

POLITECNICO DI MILANO

PROF. MARA TANELLI

vers. 1

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

(Ingegneria dell'Automazione)

Prof.ssa Mara Tanelli

Anno Accademico 2015/16

Prima prova in itinere 02/05/2016

COGNOME.....

NOME

MATRICOLA

FIRMA

- Consegnare esclusivamente il presente fascicolo.
- Utilizzare, per la minuta, i fogli bianchi forniti in aggiunta a questo fascicolo.
- Non si possono consultare libri, appunti, dispense, ecc.
- Si raccomandano chiarezza, precisione e concisione nelle risposte.

FONDAMENTI DI AUTOMATICA - Ingegneria dell'Automazione

Prof.ssa Mara

Tanelli

Prima prova in itinere del 2 maggio 2016

1. Si consideri il sistema dinamico lineare e tempo invariante a tempo continuo con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) + \gamma u(t) \\ y(t) &= \delta x_1(t) + \delta x_2, \end{aligned}$$

con α, β, γ e δ parametri reali.

1.1 Classificare il sistema e dire per quali valori di α, β, γ e δ il sistema è asintoticamente stabile. (2 punti)

SISTEMA DINAMICO, LTI, II° ORDINE, SISO, STAT. PROPRIO

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \quad \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -\alpha & \lambda - \beta \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda - \beta) - \alpha = \lambda^2 - \beta\lambda - \alpha$$

Le radici del polinomio hanno $\text{Re} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\beta > 0 \\ -\alpha > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 0 \\ \beta < 0 \end{cases}$
 Il sist. è ASINT. STABILIS $\Leftrightarrow \alpha, \beta < 0$ e $\forall \gamma, \delta$

1.2 Posto $\alpha = 0, \beta = -30, \gamma = 1$ e $\delta = 100$ determinare il movimento dello stato e dell'uscita del sistema associato alla condizione iniziale $x(0) = [1, 1]^T$ e all'ingresso $u(t) = 2e^{-t}, t \geq 0$. (2 punti)

EQUAZIONI:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -30x_2 + u \end{cases}$$

risolvo la II° eq: $x_2(t) = e^{-30t} + \int_0^t e^{-30(t-\tau)} 2e^{-\tau} d\tau = e^{-30t} + 2e^{-30t} \int_0^t e^{-29\tau} d\tau$

$$= e^{-30t} + \frac{2}{29} e^{-30t} (e^{-29t} - 1) = \frac{27}{29} e^{-30t} + \frac{2}{29} e^{-t}, t \geq 0$$

$$0,93e^{-30t} + 0,07e^{-t}, t \geq 0$$

1° eq $\dot{x}_1 = x_2, x_1(0) = 1$

$$x_1(t) = e^{0t} x_1(0) + \int_0^t \left(\frac{27}{29} e^{-30\tau} + \frac{2}{29} e^{-\tau} \right) d\tau = 1 + \frac{27}{29 \times 30} (e^{-30t} - 1) - \frac{2}{29} (e^{-t} - 1)$$

$$= 1 - 0,03(e^{-30t} - 1) - 0,07(e^{-t} - 1) = \boxed{1,1 - 0,03e^{-30t} - 0,07e^{-t}, t \geq 0}$$

Uscita

$$y(t) = 100x_1 + 100x_2 = \boxed{110 + 90e^{-30t}, t \geq 0}$$

1.3 Posto $\alpha = -200$ e con i valori degli altri parametri introdotti al punto 1.2, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema, precisandone tipo, guadagno, poli e zeri. Si mostrino graficamente le posizioni di zeri e poli nel piano complesso. (3 punti)

Applico LAPLACE, con (potenzi $x(0) = 0$)

$$\begin{cases} sX_1(s) = X_2(s) \\ (s+30)X_2(s) = -200X_1(s) + U(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -200x_1 - 30x_2 + u \\ y = 100x_1 + 100x_2 \end{cases}$$

$$\left[(s+30) + \frac{200}{s} \right] X_2(s) = U(s) \Rightarrow Y(s) = 100 \underbrace{\left[\frac{1}{s^2+30s+200} + \frac{s}{s^2+30s+100} \right]}_{G(s)} U(s)$$

$$G(s) = 100 \frac{1+s}{s^2+30s+100}$$

Tipo $f=0$; guadagno $G(0) = \frac{1}{2}$ Poli $\begin{cases} -20 \\ -10 \end{cases}$ Zeri $z = -1$

1.4 Coi valori dei parametri introdotti al punto 1.3, tracciare il grafico qualitativo della risposta del sistema ad uno scalino unitario, precisando valore iniziale della risposta e della sua derivata prima ($y(0)$ e $\dot{y}(0)$), valore di regime (y_{∞}) e tempo di assestamento (T_a). (2 punti)

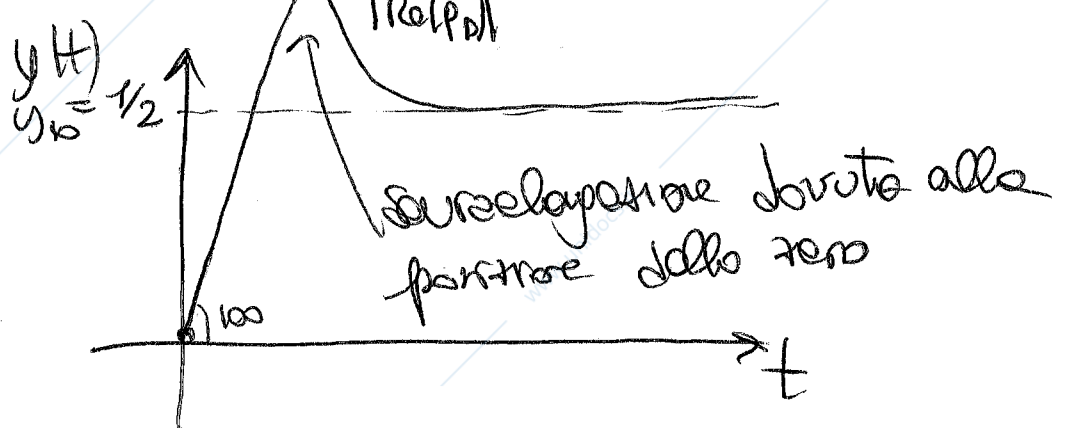
Il sistema ha grado relativo $1 > 0 \Rightarrow y(0) = 0$

$$\begin{aligned} \dot{y}(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s [sY(s) - y(0)] = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 G(s) \frac{1}{s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{100 s(s+1)}{s^2+30s+100} = 100 \neq 0 \quad (\text{coerente col grado relativo}) \end{aligned}$$

gr rel $> 0 \Rightarrow 0 \text{ ok!}$

$$y_{\infty} = G(0) = \frac{1}{2} \quad (\text{SISTEMA AS. STABILE e di tipo } f=0 \text{ con ingresso } u(t) = 1 \text{ cat})$$

Polo dominante $p_D = -10 \rightarrow T_D = \frac{1}{|Re(p_D)|} = 0,1 \text{ s} \rightarrow T_a \approx 5T_D = 0,5 \text{ s}$



2. Si consideri il sistema dinamico non lineare e tempo invariante con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}_1(t) = -5x_1(t) + 10u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + \alpha^3 x_2^3(t)$$

$$y(t) = x_2^2(t)u(t),$$

con α parametro reale.

2.1 Determinare stati e uscite di equilibrio associati all'ingresso costante $u(t) = 4, t \geq 0$ in funzione di α . (1 punto)

$$\begin{cases} 0 = -5\bar{x}_1 + 10 \times 4 \\ 0 = \bar{x}_1 + \alpha^3 \bar{x}_2^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 8 \\ \bar{x}_2^3 = -\frac{8}{\alpha^3} \end{cases} \begin{cases} \bar{x}_1 = 8 \\ \bar{x}_2 = -\frac{2}{\alpha} \end{cases}$$

Posto $\alpha \neq 0$, gli eq. sono

$$\boxed{(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (8, -\frac{2}{\alpha})}$$

$$\bar{y} = \frac{16}{\alpha^2}$$

2.2 Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno agli stati di equilibrio determinato al punto precedente. (2 punti)

$$\delta \dot{x}_1 = -5\delta x_1 + 10\delta u$$

$$\delta \dot{x}_2 = \delta x_1 + 3\alpha^3 \bar{x}_2^2 \Big|_{ep} \delta x_2$$

$$\delta y = 2\bar{x}_2 \bar{u} \Big|_{ep} \delta x_2 + \bar{x}_2^2 \Big|_{ep} \delta u$$

All'ep si ha:

$$\delta \dot{x}_1 = -5\delta x_1 + 10\delta u$$

$$\delta \dot{x}_2 = \delta x_1 + 12\alpha \delta x_2$$

$$\delta y = \frac{16}{\alpha} \delta x_2 + \frac{4}{\alpha^2} \delta u$$

2.3 Al variare di α , con $\alpha \neq 0$, studiare la stabilità del sistema linearizzato e, se possibile, la stabilità del movimento di equilibrio del sistema non lineare di partenza. (3 punti)

$$A_{lin} = \begin{bmatrix} -5 & 12\alpha \\ 1 & 10\alpha \end{bmatrix} \quad \lambda_i(A_{lin}) = \left\{ -5, 12\alpha \right\}$$

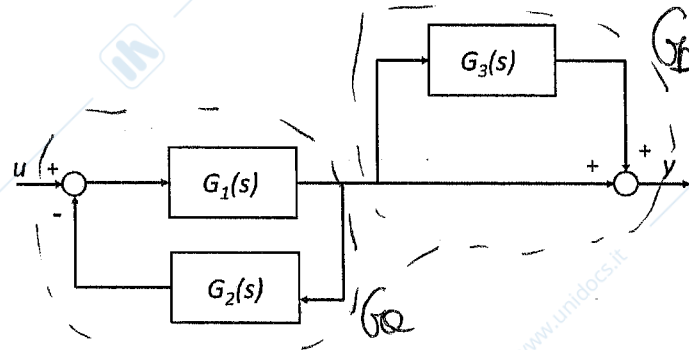
Se $\alpha > 0$: $\text{Re}(\lambda_i(A_{lin})) < 0 \quad \forall i \iff$ SISTEMA LINEARIZZATO AS. ST.

\implies Mov. di eq. del sistema NON LIN. AS. ST.

Se $\alpha < 0$: $\exists i: \text{Re}(\lambda_i(A_{lin})) > 0 \iff$ SISTEMA LINEARIZZATO AS. STABILIZ

\implies Mov. di eq. del sistema NON LIN. INSTABILIZ

3. Si consideri lo schema a blocchi in figura



con $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ funzioni di trasferimento di sistemi dinamici lineari e tempo invarianti di ordine 1.

3.1 Determinare l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ tra l'ingresso u e l'uscita y in funzione di $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $G_3(s)$. (1 punto)

$$H(s) = G_a \cdot G_b \quad (G_a \text{ in serie e } G_b)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad 1 + G_3(s)$$

3.2 Posto $G_1(s) = \frac{1}{s+5}$, $G_2(s) = \frac{s+5}{s+2}$, $G_3(s) = \frac{1}{s+2}$, verificare che $H(s) = \frac{1}{s+5}$ e studiare la stabilità del sistema complessivo. (3 punti)

$$G_a = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{1/s+5}{1 + \frac{1}{s+5} \frac{s+5}{s+2}} = \frac{s+2}{s+5} \cdot \frac{s+2}{s+2} = \frac{s+2}{s+5}$$

$$G_b = 1 + G_3(s) = 1 + \frac{1}{s+2} = \frac{s+3}{s+2} \quad H(s) = G_a \cdot G_b = \frac{s+2}{s+5} \cdot \frac{s+3}{s+2} = \frac{s+3}{s+5}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+5} \rightarrow 1 \text{ POLO}$$

$$\text{Re}(k_i(s)) < 0 \forall i$$

↑ sist. complessivo AS.ST.

Il sistema interconnesso è di ordine 3 → ci sono 2 poli nascosti, che sono $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$ derivanti da semplificazione nelle forme G_a e G_b

3.3 Calcolare il valore di regime dell'uscita forzata $y(t)$ del sistema con funzione di trasferimento $H(s)$ all'ingresso $u(t) = 3\text{sca}(t) + 2\sin(0.01t) - \sin(5t)$. (3 punti)

$$H(s) = \frac{1}{s+5}$$

Usiamo le terrapp. degli effetti

$$u_1 = 3\text{sca}(t) \rightarrow y_{1ss} = 3H(0) = \frac{3}{5}, \text{ perché sist. AS.ST. di tipo 0}$$

$$u_2 = 2\sin(0.01t) \rightarrow y_{2ss} = 2|H(j0.01)| \sin(0.01t + \angle H(j0.01)) \approx 2 \sin(0.01t)$$

SISTEMA AS. STABILE

↓ APPROXIMAZIONE delle resp. in frequenza

perché $0.01 \ll 5$
 $\omega \ll \frac{1}{T}$

$$u_3 = -\sin(5t) \rightarrow y_{3ss} = -|H(j5)| \sin(5t + \angle H(j5))$$

$$\frac{1}{\sqrt{5^2 + 5^2}} \approx \frac{1}{5\sqrt{2}} \approx 0.14$$

$$-\text{atan}\left(\frac{5}{5}\right) \approx -\frac{\pi}{4}$$

$$y_{ss} = y_{1ss} + y_{2ss} + y_{3ss} = \frac{3}{5} + 2\sin(0.01t) - 0.14 \sin(5t - \pi/4)$$

4. Con riferimento alla classe dei sistemi dinamici lineari e tempo invarianti a tempo continuo, si illustri cosa si intende per approssimazione a poli dominanti e quale sia il suo impiego nell'analisi di tali sistemi. (5 punti)

Vedi Elaboro / appunti

5. Con riferimento alla classe dei sistemi dinamici lineari e tempo invarianti a tempo continuo, si dica, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false. (5 punti)

a) se interconnettiamo in modo arbitrario due sistemi, la stabilità dei singoli sottosistemi è condizione necessaria per la stabilità del sistema complessivo; **F**

Come la scomposizione in retroazione è possibile modificare la posizione dei poli \rightarrow di parte degli autovalori del sistema

b) se il sistema è asintoticamente stabile, allora la sua risposta all'impulso tende al valore del guadagno; **F**

La risposta all'impulso contiene solo una cost. lineare dei modi del sistema, e quindi se il sist. è AS. ST. $\rightarrow 0$
 $\rightarrow 0$

c) condizione necessaria affinché un sistema sia asintoticamente stabile è che i poli della sua funzione di trasferimento siano a parte reale negativa; **V**

I poli della FAT sono oem'altro autovalori del sistema, quindi, poiché perché il sist. è AS. ST. occorre e basta che tutti gli autovalori siano $Re < 0$, senz'altro devono esserlo i poli

d) se il sistema è strettamente proprio, allora il suo grado relativo è maggiore di zero;

V La FAT del sistema è $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ se il sist. è strett. proprio $D = 0 \Rightarrow G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ che ha un denom. di grado m (ie polin. caratt. di $(sI - A)$) e un num. di grado al più $(m-1)$

e) per uno dei punti precedenti a scelta si fornisca un esempio numerico a supporto della risposta data. \rightarrow dato

es. punto b)

$G(s) = \frac{1}{s+1}$ FAT di sistema
 LT₁ del
 primo ordine

dalle trasposte dei complementi algebrici di $(sI - A)$

\downarrow
 sist. AS. STABILE perché $\{p_i\} = \{h_i\} = \{-1\}$

Se $u(t) = \delta(t)$

$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) \times 1 = G(s)$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{-t}, t \geq 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \neq G(0) = 1$
 $\rightarrow 0$