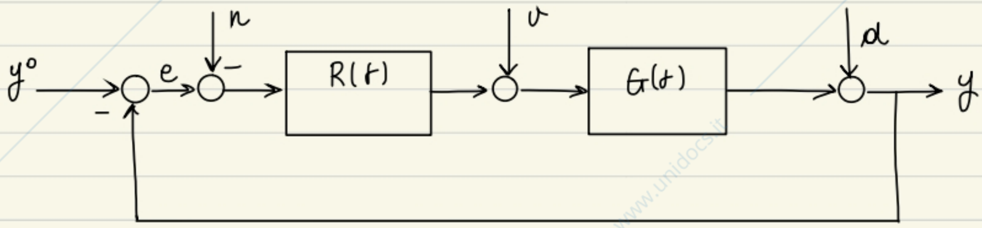
$$|y_{\infty 3}| \leq 5\,|F(jw)| \simeq 5\,|L(jw)|$$

Ma, guardando i diagrammi di Bode di $L(jw)$ si nota che: $|L(j100)|_{dB} \simeq -20\,dB$

$\rightarrow |y_{\infty 3}| \leq 0.5$

Si ottiene quindi che: $|y_\infty| \leq 2 + 10 + 0.5 = 12.5$

Esercizio 2



Si considera il sistema retroazionato in figura, dove

$$G(s) = 0.1\,\frac{(1+s)}{(1+10s)(1+0.1s)}$$

(1) Progettare $R(s)$ in modo che:

(a) $s\% \leq 30\%$

(b) $T_{a1} \leq 10s$

(c) $|e_\infty| \leq 0.1$ per $y^o(t) = sca(t)$ e $d(t) = \pm 2\,sca(t)$

(d) Reiezione di $d(t)$ nella banda $\overline{w} \in [0.01, 0.1]$ rad/s di almeno 20 dB

(e) Reiezione di $n(t)$ nella banda $\overline{w} \in [10, 100]$ rad/s di almeno 20 dB

In primo luogo facciamo il progetto statico, imponendo la condizione (c) con l'introduzione di $R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^{g_R}}$.

Dato che $G(s)$ è di tipo 0, questo significa che per $s \to 0$ si ha $L(s) \simeq \frac{0.1\mu_R}{s^{g_R}}$.

Supponendo che $R_2(s)$ tale che $R(s) = R_1(s)R_2(s)$ sia (i) stabilizzante, (ii) di tipo 0 e (iii) a guadagno unitario, applichiamo il teorema del valore finale per il calcolo di e_∞, con:

$$e_\infty = e_{\infty y^o} + e_{\infty d}$$ (principio di sovrapposizione degli effetti)

$$e_{\infty y^o} = \lim_{s \to 0} s\, S(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1+L(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{s^{g_R}}{0.1\mu_R + s^{g_R}} \begin{cases} \to 0 & \text{se } g_R \geq 1 \\ \to \frac{1}{1+0.1\mu_R} & \text{se } g_R = 0 \end{cases}$$

→ possiamo accettarlo poiché non ci è stato chiesto un errore pari a $\emptyset$

$$e_{\infty d} = \lim_{s \to 0} s(-S(s)) \pm \frac{2}{s} = \lim_{s \to 0} \pm 2 \frac{s^{g_R}}{0.1\mu_R + s^{g_R}} \begin{cases} \to 0 & \text{se } g_R \geq 1 \\ \to \frac{\pm 2}{1+0.1\mu_R} & \text{se } g_R = 0 \end{cases}$$

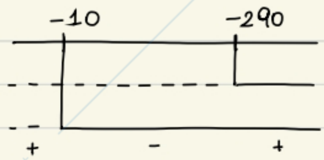
Quindi se:

- $g_R \geq 1$ allora $e_{\infty y^o} = 0$, $e_{\infty d} = 0$ e quindi $e_\infty = 0$ (verificando la specifica (c))
- $g_R = 0$ allora $|e_{\infty y^o}| = \frac{1}{1+0.1\mu_R}$ e $|e_{\infty d}| = \frac{2}{1+0.1\mu_R}$. Quindi, affinché sia verificata la specifica:

$$\frac{1}{1+0.1\mu_R} + \frac{2}{1+0.1\mu_R} \leq 0.1 \to \frac{0.1(1+0.1\mu_R) - 3}{1+0.1\mu_R} \geq 0$$

N>0 $\quad 0.1 + 0.01\mu_R - 3 \geq 0 \to 0.01\mu_R - 2.9 \geq 0 \to \mu_R \geq 290$

D>0 $\quad 0.1\mu_R + 1 > 0 \to \mu_R > -10$



$\to \mu_R \geq 290$

Quindi:

- $g_R = 0$ allora $R_1(s) = 1000$ (convenzionalmente si sceglie $\mu_R \in [2,5]\,\mu_{R\,min}$)
- $g_R \geq 1$ allora $R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$ (non abbiamo condizioni sul guadagno)

Consideriamo ora le specifiche (d) ed (e).

(d) $E_d(s) = -S(s)D(s)$

Applicando il teorema della risposta in frequenza (nell'assunzione che $R(s)$ stabilizzi il sistema in retroazione) abbiamo:

$$e_{\infty d}(t) = A|S(j\omega)| \sin(\omega t + \angle -S(j\omega))$$

Quindi, per avere reiezione del disturbo di almeno 20 dB per $\bar{\omega} \in [0.01, 0.1]$ rad/s dobbiamo verificare che:

$$|S(j\bar{\omega})|_{dB} \leq -20\,dB$$

Per imporre questa condizione possiamo sfruttare l'approssimazione:

$$|S(j\omega)| \simeq \begin{cases} |L(j\omega)|^{-1} & \omega \ll \omega_c \\ 1 & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

Allora la specifica (d) è verificata se:

- $\bar{\omega} \ll \omega_c$ $\quad |S(j\bar{\omega})|_{dB} = (|L(j\bar{\omega})|^{-1})_{dB} = -|L(j\bar{\omega})|_{dB} \leq -20\ dB$

$\rightarrow$ $|L(j\bar{\omega})|_{dB} \geq 20\ dB$ (ottenendo così delle specifiche sulla $L(t)$)

se $\bar{\omega} \gg \omega_c$ allora $|S(j\bar{\omega})|_{dB} \simeq 0\ dB$ NON verificando la specifica.

$\rightarrow$ dovremmo imporre $\omega_c \gg \bar{\omega}$ e quindi $\omega_c \gg 0.1$ rad/s

(e) $E_n(f) = F(t)N(t)$

Applicando il teorema della risposta in frequenza (nell'ipotesi che $R(t)$ sia stabilizzante), abbiamo:

$$e_{con}(t) = A|F(j\omega)| \sin(\omega t + \angle F(j\omega))$$

Affinché il disturbo sia reiettato di almeno $-20\ dB$ per $\bar{\omega} \in [10, 100]$ rad/s deve essere verificato che:

Pulsazione + grande rispetto al caso precedente

$$|F(j\bar{\omega})|_{dB} \leq -20\ dB$$

come prima per imporre questa condizione sfruttiamo l'approssimazione:

$$|F(j\omega)| \simeq \begin{cases} |L(j\omega)| & \omega \gg \omega_c \\ 1 & \omega \ll \omega_c \end{cases}$$

Di conseguenza, se $\bar{\omega} \ll \omega_c$, la condizione di reiezione NON è mai verificata (dato che $|F(j\bar{\omega})|_{dB} \simeq 0\ dB$) mentre:

- $\bar{\omega} \gg \omega_c$ $\quad |F(j\bar{\omega})|_{dB} = |L(j\bar{\omega})|_{dB} \rightarrow |L(j\bar{\omega})|_{dB} \leq -20\ dB$ (ottenendo così una specifica su $L(t)$)

$\rightarrow$ Affinché tale specifica sia soddisfatta deve valere $\omega_c \ll \bar{\omega}$ e quindi $\omega_c \ll 10\ \frac{rad}{s}$.

Nota: se invece di avere specifiche legate all'errore su $d(t)$ avessimo avuto delle specifiche statiche su $u(t)$ allora avremmo potuto procedere in modo analogo a quanto fatto in precedenza ma considerando la funzione di sensitività al controllo

$$Q(t) = \frac{R(t)}{1 + L(t)}.$$

A differenza del caso precedente si ha una dipendenza diretta da $R(t)$. Se la specifica riguardasse riferimenti sinusoidali allora potremmo sfruttare:

$$|Q(j\omega)| \simeq \begin{cases} |G(j\omega)|^{-1} & \omega \ll \omega_c \\ |R(j\omega)| & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

che porta ad imporre direttamente condizioni su $|R(j\omega)|$ se $\omega \gg \omega_c$ o a condizioni che dovranno essere già verificate dal processo $G(t)$ per $\omega \ll \omega_c$.

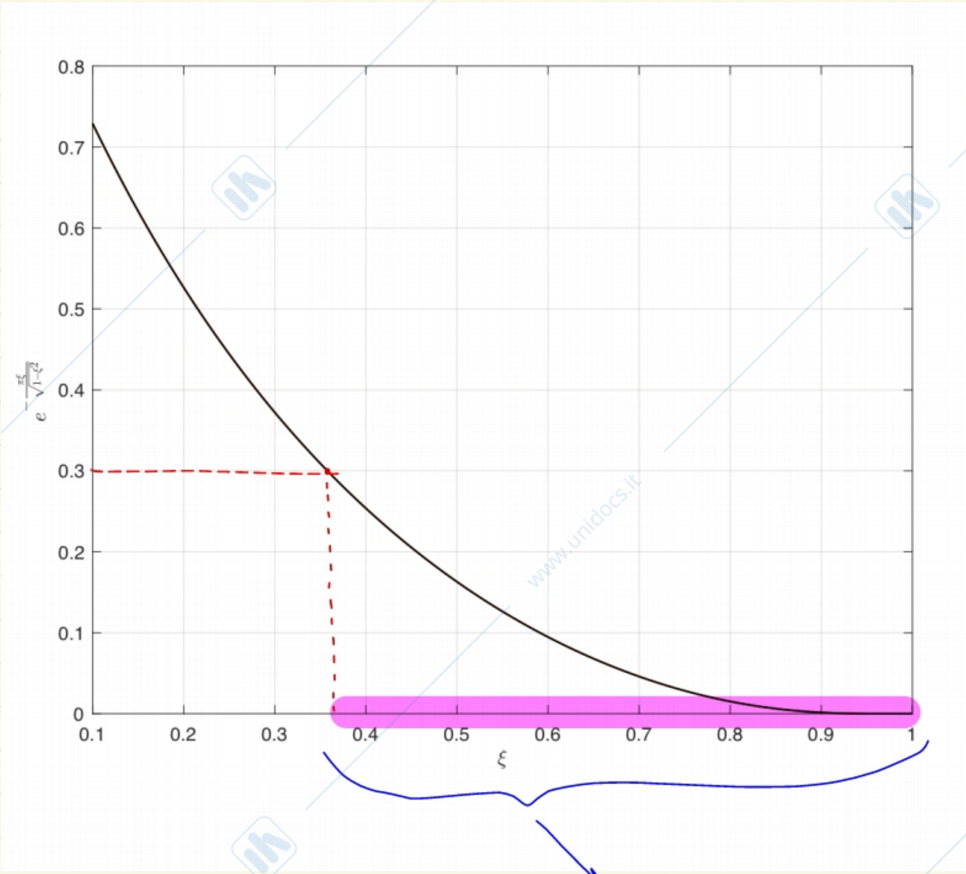
non introduce l'inseguimento perfetto del gradino, poiché non è richiesto

Imponendo $R_1(t) = 1000$, procediamo quindi con il progetto dinamico, traducendo le specifiche (a)-(b) in specifiche in $L(t)$.

$(\varphi_m \leq 75°)$

(a) $S\% \leq 30\% \rightarrow e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \leq 0.3$

prendiamo la specifica sulla sovraelongazione



Come si vede dal grafico questa specifica è verificata per $\xi \geq 0.35$. Dato che:

$\hookrightarrow \xi = \frac{\varphi_m}{100}$

allora $\boxed{\varphi_m \geq 35°}$

$T_{ass} \leq 10s$

Per quanto riguarda la specifica (b), per convertirla in specifica su L consideriamo due casi:

- $\varphi_m > 75°$ $\quad T_{ass} \cong \frac{5}{\omega_c} \rightarrow \frac{5}{\omega_c} \leq 10 \rightarrow \omega_c \geq 0.5 \ \frac{rad}{s}$ (verifica le specifiche trovate imponendo la reiezione dei disturbi)
- $\varphi_m \leq 75°$ $\quad T_{ass} \cong \frac{5}{\xi \omega_c} \rightarrow \frac{5}{\xi \omega_c} = \frac{5 \cdot 100}{\varphi_m \omega_c} \leq 10 \rightarrow \varphi_m \omega_c \geq 50$

Cominciamo con la sintesi per tentativi:

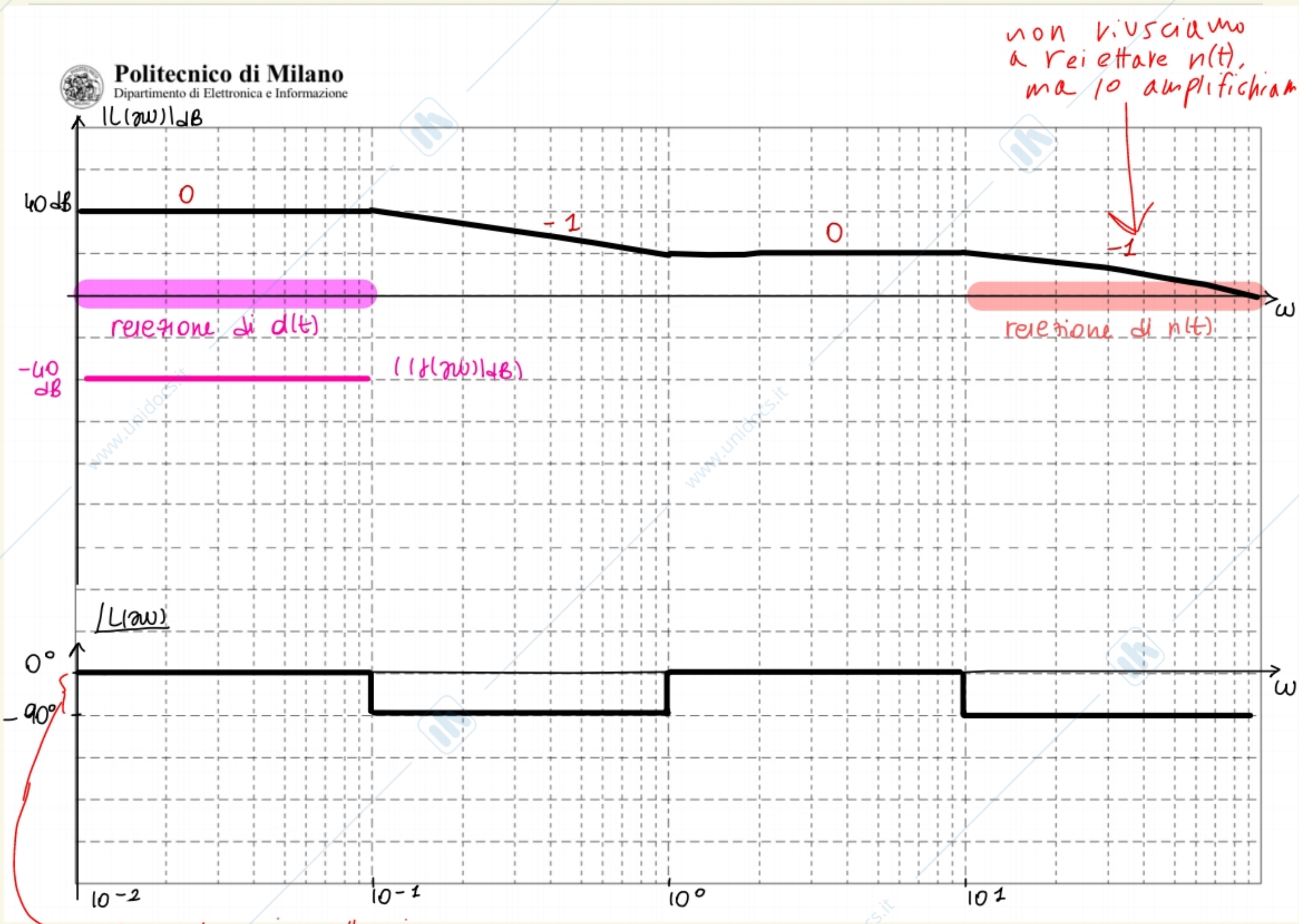
(a) $R(s) = R_1(s) = 1000 \rightarrow$ (Prendiamo $R_2(s) = 1$)

così che $L(s) = 100 \dfrac{(1+s)}{(1+0.1s)(1+10s)}$

la $L(s)$ così ottenuta:

- è di tipo $g = 0$
- ha guadagno $\mu = 100$
- ha uno zero $z = -1$

• ha 2 poli $p_1 = -0.1$, $p_2 = -10$



→ non va mai sotto i $-90°$ ⟶ $\varphi_m \geq 75°$

Nonostante il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile (criterio della piccola fase), $\varphi_m \geq 90°$; $\omega_c \geq 0.5\ \frac{rad}{s}$ (in quanto $\omega_c \cong 100\ rad/s$) ed il disturbo $d(t)$ venga reiettato correttamente, il disturbo $n(t)$ non è reiettato correttamente.

(b) Il disturbo verrebbe reiettato correttamente se la $L(s)$ avesse un polo in $p=-1$ e lo zero in -10, invece dello zero in -1 ed il polo in $p=-10$, ossia se:

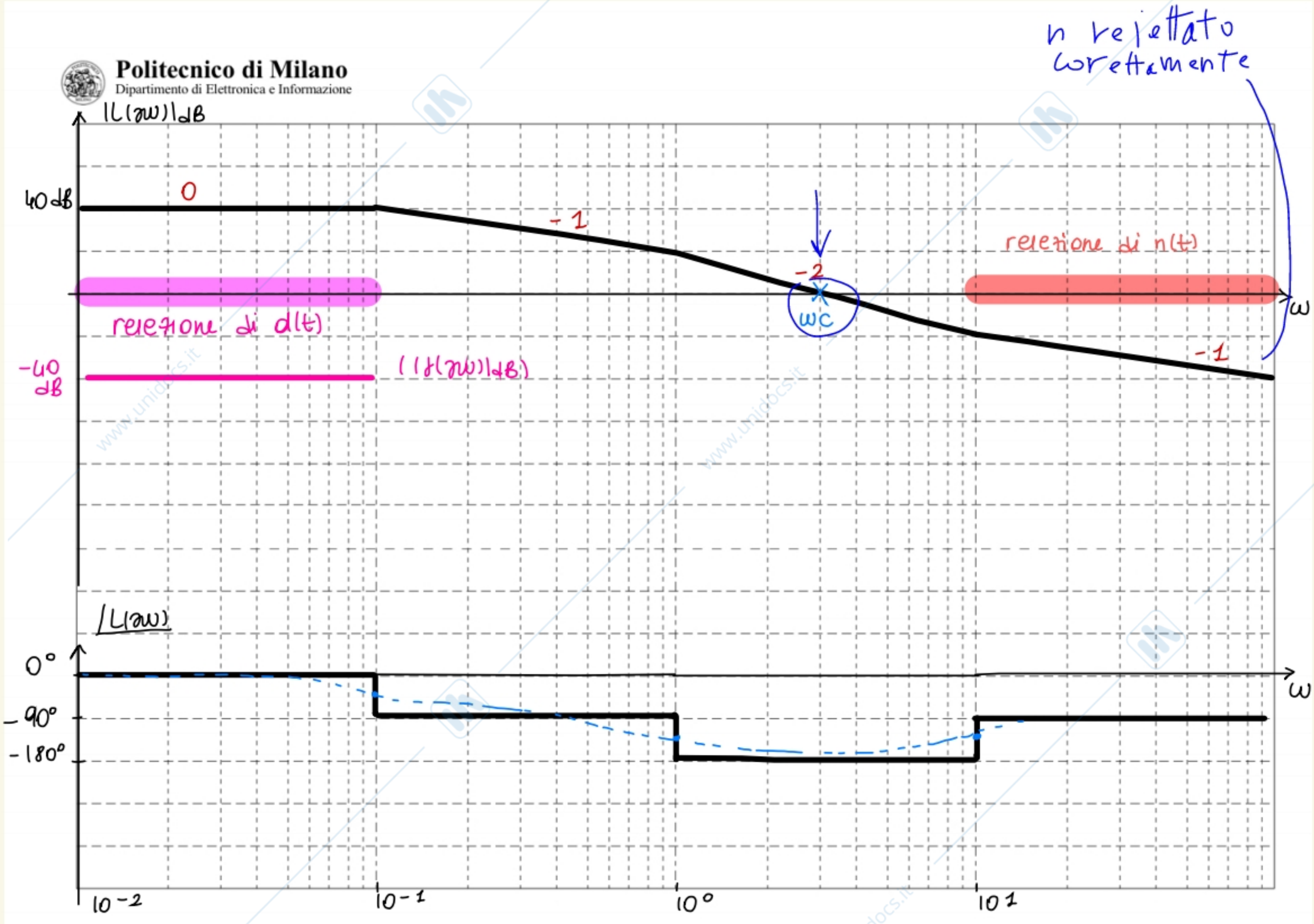
$$L(s) = 100 \frac{(1+0.1s)}{(1+s)(1+10s)}$$

Infatti, come si nota dal diagramma di Bode sottostante:

- $\omega_c \simeq 3\ rad/s$
- $\varphi_m = 180° - \angle 1+j0.1\omega_c - \angle 1+j\omega_c - \angle 1+j10\omega_c \simeq 37° \geq 35°$ ✓ } $\varphi_m \omega_c = 105 > 50$ ✓
- $d(t)$ è correttamente reiettato
- $n(t)$ è correttamente reiettato

→ $R(s) = L(s)/G(s) = \frac{100(1+0.1s)}{(1+s)(1+10s)} \cdot \frac{(1+10s)(1+0.1s)}{0.1(1+s)} = 1000 \frac{(1+0.1s)^2}{(1+s)^2}$

Per trovare R(s) siamo andati ad agire sulla parte della L(s) che non rispettava le specifiche, lasciando invariato il resto.



Nota: lo spostamento del polo e dello zero fa abbattere il margine di fase

(c) Per evitare la diminuzione del margine di fase potevamo scegliere, in alternativa:

$$L(s) = 100 \cdot \frac{1}{1+100s}$$

potevamo anche semplicemente togliere lo zero

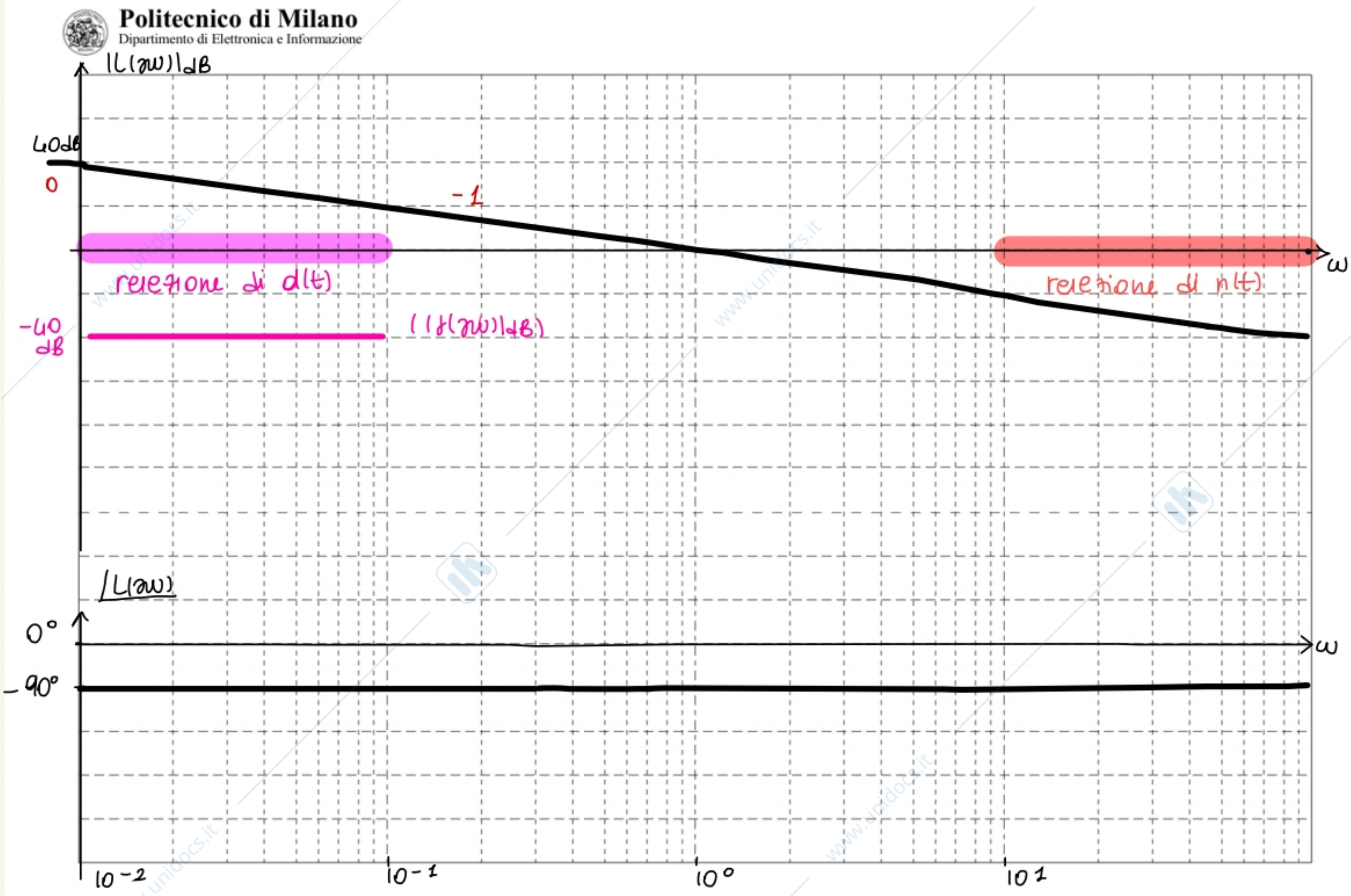
Con questa scelta, il sistema in retroazione è comunque stabile (criterio della piccola fase) e (come si vede dal diagramma di Bode sottostante)

- $\omega_c \simeq 1$ rad/s } $\omega_c \geq 0.5$ rad/s
- $\varphi_m \geq 90°$
- d(t) è correttamente reiettato
- n(t) è correttamente reiettato

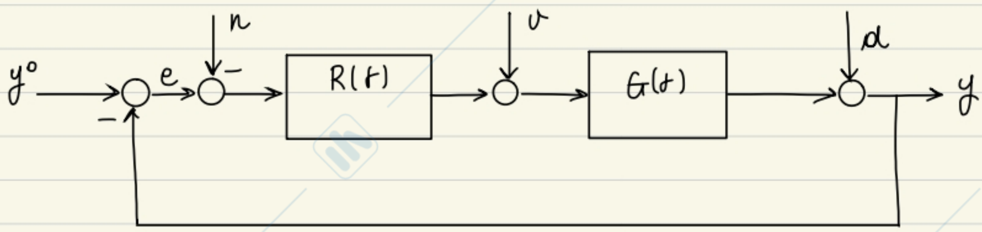
→ $R(s) = L(s)/G(s) = 100 \, \frac{1}{(1+100s)} \cdot \frac{(1+10s)(1+0.1s)}{0.1\,(1+s)} = \underset{R1(s)}{1000} \, \frac{(1+10s)(1+0.1s)}{(1+100s)(1+s)}$

Si noti che tra $R(s)$ e $G(s)$ ci sono delle cancellazioni che, non essendo critiche, non danno problemi.

Si noti che ci sono delle soluzioni anche più semplici. come scegliere $R(s)$ tale che $L(s) = \frac{1}{s}$.
Questo porta a: $\omega_c \simeq 1$ rad/s, $\varphi_m \geq 90°$ e reiezione di entrambi i disturbi.



Esercizio 3



Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove

$$G(s) = \frac{10}{s+1} e^{-0.1s}$$

(1) Progettare $R(s)$ in modo che:

(a) $|e_\infty| < 0.1$ per $y^o(t) = sca(t)$

(b) $\omega_c \geq 0.5$ rad/s
(c) $\varphi_m \geq 60°$

Procediamo in primo luogo con il progetto di $R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^{g_R}}$ per soddisfare le specifiche statiche.

In particolare, ci concentriamo sulla specifica (a).
$E(s) = S(s)\, y^o(s) \longrightarrow E(s) = \frac{1}{1+L(s)}\, y^o(s)$

Assumendo che $R(s)$ stabilizzi il sistema retroazionato e, come nei casi precedenti, notando che $G(0) = 10$ e che $R_2(s)$ sarà di tipo 0 e a guadagno unitario abbiamo che
$$s \to 0 \quad \text{allora} \quad L(s) \longrightarrow \frac{10\mu_R}{s^{g_R}}$$

Applichiamo quindi il teorema del valore finale:
TVF $e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{10\mu_R}{s^{g_R}}} = \lim_{s\to 0} \frac{s^{g_R}}{s^{g_R}+10\mu_R} = \begin{cases} 0 & \text{se } g_R \geq 1 \\ \frac{1}{1+10\mu_R} & \text{se } g_R = 0 \end{cases}$

- se $g_R \geq 1$ la specifica è verificata $\forall \mu_R$
- se $g_R = 0$ la specifica è verificata se $\frac{1}{1+10\mu_R} < 0.1$, ossia:

$$0.1 + \mu_R > 1 \rightarrow \mu_R > 0.9$$

Scegliendo $g_R = 0$, pongo $\mu_R = 1$ e comincio con il progetto dinamico.

(a) Inizialmente scelgo $R_2(s) = 1$ così che: $L(s) = R_1(s)G(s) = G(s)$
Guardando il diagramma di Bode in Figura 1 si può notare come:
$\omega_c \cong 10$ rad/s (verificando la specifica (b)), mentre per verificare la specifica (c) dobbiamo calcolare il valore di φ_c (che non possiamo dedurre dal diagramma di Bode, per la presenza del ritardo).

$\rightarrow \varphi_c = \underline{/G(j\omega_c)} = -\mathrm{atg}(\omega_c) - \omega_c \cdot 0.1 \cdot \frac{180°}{\pi} = -\mathrm{atg}(10) - \frac{180°}{\pi} \cong -141.6°$

Quindi: $\varphi_m = 180° - |\varphi_c| = 38.4 < 60°$, non verificando la specifica (b)

Dato che l'effetto del ritardo è tanto maggiore (nel margine di fase) quanto ω_c cresce, il nostro obiettivo è quindi abbattere la pulsazione di attraversamento ω_c.

(b) Per raggiungere questo obiettivo possiamo progettare $R(s)$ tale che $L(s)$ abbia la forma:
$$L(s) = \frac{10}{1+10s}\, e^{-0.1s}$$

Rispetto al diagramma di Bode in Figura 1, la $L(s)$ ha lo stesso andamento, ma è "shiftato" indietro di una decade, come mostrato in Figura 2.

Figura 1

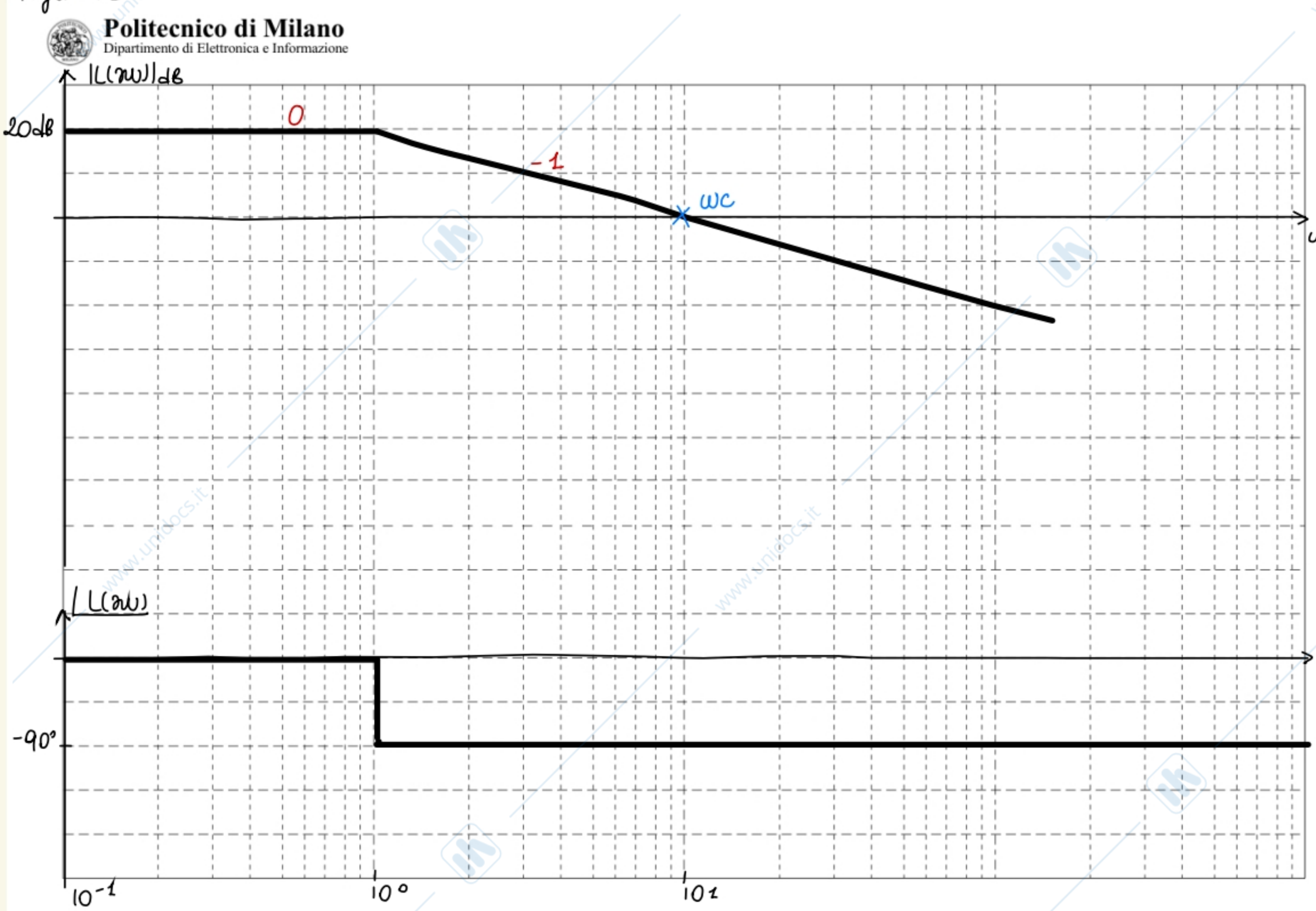
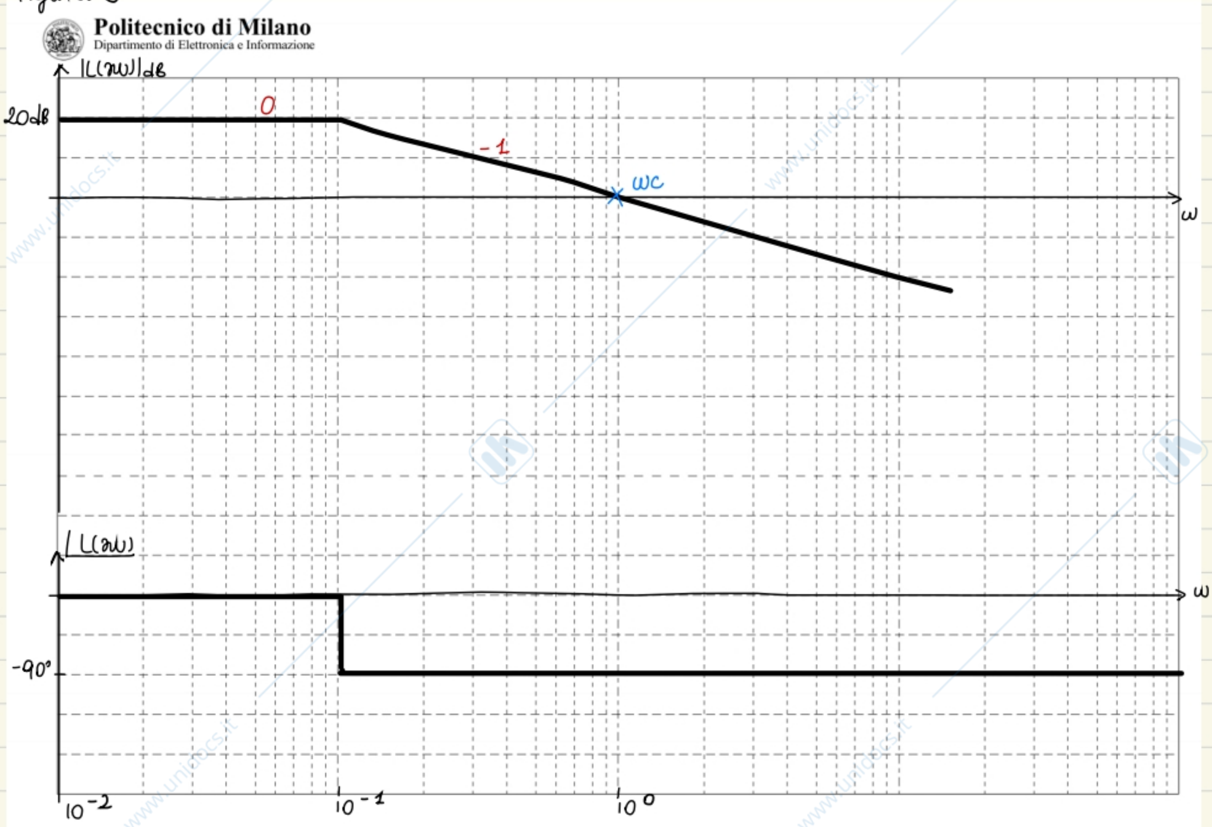


Figura 2



In questo caso, $\omega_c \cong 1$ rad/s (verificando la specifica (b)). Mentre:

$$\varphi_c = -\angle(1+j10\omega_c) - \omega_c \cdot 0.1 \frac{180°}{\pi} = -atg(10) - \underbrace{0.1 \cdot \frac{180°}{\pi}}_{\text{minore di prima}} \cong -90°$$

→ $\varphi_m \cong 90° \geq 60°$ (verificando anche l'ultima specifica)

Si noti che: $R(s) = L(s)/G(s) = \frac{\cancel{10}}{1+10s} \cancel{e^{-0.1s}} \cdot \frac{s+1}{\cancel{10}} \cancel{e^{0.1s}} = \frac{s+1}{1+10s}$

Scegliendo $g_R = 1$, allora $R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$ e quindi:

$$L(s) = \frac{\mu_R}{s} \cdot \frac{10}{1+s} e^{-0.1s} R_2(s)$$

Come prima proviamo in primo luogo $R_2(s)$. Per scegliere μ_R procediamo invece con questa logica:

- sappiamo che tanto più è alta ω_c tanto più il ritardo porta ad una diminuzione del margine di fase (rispetto a quello della funzione di trasferimento senza ritardo).

→ scegliamo μ_R in modo che ω_c sia la più bassa ammissibile, ossia:

$$\omega_c = 0.5 \text{ rad/s}$$

→ $|L(j\omega_c)| = 1$ → $\frac{|\mu_R|}{0.5} \cdot \frac{10}{|1+j0.5|} = 1$ → $\mu_R = |1+j0.5|\, 0.05 = 0.05 \underbrace{\sqrt{1+0.25}}_{\cong 1} \cong \frac{1}{20}$

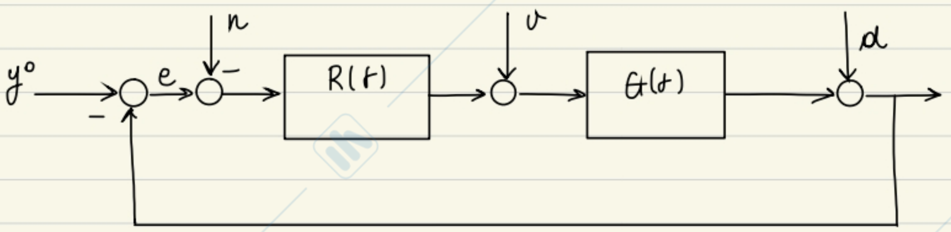
Con questa scelta abbiamo:

$$\varphi_c = -90° - atg(\omega_c) - \omega_c \cdot 0.1 \frac{180°}{\pi} \cong -119.4°$$

→ $\varphi_m = 60.6° \geq 60°$ verificando la specifica sul margine di fase

In questo caso quindi: $R(s) = \frac{0.05}{s}$.

Esercizio 4



Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove

$$G(s) = \frac{1}{(1+10s)(1+0.001s)^2}$$

(1) Progettare $R(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_I}\right)$ (regolatore PI)

(a) Attenuazione di $d(t) = 0.1 \sin(\bar{\omega} t)$ con $\bar{\omega} < 10$ rad/s di almeno un fattore 10
(b) Errore di regime nullo quando $y^o(t) = sca(t)$
(c) $\omega_c > 10$ rad/s

(2) Valutare l'attenuazione di un disturbo $n(t) = \sin(\bar{\omega} t)$ con $\bar{\omega} \geq 10$ rad/s sull'uscita è almeno pari ad un fattore 10

(1)

Cominciamo con il progetto statico (si noti che in questo caso la struttura del regolatore è fissata ed i nostri gradi di libertà sono K e T_I)

Dalla specifica (b), vogliamo che $e_{\infty y^o} = 0$ se $y^o(t) = sca(t)$. Ma, riscrivendo $R(s)$ come segue:

$$R(s) = \frac{k(sT_I + 1)}{sT_I}$$

si nota che $L(s) = R(s)G(s)$ è di tipo $g=1$. Sulla base del principio del modello interno sappiamo quindi che tale specifica è già VERIFICATA.

Dato che $E_d(s) = -S(s)D(s)$, allora per attenuare il disturbo come da specifica (a) è necessario che:

$$|S(j\bar{\omega})|_{dB} \leq -20\, dB$$ (attenuazione di un fattore 10)

Dato che $\bar{\omega} < 10$ rad/s e per le specifiche di progetto abbiamo che $\omega_c > 10$ rad/s, sappiamo che:

$$|S(j\bar{\omega})| \simeq |L(j\omega)|^{-1}$$

e quindi:

$$-|L(j\bar{\omega})|_{dB} \leq -20\, dB$$

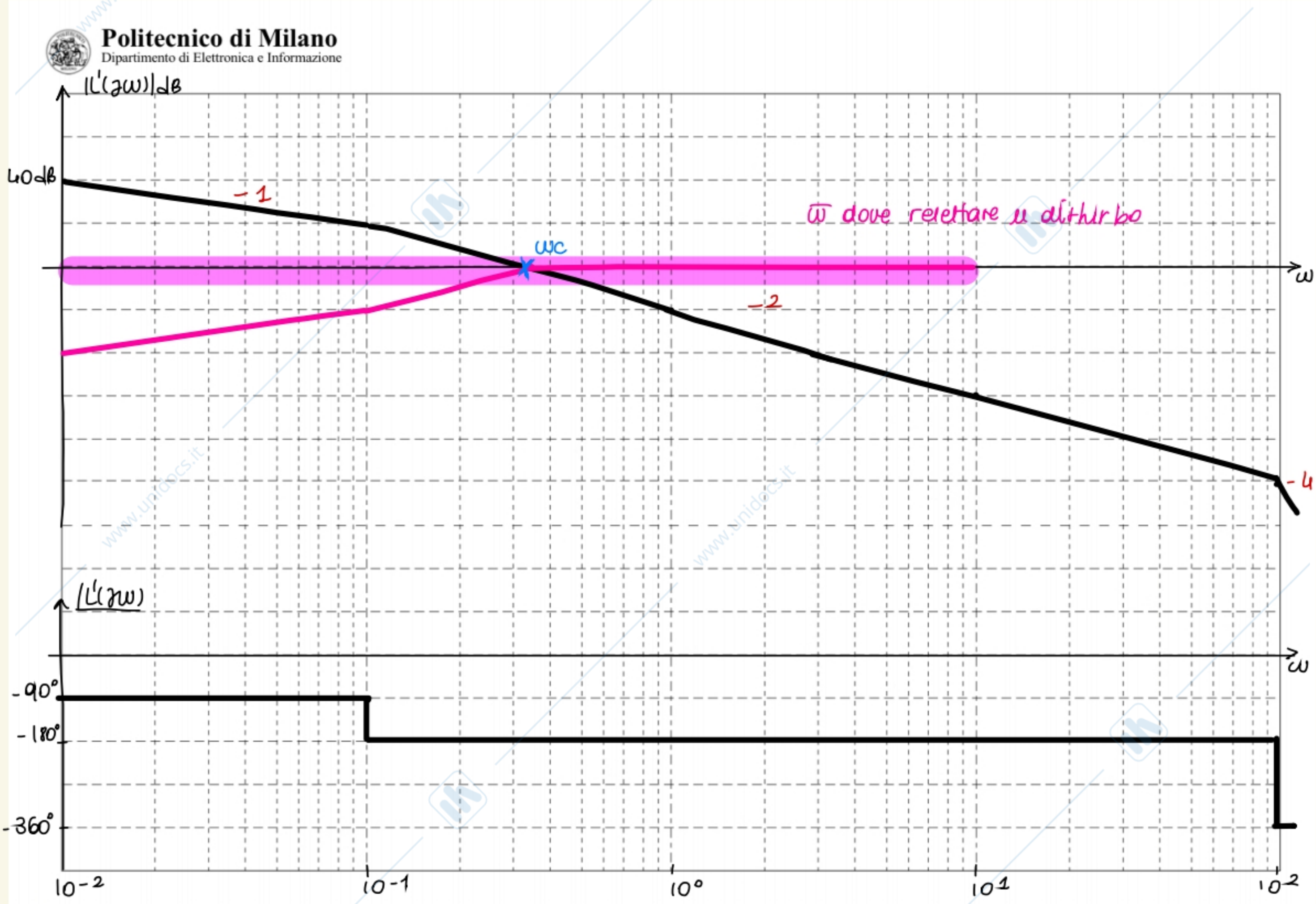
da cui otteniamo la specifica dinamica $|L(j\bar{\omega})|_{dB} \geq 20\, dB$.

Guardando $R(s)$ notiamo che questa ci da la possibilità di cambiare il guadagno e di introdurre uno zero. Per capire quale sia la scelta migliore, possiamo notare che

$$L(s) = \frac{k}{T_I}(sT_I + 1) \cdot \underbrace{\frac{1}{s} G(s)}_{L'(s)}.$$

Disegnando quindi i diagrammi di Bode di $L'(j\omega)$ possiamo capire quali siano le scelte migliori per guadagno e zero per soddisfare le specifiche.

Si noti che $|L'(j10^{-2})|_{dB} \simeq 20\log|\mu_{L'}| - 20\log|j10^{-2}| = 40\, dB$ dato che $\mu_{L'} = 1$ $\mu_G = 1$.



Notiamo quindi che, per $L'(s)$:

- $\omega_c \cong 0.3$ rad/s
- $d(t)$ non è retroazionato correttamente.

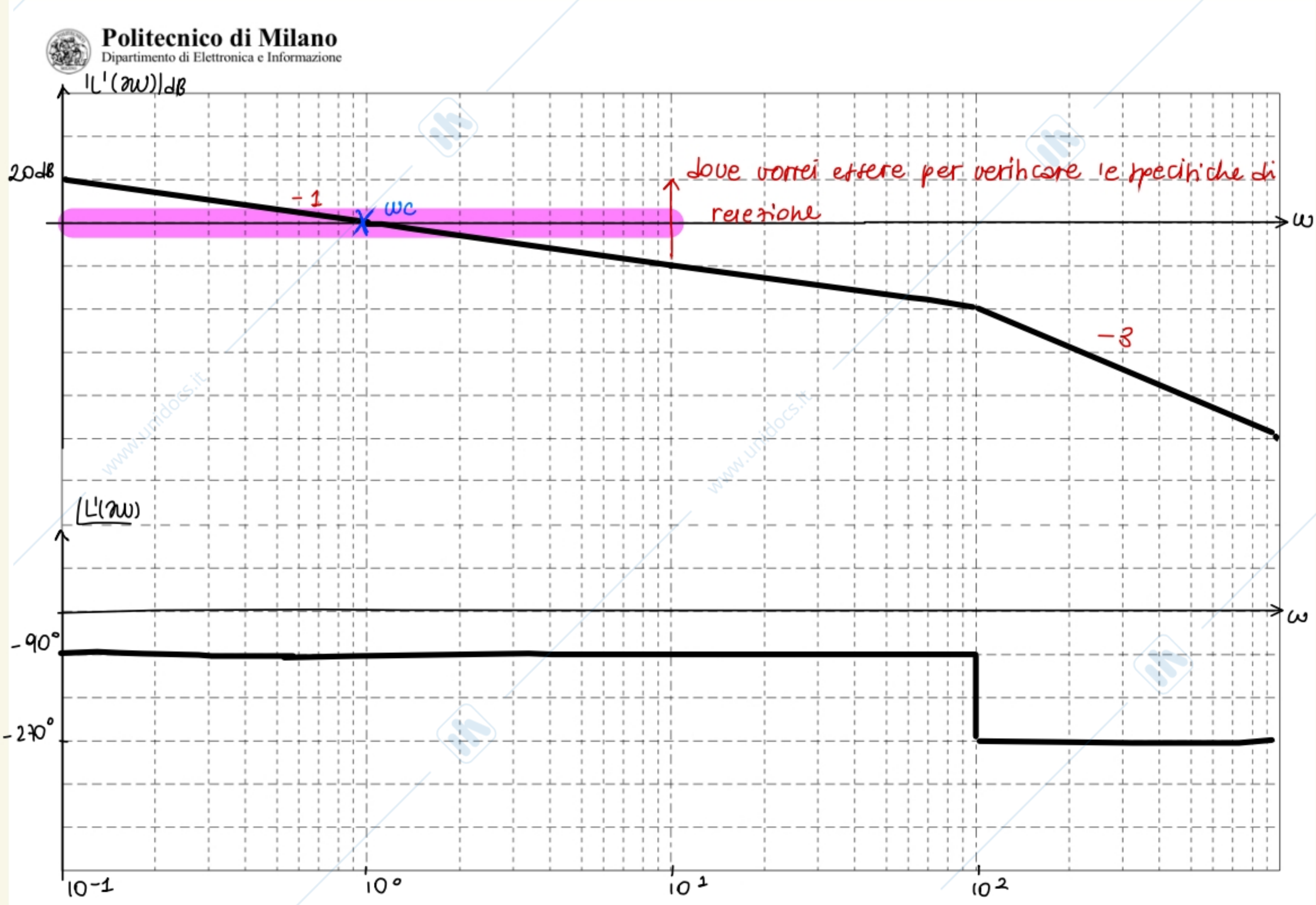
→ Posso usare $\frac{K}{T_I}$ per aumentare il valore del modulo, così da aumentare ω_c (fino a soddisfare le specifiche) e garantire le specifiche in termini di reiezione dei disturbi.

→ posso scegliere lo zero affinché anch'esso contribuisca all'aumento di ω_c e alla reiezione desiderata.

La scelta più semplice per T_I è quella di scegliere questo parametro in modo tale da garantire la cancellazione del polo (stabile) dominante di $G(s)$, in questo caso $p = -0.1$.
→ $T_I = 10$.

Con questa scelta: $$L(s) = \frac{K}{10} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(1+0.01s)^2} = \frac{K}{10} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+0.01s)^2 s}}_{L'(s)}$$

Otteniamo così il seguente diagramma di Bode.



$(|L'(j10^{-1})|_{dB} \simeq 20\log|1| - 20\log|10^{-1}| = 20 \text{ dB})$

In questo caso:

- $\omega_c \simeq 1$ rad/s
- $\varphi_m > 0°$ sicuramente (vedi Bode asintotico) $\longrightarrow$ il sistema retroazionato è stabile

Però ancora non verificato le specifiche su ω_c e la reiezione. Per farlo possiamo scegliere opportunamente k/T_I.

In particolare, dobbiamo spostare ω_c di almeno una decade per verificare la specifica (c) e dobbiamo avere $|L(j\bar{\omega})| \geq 20$ dB.

Vista la pendenza del diagramma di Bode, una scelta che permette di verificare entrambe le specifiche (a) e (c) è:

$$\omega_c \cong 100 \text{ rad/s}$$

che richiede un incremento nel guadagno di 40 dB. Quindi $\left|\frac{k}{T_I}\right|_{dB} = 40$ dB.

Ossia: $\frac{K}{T_I} = 100 \rightarrow K = 100\,T_I = 1000$

con $R(s) = 1000\left(1 + \frac{s}{10}\right)$ vengono quindi soddisfatte le specifiche.

(2)

L'attenuazione di $n(t)$ dipende da $F(s)$ e, dato che $\omega_c = 100$ rad/s e $\bar{\omega} \geq 10^4$ rad/s, sappiamo che:

$$|F(j\bar{\omega})| \simeq |L(j\bar{\omega})|$$

che come si vede dal diagramma di Bode del modulo soddisfa: $|L(j\bar{\omega})|_{dB} \leq -80\,dB$.
Ho quindi un fattore di attenuazione di 10^4, verificando la condizione sulla reiezione.