

# Fondamenti di Automatica

Corso di laurea in Ingegneria dell'Automazione, AA 2019/2020

## Esercitazione del 24/02/20

Mara Tanelli, Valentina Breschi

### Algebra Lineare

Una matrice  $A$  di dimensioni  $n \times m$  è definita come

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

dove  $a_{ij}$  sono numeri reali (o complessi). Se  $n = m$ , allora la matrice si dice essere *quadrata*.

Un vettore, di dimensioni  $n \times 1$ , è invece definito come

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad (2)$$

dove l' $i$ -esimo elemento  $v_i$  è un numero reale (o complesso).

Si ricorda che dal prodotto di due matrici  $A$  ( $n \times m$ ) e  $B$  ( $m \times p$ ) si ottiene una matrice  $C = AB$  ( $n \times p$ ), i cui elementi sono definiti come

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}, \quad \forall i, j. \quad (3)$$

La potenza di una matrice  $A$  ( $n \times n$ ) risulta

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ volte}}. \quad (4)$$

Si presti attenzione che, per definizione,  $A^0 = I$ , dove  $I$  è la matrice identità di ordine  $n$ , ovvero

$$I_{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Si definisce matrice trasposta di  $A$  ( $n \times m$ ) la matrice  $B$  tale che

$$B = A', \quad (m \times n) \quad (6)$$

i cui elementi sono  $b_{ij} = a_{ji}$ ,  $\forall i, j$ .

Il determinante di una generica matrice (quadrata)  $A$  ( $2 \times 2$ )

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

risulta pari a

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (7)$$

NB: il determinante della matrice identità è pari a 1, per qualsiasi ordine.

Data una matrice  $A$  ( $n \times n$ ), si definisce  $\Delta_{ij}$  il complemento algebrico di  $a_{ij}$  il determinante della matrice ottenuta eliminando la  $i$ -esima riga e la  $j$ -esima colonna, moltiplicato per  $(-1)^{i+j}$ .

### Esempio

Data  $A$  ( $3 \times 3$ ) del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

si calcoli  $\Delta_{12}$ .

*Soluzione:* Eliminiamo la riga 1 e la colonna 2 di  $A$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

e calcoliamo il determinante della sottomatrice rimanente:  $\Delta_{12} = (-1)^{1+2}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$ .

Se esiste, si definisce la matrice inversa (o reciproca) di  $A$  ( $n \times n$ ) la matrice  $A^{-1}$  tale che

$$A^{-1}A = I. \quad (8)$$

Conditione necessaria per l'esistenza di  $A^{-1}$  è che il determinante di  $A$  sia non nullo. Data una generica matrice quadrata  $A$  di ordine  $n$ , gli elementi della sua matrice inversa  $B = A^{-1}$  sono definiti come  $b_{ij} = \frac{\Delta_{ji}}{\det(A)}$ .

### Esempio

Data  $A$  ( $2 \times 2$ )

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

la sua matrice inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

$\Delta_{11} = a_{22}$   
 $\Delta_{21} = (-1)^{2+1}a_{12}$

Data una matrice quadrata  $A$  di ordine  $n$ , il polinomio caratteristico è definito come

$$\pi(s) = \det(sI - A), \quad (9)$$

dove  $s = \alpha + j\beta$  è una variabile complessa. Se  $A$  è una matrice quadrata di ordine  $n$ , in generale  $\pi(s)$  è un polinomio di radice  $n$ .

**Esempio**

Data

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow sI = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}.$$

Quindi, il polinomio caratteristico che si ottiene è

$$\pi(s) = \det(sI - A) = \det \left( \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 1 & s-4 \end{bmatrix} \right) = (s-1)(s-4) + 2 = s^2 - 5s + 6.$$

L'equazione caratteristica è definita come  $\pi(s) = 0$ . Gli autovalori sono le radici dell'equazione caratteristica.

**Esempio (cont.)**Si calcolino ora gli autovalori di  $A$ .

$$\begin{aligned} \pi(s) &= 0 \\ s^2 - 5s + 6 &= 0 \rightarrow \begin{cases} s_1 = 3 \\ s_2 = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Si ricordano tre proprietà degli autovalori:

- Una matrice  $A$  ( $n \times n$ ) ha sempre  $n$  autovalori (complessi) - pur di contarli con la giusta molteplicità;
- $\det(A) = s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_n$ ;
- $\text{tr}(A) \triangleq \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n s_i$ .

Data una matrice  $A$  ( $n \times n$ ) ed i suoi autovalori  $s_i$ , il sistema  $(sI - A)z = 0$  (ovvero  $Az = sz$ ) con  $z$  vettore ( $n \times 1$ ) ha soluzioni diverse da zero solo per  $s = s_i$ . Quindi, fissato  $s = s_i$ , esiste almeno una soluzione  $z_i$ ; tale soluzione è l'autovettore associato a  $s_i$  (NB: ne esistono  $\infty$ ). Se gli autovalori  $s_i$  sono reali e distinti, allora gli autovettori  $z_i$  sono linearmente indipendenti, ovvero

$$M = \underbrace{\begin{bmatrix} z_1 & \dots & z_n \end{bmatrix}}_n \Bigg\} n \rightarrow \det(M) \neq 0. \quad (10)$$

Si definisce l'esponenziale di una matrice  $A$  ( $n \times n$ ) come

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \quad (11)$$

**NB:** la matrice esponenziale non è la matrice degli esponenziali degli elementi di  $A$ .

Analizziamo tre casi:

- matrice  $A$  diagonale  $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ . In questo caso,  $A^i = \begin{bmatrix} \lambda_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^i \end{bmatrix}$ , quindi

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

## Esempio

Data  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ , si calcoli la matrice esponenziale  $e^A$ :

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix}.$$

- matrice  $A$  non diagonale, ma diagonalizzabile (con autovalori distinti reali):  $\exists T_D n \times n$  non singolare (i.e.,  $\det(T_D) \neq 0$ ) tale che

$$T_D A T_D^{-1} = A_D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$T_D^{-1} \underbrace{T_D A T_D^{-1}}_{A_D} T_D = T_D^{-1} A_D T_D \Rightarrow A = T_D^{-1} A_D T_D. \quad (14)$$

La matrice esponenziale  $e^A$  diviene

$$e^A = T_D^{-1} e^{A_D} T_D. \quad (15)$$

Quindi, se  $A$  è diagonalizzabile, la trasformazione di similitudine diagonalizza anche l'esponenziale.

## Esempio

Data  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ , si calcoli la matrice esponenziale  $e^A$ .

Si noti innanzitutto che  $A$  non è diagonale, quindi si devono calcolare gli autovalori:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= 0 \\ \det \left( \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ (\lambda - 1)^2 - 4 &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda - 3 &= 0 \\ \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 3} = 1 \pm 2 &\rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1. \end{aligned}$$

Dato che entrambi gli autovalori sono distinti, allora  $A$  è diagonalizzabile.

Si possono calcolare gli autovettori, uno per ciascun autovalore:

$$- \lambda_1 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 + 2v_2 = 3v_1 \\ 2v_1 + v_2 = 3v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2v_2 = 2v_1 \\ 2v_1 = 2v_2 \end{cases} \rightarrow v_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$- \lambda_2 = -1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 + 2v_2 = -v_1 \\ 2v_1 + v_2 = -v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2v_1 = -2v_2 \\ 2v_1 = -2v_2 \end{cases} \rightarrow v_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Quindi, possiamo definire la matrice degli autovalori  $T_D^{-1} = [v_{\lambda_1} v_{\lambda_2}]$  (l'ordine è invertibile), ottenendo  $A_D$  tale che

$$\begin{aligned} A_D &= T_D A T_D^{-1} \\ &= \left( \frac{1}{-1-1} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

che ora è diagonale, quindi è possibile calcolare la matrice esponenziale:

$$\begin{aligned} e^A &= T_D^{-1} e^{A_D} T_D \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^3 & e^{-1} \\ e^3 & -e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e^3+e^{-1}}{2} & \frac{e^3-e^{-1}}{2} \\ \frac{e^3-e^{-1}}{2} & \frac{e^3+e^{-1}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

NB: la matrice degli autovalori  $T_D^{-1}$  poteva essere definita come  $T_D^{-1} = [v_{\lambda_2} v_{\lambda_1}]$ . In tal caso  $A_D = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$ , quindi  $A_D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

- 
- matrice  $A$  non diagonale, ma diagonalizzabile (con autovalori complessi coniugati): come per gli autovalori reali,  $\exists T_D$   $n \times n$  non singolare (i.e.,  $\det(T_D) \neq 0$ ) tale che

$$T_D A T_D^{-1} = A_D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

e

$$T_D^{-1} \underbrace{T_D A T_D^{-1}}_{A_D} T_D = T_D^{-1} A_D T_D \Rightarrow A = T_D^{-1} A_D T_D. \quad (17)$$

Tuttavia in questo caso  $T_D^{-1}$  e  $T_D$  saranno composte da coefficienti complessi coniugati.

La matrice esponenziale  $e^A$  diviene

$$e^A = T_D^{-1} e^{A_D} T_D. \quad (18)$$

## Esempio

Data  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , si calcoli la matrice esponenziale  $e^A$ .

$A$  non è diagonale, quindi vanno calcolati i suoi autovalori:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= 0 \\ \det \left( \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ (\lambda - 1)^2 + 1 &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1 - 2} = 1 \pm i \rightarrow \lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i. \end{aligned}$$

NB: si sono ottenuti due autovalori distinti.

Si possono calcolare gli autovettori, uno per ciascun autovalore:

$$- \lambda_1 = 1 + i$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (1 + i) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = (1 + i)v_1 \\ v_1 + v_2 = (1 + i)v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 - v_1 - iv_1 = v_2 \\ v_1 = iv_2. \end{cases}$$

Ponendo  $v_1 = 1$ , si ottiene  $v_2 = -i$ , quindi  $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ .

$$- \lambda_2 = 1 - i$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (1 - i) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = (1 - i)v_1 \\ v_1 + v_2 = (1 - i)v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} iv_1 = v_2 \\ v_1 = -iv_2 \end{cases}.$$

Pongo  $v_1 = 1$ ,  $v_2 = i$ , quindi  $v = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ .

Definiamo la matrice degli autovalori  $T_D^{-1} = [v_{\lambda_1} v_{\lambda_2}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$ . Si calcola  $T_D = \frac{1}{i+i} \begin{bmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{bmatrix}$ .

Sapendo che  $\frac{1}{2i} = -0.5i$ ,  $T_D = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5i \\ 0.5 & -0.5i \end{bmatrix}$ .

Ora calcoliamo  $A_D$ :

$$\begin{aligned}
A_D &= T_D A T_D^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5i \\ 0.5 & -0.5i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.5 + 0.5i & -0.5 + 0.5i \\ 0.5 - 0.5i & -0.5 - 0.5i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.5 + 0.5i + 0.5i + 0.5 & 0.5 + 0.5i - 0.5i - 0.5 \\ 0.5 - 0.5i + 0.5i - 0.5 & 0.5 - 0.5i - 0.5i + 0.5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Si calcola ora la matrice esponenziale:

$$\begin{aligned}
e^A &= T_D^{-1} e^{A_D} T_D \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{1+i} & 0 \\ 0 & e^{1-i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5i \\ 0.5 & -0.5i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{1+i} & e^{1-i} \\ -ie^{1+i} & ie^{1-i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5i \\ 0.5 & -0.5i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.5e^{1+i} + 0.5e^{1-i} & 0.5ie^{i+1} - 0.5ie^{1-i} \\ -0.5ie^{1+i} + 0.5ie^{1-i} & 0.5e^{i+1} + 0.5e^{1-i} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$


---

## Numeri complessi

Un numero complesso è un numero che può essere espresso nella forma  $a + ib$ , dove  $a$  è la sua parte *reale*,  $b$  la parte *immaginaria*, mentre  $i$  è l'unità immaginaria definita come  $i = \sqrt{-1}$ .

Si definisce modulo di un numero complesso la quantità

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (19)$$

La fase di un numero complesso è invece definita come

$$\angle a + ib = \arctan \frac{b}{a}. \quad (20)$$

I numeri complessi possono essere espressi anche in forma esponenziale

$$a + ib = |a + ib| e^{i \angle a + ib}, \quad (21)$$

di cui

$$\cos(\angle a + ib) + i \sin(\angle a + ib). \quad (22)$$