FONDAMENTI DI AUTOMATICA - Ingegneria Elettronica **Prof.ssa Mara Tanelli**
Appello del 12 luglio 2011

1. Si consideri il sistema dinamico non lineare con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_2(t)^2 - 2x_2(t)u(t) + u(t)^2$$
$$y(t) = x_1(t)^2 x_2(t),$$

1.1 Determinare stati $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ e uscite $\bar{y}$ di equilibrio associati all'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 1$, $t \geq 0$.

Equilibri

$$\begin{cases} 0 = 2\bar{x}_1 - \bar{u} \\ 0 = \bar{x}_2^2 - 2\bar{x}_2\bar{u} + \bar{u}^2 \end{cases} \iff \boxed{\begin{matrix} \bar{x}_1 = 1/2 \\ \bar{x}_{2_{1,2}} = 1 \end{matrix}}$$

$$\bar{y} = \bar{x}_1^2 \bar{x}_2 \qquad \boxed{\bar{y} = \frac{1}{4}}$$

1.2 Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (1/2, 1)$ e studiarne la stabilità. Valutare poi, se possibile, la stabilità del movimento di equilibrio del sistema non lineare.

Le equazioni del generico sistema linearizzato sono

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = 2\delta x_1 - \delta u \\ \delta\dot{x}_2 = (2\bar{x}_2 - 2\bar{u})\Big|_{eq}\delta x_2 + 2\bar{u}\Big|_{eq}\delta u - 2\bar{x}_2\Big|_{eq}\delta u \end{cases}$$

$$\delta y = 2\bar{x}_1\bar{x}_2\,\delta x_1 + \bar{x}_1^2\,\delta x_2$$

In $(1/2, 1)$ e con $\bar{u} = 1$ si ottiene

$$\boxed{\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = 2\delta x_1 - \delta u \\ \delta\dot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad \delta y = \delta x_1 + \frac{1}{4}\delta x_2}$$

La matrice A è data da:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_i(A) = \{2, 0\}$$

$\exists i : Re(\lambda_i) > 0 \Rightarrow$ SISTEMA LIN. INSTABILE

$\exists i : Re(\lambda_i) > 0 \Rightarrow$ MOVIM. di eq. del sistema NON LINEARE INSTABILE

1.4 Calcolare l'espressione analitica del movimento dello stato e dell'uscita del sistema linearizzato, con condizioni iniziali $\delta x_1(0) = 1$, $\delta x_2(0) = 2$ e ingresso $\delta u(t) = 4$.

I° eq $\delta\dot{x}_1 = 2\delta x_1 - \delta u \Rightarrow \delta x_1(t) = e^{2t}\cdot 1 + \int_0^t e^{2(t-\tau)}(-4)\,d\tau$

$= e^{2t} - 4e^{2t}\int_0^t e^{-2\tau}\,d\tau =$

$= e^{2t} + \frac{4}{2}e^{2t}\left[e^{-2\tau}\right]_0^t = e^{2t} + 2e^{2t}\left[e^{-2t} - 1\right]$

$= e^{2t} + 2 - 2e^{2t} = \boxed{-e^{2t} + 2}\ t \geq 0$

II° eq $\delta\dot{x}_2 = 0$

$\boxed{\delta x_2(t) = 2,\ t \geq 0}$

$\delta y = e^{-2t} + 2 + \frac{1}{4}2 = \boxed{e^{-2t} + \frac{3}{2}},\ t \geq 0$

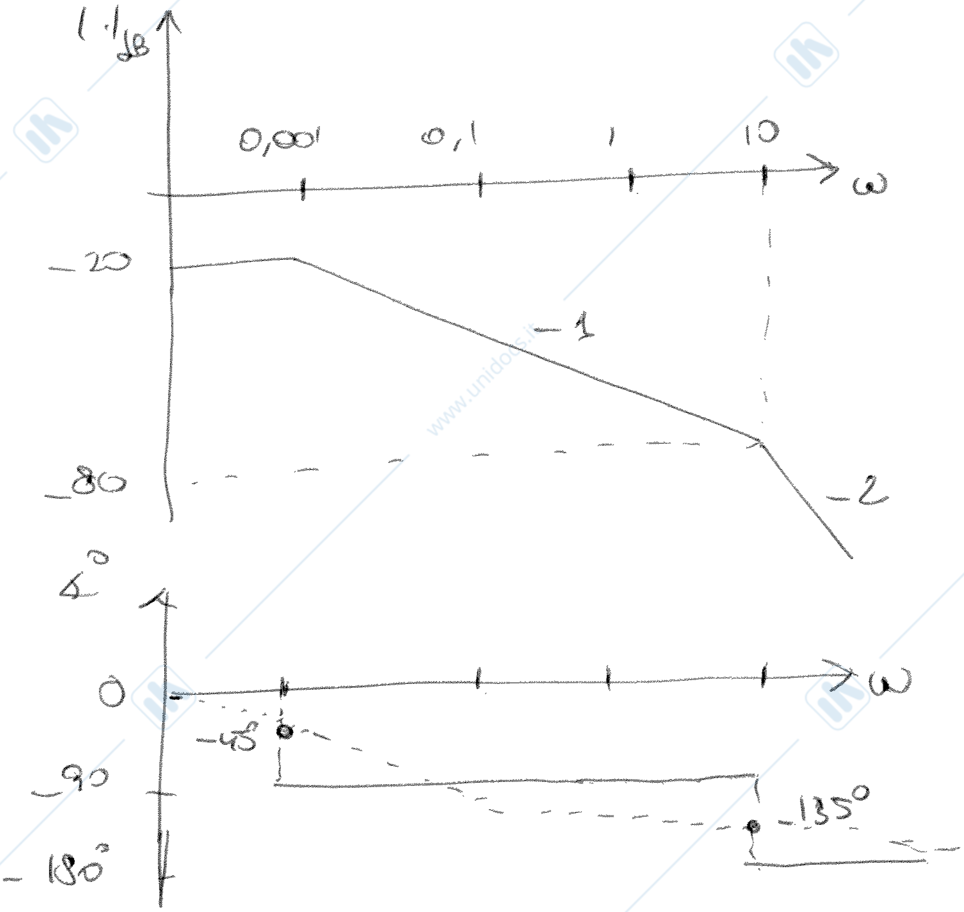
2. Si consideri la funzione di trasferimento di un sistema di ordine due senza autovalori nascosti $G(s) = \frac{0.1}{(0.1s+1)(100s+1)}$.

2.1 Si traccino i diagrammi di Bode approssimati di modulo e fase della risposta in frequenza associata a $G(s)$, e si calcoli l'ampiezza dell'uscita di regime del sistema ad un ingresso $u(t) = 2 + \sin(0.01\,t) + \sin(10\,t)$.

$\mu = 0{,}1 \rightarrow -20$ dB

$p_1 \Rightarrow s = -10$

$p_2 \Rightarrow s = -0{,}01$



$u(t) = u_1 + u_2 + u_3$

G(s) FdT di sist. As. St. di tipo 0

$y_{1\infty} = 2\mu = 0{,}2$

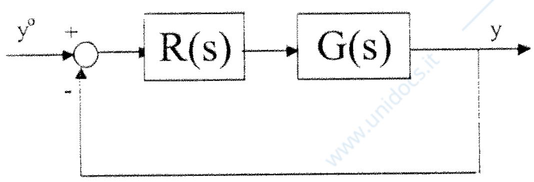
G(s) AS. ST ⇒ applico th. della risposta in freq.

$y_{2\infty} = |\underbrace{G(j0{,}01)}_{-23dB}| \cdot 1 = 0{,}1\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y_{3,\infty} = |\underbrace{G(j10)}_{-83dB}| \cdot 1 = 0{,}0001\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

2.2 Si supponga che il sistema venga retroazionato come mostrato in figura con un regolatore PI nella forma

$$R(s) = k_p \frac{1 + sT_i}{sT_i}.$$



Determinare i valori di k_p e T_i in modo tale che: 1) l'uscita di regime del sitema in anello chiuso a fronte di $y^o(t) = A\,\mathrm{sca}(t)$ sia pari ad A; 2) la pulsazione critica del sistema in anello chiuso sia $\omega_c \simeq 1$ e il margine di fase sia $\phi_m \geq 80°$.

Requisito 1) automaticamente soddisfatto perché $L(s)$ è di tipo 1 $\forall\, k_p$ e $T_i \neq 0$

Requisito 2) $L(s) = \dfrac{0{,}1}{(0{,}1s+1)(100s+1)} \cdot k_p \dfrac{1+sT_i}{sT_i}$

Fisso T_i per cancellare il polo di bassa frequenza: $\boxed{T_i = 100}$

Fisso k_p per avere la ω_c desiderata $0{,}1 \dfrac{k_p}{T_i} = 1 \Rightarrow \boxed{k_p = 1000}$

Così ho $L(s) = \dfrac{1}{s(0{,}1s+1)}$ $\quad \omega_c \simeq 1$ rad/s

$\varphi_m \simeq 84° > 80°$

2.3 Si calcoli il valore dell'ampiezza dell'uscita di regime del sistema in anello chiuso progettato al punto precedente a fronte di un ingresso $y^o(t) = \underbrace{2}_{y_1^o} + \underbrace{\sin(0.1\,t)}_{y_2^o} + \underbrace{\sin(10\,t)}_{y_3^o}$.

$L(s)$ di tipo 1 $\Rightarrow y_{1\infty} = 2$

2),3): FdT tra $Y^o(s)$ e $Y(s)$ è $F(s) = \dfrac{L(s)}{1+L(s)}$ $\quad |F| \simeq \begin{cases} 1 & \omega \leq \omega_c \\ |L| & \omega > \omega_c \end{cases}$

$y_{2,\infty} = 1$, $\quad y_{3,\infty} = \underbrace{0{,}1 \dfrac{\sqrt{2}}{2}}_{-23\,dB}$

2.4 Per una realizzazione digitale del sistema di controllo progettato al punto 2.2, determinare un valore opportuno del passo di campionamento T_s, calcolare la funzione di trasferimento del regolatore digitale $R(z)$ con il metodo di Eulero indietro (o implicito) e scrivere il codice di controllo da implementare su un microprocessore.

Le considerazioni legate al costo dei dispositivi, gli errori di quantizzazione e il progetto di eventuali filtri anti-alias porta a fissare

$$10\,\omega_c \leq \omega_s \leq 50\,\omega_c$$

Pongo $\omega_s = 20\,\omega_c = 20 \frac{rad}{s}$ $\quad T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} \simeq 0{,}3\ s$

EUL. IMPL.: $s \rightarrow \frac{z-1}{z T_s}$

$$R(s) = 10\,\frac{100s+1}{s} \rightarrow R(z) = 10\,\frac{100\frac{z-1}{zT_s}+1}{\frac{z-1}{zT_s}} =$$

$$= 10\,\frac{(100(z-1)+zT_s)}{z-1} = 10\,\frac{99{,}7z-100}{z-1}$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = 10\,\frac{99{,}7z-100}{z-1}$$

$$\Updownarrow$$

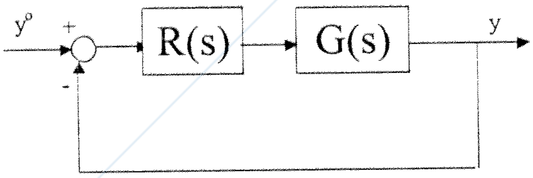
$$\frac{1}{z}U(z)[z-1] = (997z-1000)\,E(z)\,\frac{1}{z}$$

$$\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$u(k) = u(k-1) + 997e(k) - 1000\,e(k-1)$$

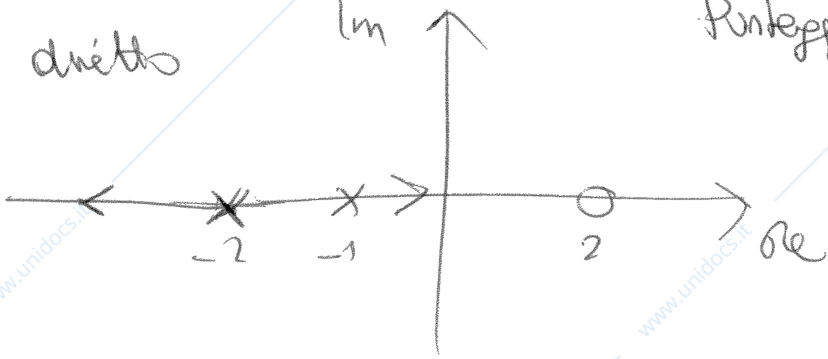
```
LEGGI y°, y
e = y° - y
u = u + 997 e - 1000 eold
eold = e
scrivi u
```

3. Si consideri il sistema di controllo in figura, in cui $G(s) = \frac{s-2}{(s+1)(s+2)}$ e $R(s) = \rho$.



Si traccino il luogo delle radici diretto ed inverso, valutando per quali valori di ρ, se ve ne sono, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

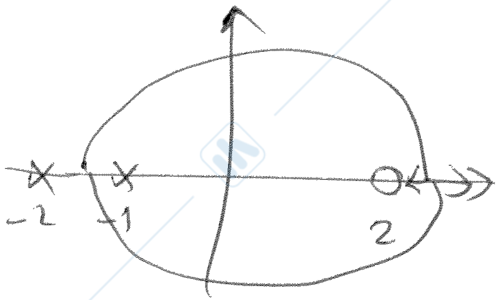
Luogo diretto



Punteggiatura in $\bar{s} = 0$

$$|\rho| = \frac{\prod |s+p_i|}{\prod |s+z_i|} = 1$$

Luogo inverso



N.B. Grado relativo di $G(s) = 1 \Rightarrow$ non posso usare la regola del baricentro!

Polinomio caratteristico del sistema in anello chiuso

$$\rho N^*(s) + D(s) = 0$$

$$\rho(s-2) + (s+1)(s+2) = 0$$

$$s^2 + (3+\rho)s + 2(1-\rho) = 0$$

RADICI con $Re < 0$ ($\Rightarrow$ ~~~~ sistema in anello chiuso AS. STABILE)

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 3+\rho > 0 \\ 2(1-\rho) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho > -3 \\ \rho < 1 \end{cases}$$

SIST. in an. chiuso AS. STABILE per

$$\boxed{-3 < \rho < 1}$$

4. Si tracci lo schema a blocchi di due sistemi lineari e tempo invarianti strettamente propri connessi in serie. Si scrivano poi le equazioni di stato e di uscita del sistema interconnesso, mostrando che i suoi autovalori sono dati dall'unione degli autovalori dei singoli sistemi.

Vedi libro/Appunti

5. Si enunci con precisione il criterio di Bode.

Vedi libro/Appunti