www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Fondamenti di Automatica

Corso di laurea in Ingegneria dell'Automazione, AA 2019/2020

Esercitazione del 17/03/20

Valentina Breschi, Mara Tanelli

Esercizio 1

Si consideri il seguente sistema:

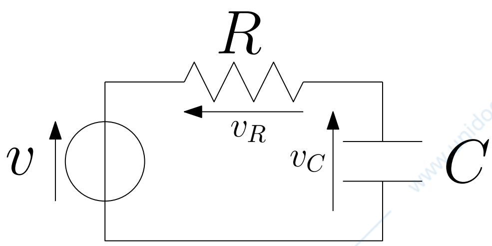
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t)\left(1 + \alpha x_2(t)\right) + u(t), \quad \alpha \in \mathbf{R} \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) + 3u(t) \end{cases}$$

1.1. Classificare il sistema (in particolare per $\alpha = 0$ e $\alpha \neq 0$)

1.2. Scrivere il sistema in forma di stato per $\alpha = 0$

Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema elettrico



2.1. Derivare (e classificare) il modello in forma di stato

2.2. Determinare il movimento forzato dello stato e dell'uscita per $u(t) = 1\,\forall t$

2.3. Cosa succede se $x(0) = x_0 \neq 0$ e $u(t) = 1\,\forall t$?

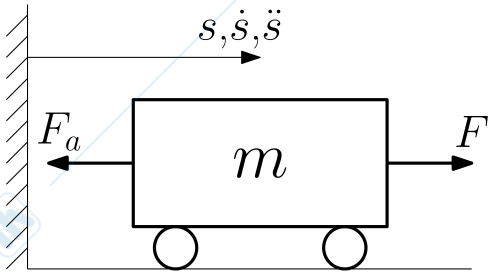
2.4. Cosa succede se $x(0) = 1$ e $u(t) = 1\,\forall t$?

Esercizio 3

Si consideri il seguente sistema meccanico:

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari



Per ipotesi, la forza di attrito $F_a(t) = \alpha \dot{s}(t)$ (attrito viscoso, proporzionale alla velocitÃă)

3.1. Derivare (e classificare) il modello in forma di stato

3.2. Posto $\alpha = 3$ e $m = 1$, calcolare il movimento libero dello stato e dell'uscita con condizione iniziale generica $x(0) = [x_{10}, x_{20}]^T$

3.3. Determinare il movimento forzato dello stato e dell'uscita per $u(t) = \bar{u} \, \forall t$

3.4. Determinare la risposta complessiva del sistema (stato e uscita) per $u(t) = \bar{u} \, \forall t$ e $x(0) = [x_{10}, x_{20}]^T$

Esercizio 4

Si consideri il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -4x_1(t) + 5x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

4.1. Classificare il sistema

4.2. Determinare il movimento libero associato al generico stato iniziale $x(0) = [x_{10}, x_{20}]^T$

4.3. Studiare la risposta libera quando lo stato iniziale appartiene a uno degli autovettori

4.4. Determinare la risposta libera per $x(0) = [2, 1]^T$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esercizio 1: Classificazione e forma di stato

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t)(1+\alpha x_2(t)) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) + 3u(t) \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1) Classificare il sistema (in particolare per $\alpha = 0$ e $\alpha \neq 0$)

- Dato che lo stato $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ → l'ordine del sistema è 2 (indipendentemente dal valore di α)
- Indipendentemente da α, il sistema ha un solo ingresso $u(t)$ ed una sola uscita $y(t)$ (non avendo dipendente vettoriali)
  → il sistema è SISO
- Dato che l'equazione di uscita $y(t) = x_1(t) + 3u(t)$ dipende esplicitamente dall'ingresso → il sistema è proprio
  (n.b. $y(t) = g(x(t), u(t))$)
- Dato che α è una costante (così come tutti gli altri coefficienti)
  → il sistema è tempo-invariante

NB Il sistema considerato è dinamico (anche se sappiamo $u(t)$, senza ulteriori informazioni non siamo in grado di determinare $y(t)$)

Se: • $\alpha = 0$
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) + 3u(t) \end{cases}$$

- Tutte le equazioni del sistema sono lineari
  → il sistema è lineare

• $\alpha \neq 0$
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) + 3\alpha \underline{x_2^2(t)} + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) + 3u(t) \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- Per la presenza del termine nonlineare nella prima equazione → il sistema è non lineare

2) Scrivere il sistema in forma di stato per $\alpha = 0$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) + 3u(t) \end{cases}$$

Dobbiamo trovare le matrici: $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 1}$
$C \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, $D \in \mathbb{R}^{1\times 1}$

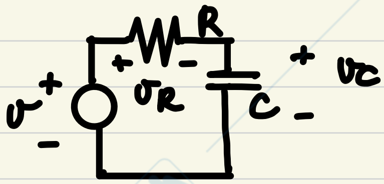
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad D = 3$$

(soffermandosi sulla scrittura delle singole ed evidenziando le varie dipendenze)

→ $D \neq 0$ caratteristica di qualsiasi sistema proprio (non in senso stretto)

Esercizio 2: circuito RC

Si consideri il seguente sistema elettrico



1) Derivare e classificare il modello in forma di stato

Si noti che $i_R(t) = i_C(t)$ dato che condensatore e resistenza sono in serie

Per la legge di Kirchhoff alle maglie:

$$v(t) - v_R(t) - v_C(t) = 0$$

è un segnale che diamo dall'esterno per forzare il circuito $\Rightarrow$ $u(t) = v(t)$!

In base alla legge di Ohm: $v_R(t) = R i_R(t) = R i_C(t)$
sulla base della relazione costitutiva del condensatore:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

Per sostituzione si ha quindi:

$$u(t) - RC\frac{dv_C(t)}{dt} - v_C(t) = 0$$

e isolando la derivata si ottiene $RC\dfrac{dv_C(t)}{dt} = -v_C(t) + u(t)$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

e quindi $\underbrace{\frac{d\,v_C(t)}{dt}}$ $= -\frac{1}{RC} v_C(t) + \frac{1}{RC} u(t)$

è l'unica derivata presente nel modello } questo ci da un suggerimento nella scelta della variabile di stato

$x(t) = v_C(t)$ **Nota:** quando ho condensatori C e induttanze L lo stato per convenzione ha come stati: le correnti di induttore e le tensioni ai capi dei condensatori

L'equazione (con la nuova definizione di stato) diventa:

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{RC} x(t) + \frac{1}{RC} u(t)$$

Assumendo di essere in grado di misurare le tensione ai capi del condensatore il modello in spazio di stato "completo" del sistema è:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{RC} x(t) + \frac{1}{RC} u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$
(tenendo conto della definizione di output considerata

- → $x(t) \in \mathbb{R}$ in quanto lo stato è dato solo dalla tensione ai capi del condensatore → il sistema è del 1° ordine
- → $u(t) \in \mathbb{R}$ dato che l'unico ingresso è la tensione generata dal generatore
  $y(t) \in \mathbb{R}$ in quanto coincide con lo stato } il sistema è siso
- → Non ci sono nonlinearità nelle equazioni di stato e di uscita → il sistema è lineare
- → Dato che la resistenza R e la capacità C non cambiano valore nel tempo → il sistema è tempo-invariante
- → Non si ha dipendenza diretta della y da u → il sistema è strettamente proprio

Cerchiamo quindi le matrici A, B, C e D del sistema LTI
sapendo già che sono scalari

- → Dato che il sistema è strettamente proprio $D = d = 0$
- → $A = a = -\frac{1}{RC} < 0$ (dato che R, C per il loro significato fisico sono positive e supponiamo non nulle)
- → $B = \frac{1}{RC} > 0$, $C = 1$.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

2) Determinare il movimento forzato dello stato e dell'uscita per $u(t) = 1 \ \forall t$

Richiamo di teoria: dato che il sistema è lineare possiamo usare le formule di Lagrange

$$x_F(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

$$y_F(t) = C x_F(t) + D u(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)$$

$a = -\frac{1}{RC}$, $b = \frac{1}{RC}$, $c = 1$, $d = 0$ significa che una volta trovato $x_F(t)$ noi sappiamo già $y_F(t)$

$$x_F(t) = \int_0^t e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} \frac{1}{RC} d\tau = e^{-\frac{1}{RC}t} \int_0^t e^{\frac{1}{RC}\tau} \frac{1}{RC} d\tau =$$

per sostituzione

$$= e^{-\frac{1}{RC}t} \left[e^{\frac{1}{RC}\tau} \right]_0^t =$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{RC}t} = y_F(t)$$

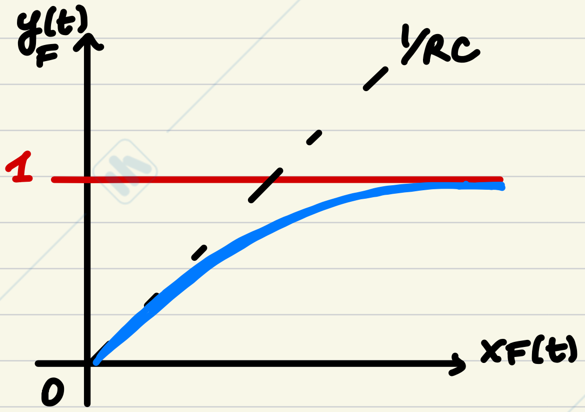
si noti che:

- $\lim_{t \to +\infty} x_F(t) = 1 = u(t)$ → con il tempo la tensione ai capi del condensatore tende alla forzante
- $\frac{d x_F(t)}{dt} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$ → la pendenza iniziale della risposta è $\frac{1}{RC}$ (che corrisponde al valore assoluto di a)
- Più $\frac{1}{RC}$ è grande più è veloce la convergenza al valore di input (più è veloce la carica del condensatore) → se definiamo $\tau = RC$ come la costante di tempo caratteristica del circuito, più è grande tale costante più è lenta la risposta del circuito, e quindi il suo transitorio.
- $-\frac{1}{RC}$ è l'autovalore della "matrice" a

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Potriamo quindi rappresentare in modo approssimato la risposta come segue.



8) Cosa succede se $x(0) \neq x_0$ e $u(t) = 1 \ \forall t$?

In questo caso dobbiamo considerare anche la risposta libera del sistema

$$x_\ell(t) = x_0 e^{At} = x_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \rightarrow y_\ell(t) = x_\ell(t)$$

Dato che il sistema è lineare possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, e quindi:

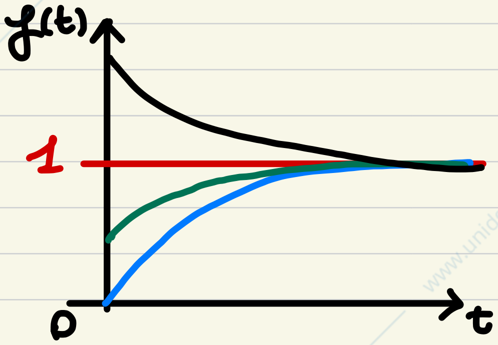
$$x(t) = x_\ell(t) + x_F(t)$$

$$\rightarrow x(t) = x_0 e^{-\frac{1}{RC}t} + (1 - e^{-t/RC}) =$$

$$= \underbrace{(x_0 - 1)}_{} e^{-\frac{1}{RC}t} + 1$$

ho una dipendenza dal valore iniziale che però "svanisce" nel tempo

Dato una qualsiasi condizione iniziale (date le caratteristiche di A) l'effetto della condizione iniziale tende ad esaurirsi nel tempo e la tensione ai capi del condensatore tende comunque a diventare pari a 1 (a raggiungere quello che chiameremo il suo valore a regime)

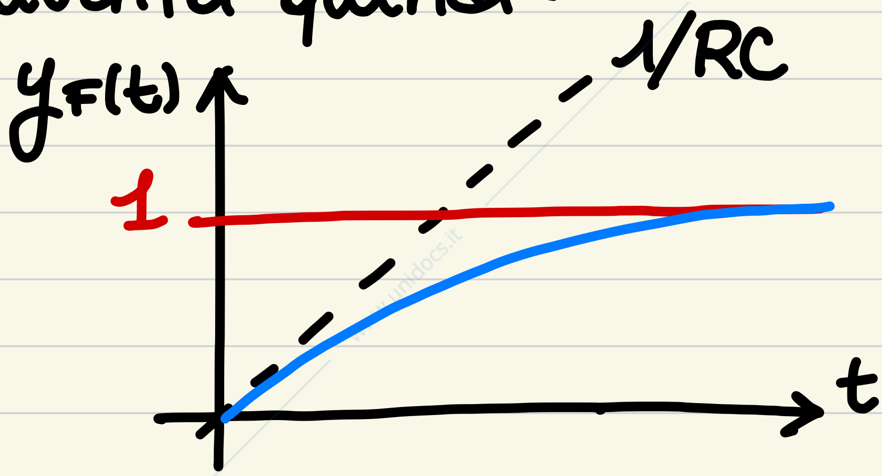


www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Errata corrige:

(1) Nel primo grafico della pagina precedente l'asse delle ascisse è quella del tempo. Il grafico diventa quindi:



(2) Nel testo del punto 8 abbiamo $X(0) = X_0 \neq 0$ e non $X(0) \neq X_0$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

b) Cosa succede se $x(0)=1$ e $u(t)=1 \ \forall t$?

Prendiamo l'equazione di prima e per sostituzione abbiamo:

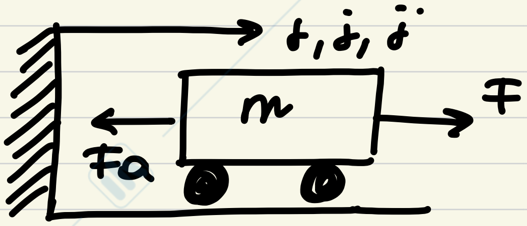
$x(t)=1 \ \forall t$ → Non mi muovo dalla condizione iniziale
(dato che generatore e condensatore hanno la stessa tensione ai loro capi)

→ Abbiamo trovato quella che è una condizione di equilibrio per il sistema a partire da un ingresso costante $u(t)=\bar{u}=1 \ \forall t$

Infatti $\dot{x}(t)=0 \rightarrow x(t)=x_0=1 \ \forall t$

Esercizio 8: Carrello

Si consideri il sistema meccanico in figura:



Per ipotesi la forza di attrito $F_a(t)=h\dot{y}$ (forza di attrito viscoso) → quindi proporzionale alla velocità del carrello $\dot{y}$

Supponiamo di riuscire a misurare la posizione y del carrello nel tempo.

1) Derivare (e classificare) il modello in forma di stato

posizione del carrello (è quello che misuro, e quindi la mia uscita)

Dato che F è la forza che viene impressa dall'esterno per far muovere il carrello

→ Il modello del sistema è SISO

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Per trovare un modello del sistema possiamo utilizzare la 2° legge di Newton:

$$\underbrace{F - F_a}_{\text{somma delle forze agenti sul sistema considerata la loro azione (detto il segno)}} = m\underbrace{\ddot{s}}_{\text{l'accelerazione}}$$

→ Sostituendo la definizione di $F_a = h\dot{s}$ abbiamo

$$F - h\dot{s} = m\ddot{s}$$

Notate che questa è la stessa equazione che si otteneva nel sistema massa molla smorzatore fatto in "classe", ma in assenza della molla.

→ Possiamo costruire il modello in spazio di stato seguendo la stessa logica

$$x(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ \dot{s}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{m} \end{bmatrix}}^{A} x(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}}^{B} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t) \end{cases}$$

$D = 0$
→ il sistema è strettamente proprio!

Il resto della classificazione è analogo a quello che avete fatto per il caso massa-molla-smorzatore.

2) Posto $h = 3$ e $m = 1$, calcolare il movimento libero di stato e uscita per una generica condizione iniziale $x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$.

Con questi valori il nostro modello diventa:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

sappiamo anche che per risolvere questo punto dell'esercizio potrebbemo utilizzare lagrange, ed in particolare possiamo sfruttare il fatto che:

$$x_e(t) = e^{At} x_0$$

→ A differenza che nel caso del circuito RC però in questo caso dobbiamo calcolare l'esponenziale di matrice.

Vediamo se c'è un modo per semplificare questo calcolo partendo dal guardare la seconda equazione di stato (che esplicito qui di seguito)

$$\dot{x}_2(t) = -8x_2(t) + u(t)$$

(poi metto $u(t)=0$ dato che sto valutando il movimento libero)

→ quella che abbiamo è una equazione che non dipende dall'altra componente dello stato $x_1(t)$! Quindi l'evoluzione di $x_2(t)$ dipende solo da $x_2(t)$ stessa!

Guardiamo ora la prima equazione di stato:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

Si nota che una volta trovato $x_2(t)$ siamo in grado di calcolare anche $x_1(t)$

Abbiamo quello che è un sistema A CASCATA, dove la risoluzione di un equazione di stato (dipendente da una sola componente) ci permette di risolvere anche tutte le altre (a catena)

↓ è una caratteristica di tutti quei sistemi lineari che hanno matrice A triangolare!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

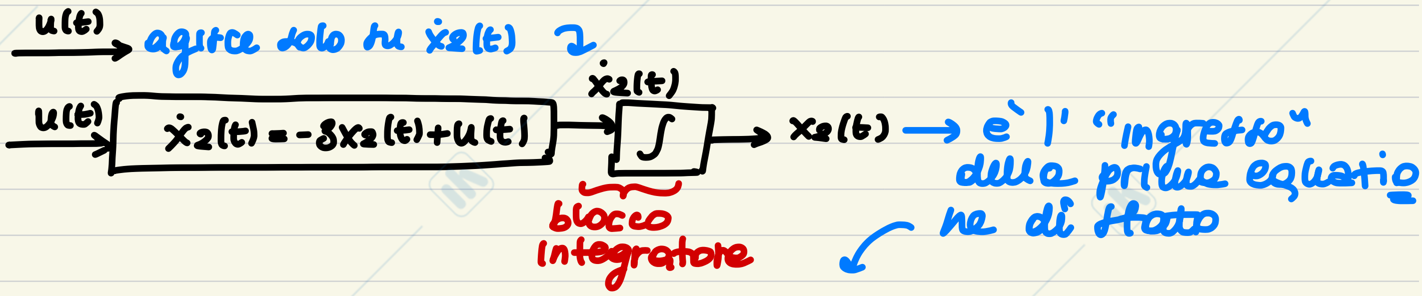
per chiarire meglio il concetto possiamo rappresentare graficamente il sistema come segue

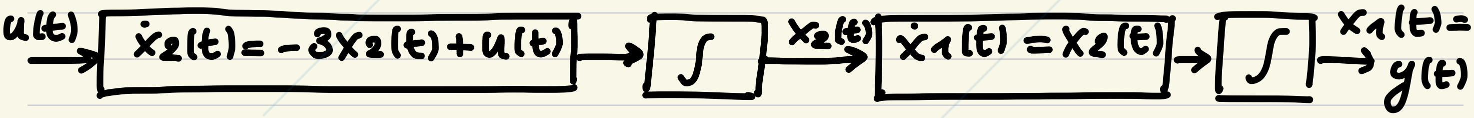
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -8x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

come segue:





Vedete che abbiamo una vera e propria "cascata" di equazioni differentiali + integratori.

In casi come questo (data l' indipendenza della seconda equazione di stato dalla prima componente) possiamo inizialmente risolvere (per $u(t)=0$, dato che siamo interessati al movimento libero)

$$\dot{x}_2(t) = -3x_2(t)$$

Equazione differenziale del 1° ordine, la cui soluzione è:

$$x_2(t) = \beta e^{rt}$$

la soluzione deve verificare: $\begin{cases} x_2(0) = x_{20} \\ \dot{x}_2(t) = -3x_2(t) \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} \beta = x_{20} \\ \beta r e^{rt} = -3\beta e^{rt} \end{cases} \rightarrow$ Da questo si ottiene $r = -3$

$\rightarrow \quad x_2(t) = x_{20} e^{-3t}$

Nota che $\dot{x}_2(t) = -3x_2(t)$ non è altro che un sistema del 1° ordine, e quindi si potrebbe comunque usare le formule di Lagrange notando che $A = -3$

$$\rightarrow \quad x_2(t) = x_{20} e^{At} = x_{20} e^{-3t}$$

Abbiamo quindi capito quella che è l'evoluzione libera della seconda

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

componente dello stato. Ora dobbiamo trovare l'evoluzione libera di $x_1(t)$ a partire da:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

Nota bene: $x_2(t)$ l'abbiamo calcolata prima e quindi è un segnale di cui conosciamo l'evoluzione nel tempo. In questo caso possiamo vedere $x_2(t)$ come un "ingresso" ed utilizzare la formula di Lagrange. Per fare questo facciamo un piccolo cambio di variabile e chiamiamo:

$$w(t) = x_2(t)$$

Possiamo riscrivere l'equazione che descrive la dinamica della prima componente dello stato come:

$$\dot{x}_1(t) = w(t)$$

Nota bene: se guardiamo a $w(t)$ come ad un ingresso esogeno, questa è l'equazione di un sistema del 1° ordine con $A = 0$ e $B = 1$. Nota bene bene che $w(t)$ non è un vero e proprio ingresso esterno ma è qualcosa di interno al sistema → Non posso usare solo la formula della risposta libera (per calcolare la risposta libera di $x_1(t)$) ma devo usare tutta la formula di Lagrange

$$x_{1\ell}(t) = e^{at}x_{10} + \int_0^t e^{a(t-\tau)} b\, w(\tau)\, d\tau$$

con $a = 0$ e $b = 1$ → $x_{1\ell}(t) = e^{0t}x_{10} + \int_0^t e^{0(t-\tau)} w(\tau)\, d\tau$

$w(t) = x_{2\ell}(t) = x_{20}e^{-3t}$

$$\rightarrow x_{1\ell}(t) = x_{10} + \int_0^t x_{20} e^{-3\tau} d\tau =$$

risolto x sostituzione $=$ $x_{10} - \frac{1}{3}\left[e^{-3t} - 1\right]x_{20} =$

$$= x_{10} + \frac{x_{20}}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}x_{20}$$

Abbiamo quindi ottenuto che il movimento libero del sistema è:

$$\begin{cases} x_{1\ell}(t) = x_{10} + \frac{x_{20}}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}x_{20} \\ x_{2\ell}(t) = x_{20}e^{-3t} \end{cases}$$

Nota bene: la risposta libera è data da una combinazione delle condizioni iniziali e dei modi del sistema, i quali

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

a loro volta dipendono dagli autovalori della matrice A, ossia dell'intero sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \rightarrow \det(\lambda I - A) = 0 \rightarrow \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda+3 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

I corrispondenti modi sono e^{-3t}, $e^{0t} = 1$

Analizziamo ora secondo la risposta ottenuta per $t \to +\infty$:

- $\lim_{t\to\infty} x_{1e}(t) = \lim_{t\to\infty} x_{10} + \frac{x_{20}}{3} - \frac{x_{20}}{3}e^{-3t} =$
  $= \underbrace{x_{10} + \frac{x_{20}}{3}}$ la posizione finale in assenza di forzanti dipende da posizione e velocità iniziale
- $\lim_{t\to\infty} x_{2e}(t) = \lim_{t\to\infty} x_{20}e^{-3t} = 0$

Come logico dalla fisica del problema abbiamo che senza azione forzante la velocità tende ad annullarsi (il carrello si ferma ad una posizione che dipende dalla posizione e dalla velocità iniziale).
→ il sistema che stiamo considerando non si scorda della condizione iniziale!

Nota bene: dato che $y(t) = x_1(t)$, una volta trovato $x_{1e}(t)$ abbiamo trovato anche il movimento libero dell'uscita.

3) Determinare il movimento forzato dello stato e dell'uscita per $u(t) = \bar{u}$, $\forall t$.

Sfruttiamo ancora una volta la natura triangolare del sistema considerando la seconda equazione di stato:

$$\dot{x}_2(t) = -3x_2(t) + u(t)$$

che, come detto in precedenza, può essere visto come un sistema del I° ordine, con $A = -3$ e $B = 1$. Applico quindi Lagrange:

$$x_{2F}(t) = \int_0^t e^{-3(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau = \int_0^t e^{-3t} e^{3\tau} \bar{u}\, d\tau =$$

$$= e^{-3t} \frac{1}{3}\left[e^{3t} - 1\right]\bar{u} = \frac{1}{3}\left[1 - e^{-3t}\right]\bar{u}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Chiamando come prima $x_{2F}(t) = w(t)$, abbiamo che:

$$\dot{x}_1(t) = \underbrace{x_{2F}(t)}_{} = w(t)$$

visto che stiamo trascurando la risposta libera

Possiamo applicare nuovamente Lagrange per:

$$\dot{x}_1(t) = w(t) \qquad (a=0,\ b=1)$$

$$\rightarrow \quad x_{1F}(t) = \int_0^t \underbrace{e^{a(t-\tau)}}_{=1} \underset{=1}{b}\, w(\tau)\,d\tau = \int_0^t w(\tau)\,d\tau = \int_0^t x_{2F}(\tau)\,d\tau = \int_0^t \frac{1}{3}\bar{u}\,d\tau - \int_0^t \frac{1}{3} e^{-3\tau}\bar{u}\,d\tau$$

$$\rightarrow \quad x_{1F}(t) = \frac{1}{3}\bar{u}\cdot t + \frac{1}{9}\left[e^{-3t}-1\right]\bar{u} = \frac{1}{3}\bar{u}\left[t + \underbrace{\frac{e^{-3t}-1}{3}}_{-\frac{x_{2F}(t)}{\bar{u}}}\right]$$

Il movimento forzato totale è:

$$\begin{cases} x_{1F}(t) = \frac{1}{3}\bar{u}\left[t + \frac{e^{-3t}-1}{3}\right] \\ x_{2F}(t) = -\frac{e^{-3t}-1}{3}\bar{u} \end{cases}$$

Nota bene: dato che $y(t) = x_1(t)$, una volta trovata $x_{1F}(t)$ abbiamo trovato anche il movimento forzato dell'uscita.

Studiamo come si comporta per $t \to \infty$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} x_{1F}(t) &= +\infty \\ \lim_{t\to\infty} x_{2F}(t) &= \frac{\bar{u}}{3} \end{aligned}\right\}$$

la velocità tende ad essere costante e la posizione a divergere (nonostante l'attrito le forze esterne mi permette di continuare a spostare il carrello)

Nota: si ha un equilibrio tra F_e ed F, in quanto $\dot{x}$ è costante.

4) Determinare la risposta complessiva del sistema (stato e uscita)

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

per $\bar{u} = u(t)$ $\forall t$ e $x_0 = [x_{10}, x_{20}]^T$.

Posso applicare il principio di sovrapposizione degli effetti e quindi sfruttare i risultati precedenti:

$$x_1(t) = x_{1e}(t) + x_{1F}(t) = x_{10} + \frac{x_{20}}{3}(1 - e^{-3t}) + \frac{1}{3}\bar{u}\left[t + \frac{e^{-3t} - 1}{3}\right]$$

$$x_2(t) = x_{2e}(t) + x_{2F}(t) = x_{20}e^{-3t} + (1 - e^{-3t})\frac{\bar{u}}{3}$$

$\rightarrow y(t) = x_1(t)$.

Il tutto si poteva risolvere per diagonalizzazione (utilizzando Lagrange su tutto il sistema)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & +1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Per diagonalizzare A, dato che $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -3$, calcoliamo gli autovettori corrispondenti:

- $\lambda_1 = 0 \rightarrow \quad A v_1 = \lambda v_1$ con $v_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ -3\beta = 0 \end{cases} \quad \forall \alpha$$

$\rightarrow \beta = 0$, α qualsiasi $\rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- $\lambda_2 = -3 \rightarrow \quad A v_2 = \lambda_2 v_2$ con $v_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \beta = -3\alpha \\ -3\beta = -3\beta \text{ (vero } \forall \beta) \end{cases}$$

scelgo $\alpha = 1 \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow T^{-1} = [v_1 \;\; v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow T = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$ diagonale con autovettori!

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Nota: A e $\tilde{A}$ sono matrici simili, dato che hanno gli stessi autovalori

→ $\tilde{A} = TAT^{-1}$ è diagonale perchè:

$$A\underbrace{[v_1 \vdots v_2 \vdots \cdots \vdots v_n]}_{T^{-1}} = [v_1 \vdots v_2 \vdots v_n]\,\mathrm{diag}(\lambda) \text{ per}$$

def. di autovettori e autovalori

$$AT^{-1} = T^{-1}\underbrace{\mathrm{diag}(\lambda)}_{\tilde{A}} \rightarrow \tilde{A} = TAT^{-1}!$$

→ $e^{At} = T^{-1}e^{\tilde{A}t}T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & +1/3 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & -\frac{e^{-3t}}{3} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-e^{-3t}}{3} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$

dato che $A = T^{-1}\tilde{A}T$

Utilizzando Lagrange abbiamo:

$$x(t) = e^{At}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \int_0^t e^{At-A\tau}Bu(\tau)d\tau =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-e^{-3t}}{3} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-e^{-3t}}{3} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-e^{+3\tau}}{3} \\ 0 & e^{+3\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\bar{u}\,d\tau =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-3t}/3 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{3t}/3 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot \int_0^t \begin{bmatrix} 1-e^{+3\tau}/3 \\ e^{+3\tau} \end{bmatrix}\bar{u}\,d\tau =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} x_{10} + \frac{(1-e^{-3t})}{3}x_{20} \\ e^{-3t}x_{20} \end{bmatrix}}_{x_\ell(t)} + x_F(t)$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$x_F(t) = \begin{bmatrix} 1 & (1-e^{-3t})/3 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (t - 1/3(e^{3t}-1))\bar{u}/3 \\ \frac{1}{3}[e^{3t}-1]\bar{u} \end{bmatrix} =$$

$$x_{1F}(t) = \left[t - \frac{1}{3}(e^{3t}-1)\right]\frac{\bar{u}}{3} + \frac{1}{9}(1-e^{3t})(e^{3t}-1)\bar{u} =$$

$$= \frac{t}{3}\bar{u} - \cancel{\frac{1}{9}(e^{3t}-1)\frac{\bar{u}}{3}} + \cancel{\frac{1}{9}(e^{3t}-1)\frac{\bar{u}}{3}} - \frac{1}{9}(1-e^{-3t})\bar{u} =$$

$$= \frac{\bar{u}}{3}\left[t + \frac{1}{3}(e^{-3t}-1)\right]$$

$$x_{2F}(t) = \frac{1}{3}(1-e^{-3t})\bar{u}$$

→ Otteniamo la stessa cosa che avevamo prima (ma con calcoli più semplici)

Esercizio 4: diagonalizzazione

Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -4x_1(t) + 5x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

1) Classificare il sistema → dinamico, del 2° ordine, SISO, strettamente proprio, lineare, tempo-invariante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \;\; 1] \quad D = 0$$

2) Determinare il movimento libero associato al generico stato iniziale $x(0) = [x_{10}, x_{20}]^T$

$$x_\ell(t) = \underbrace{e^{At}}_{} x_0$$

dobbiamo calcolare l'esponenziale di matrice che, per definizione, è:

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \dots$$

→ difficile da trovare in forma chiusa.

Se è A è diagonale so tuttavia che e^{At} è una matrice diagonale,

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

i cui elementi non nulli sono gli esponenziali degli elementi nella diagonale.

Procedo facendo tutte le operazioni che mi permettano di riportarmi il più vicino possibile a questo caso.

1) Trovo gli autovalori di A

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -4 & 5\end{bmatrix} \rightarrow \lambda I - A = \begin{bmatrix}\lambda+1 & -2\\ 4 & \lambda-5\end{bmatrix} \rightarrow \det(\lambda I - A)=0$$

$\rightarrow (\lambda+1)(\lambda-5)+8=0$

$\rightarrow \lambda^2-4\lambda-5+8=0$

$\rightarrow \lambda^2-4\lambda+3=0 \rightarrow (\lambda-3)(\lambda-1)=0 \rightarrow \lambda_1=3,\ \lambda_2=1$

2) Trovo gli autovettori associati agli autovalori

$A v_1 = \lambda_1 v_1 \qquad v_1=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \qquad \lambda_1=3$

$$\rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 2\\ -4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}-\alpha+2\beta=+3\alpha \rightarrow 4\alpha=2\beta \rightarrow \beta=2\alpha\\ -4\alpha+5\beta=3\beta \rightarrow -2\beta+5\beta=3\beta\ \forall\beta\end{cases}$$

$\rightarrow v_1=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$

$A v_2=\lambda_2 v_2 \qquad v_2=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \qquad \lambda_2=1$

$$\rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 2\\ -4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}-\alpha+2\beta=\alpha \rightarrow \beta=\alpha\\ -4\alpha+5\beta=\beta \rightarrow -4\beta+5\beta=\beta\ \forall\beta\end{cases}$$

$v_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix} \rightarrow T=\frac{1}{1-2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}=TAT^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}3 & +1\\ 6 & 1\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

sono gli autovalori di A!

$$e^{\tilde{A}t}=\begin{bmatrix}e^{3t} & 0\\ 0 & e^{t}\end{bmatrix} \rightarrow e^{At}=T^{-1}e^{\tilde{A}t}T$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -e^{3t} & e^{3t} \\ 2e^{t} & -e^{t} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -e^{3t}+2e^{t} & e^{3t}-e^{t} \\ -2e^{-3t}+2e^{t} & 2e^{3t}-e^{t} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow x_{\ell}(t) = e^{At}x_0 = \begin{bmatrix} -e^{+3t}+2e^{t} & e^{3t}-e^{t} \\ -2e^{+3t}+2e^{t} & 2e^{t3}-e^{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-x_{10}+x_{20})e^{3t}+(2x_{10}-x_{10})e^{t} \\ 2(-x_{10}+x_{20})e^{3t}+(2x_{0}-x_{20})e^{t} \end{bmatrix}$$

3) Studiare la risposta libera quando lo stato iniziale è uno degli autovettori

caso 1: $x(0) = v_1 x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_0$

$$\rightarrow x_{\ell}(t) = \begin{bmatrix} x_0 e^{3t} \\ 2e^{3t} x_0 \end{bmatrix}$$

caso 2: $x(0) = v_2 x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_0 \rightarrow x_{\ell}(t) = \begin{bmatrix} x_0 e^{t} \\ x_0 e^{t} \end{bmatrix}$

In entrambi i casi vedo solo l'autovalore "eccitato" dato che sto considerando l'evoluzione del sistema lungo l'autovettore corrispondente.

4) Determinare la risposta libera per $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ } non sono nella condizione precedente $\Rightarrow$ eccito entrambi i modi

$$\rightarrow x_{\ell}(t) = \begin{bmatrix} -e^{3t}+3e^{t} \\ -2e^{3t}+3e^{t} \end{bmatrix}$$

sostituendo

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$e^{At}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{3t}&0\\0&e^{t}\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}-e^{3t}&e^{3t}\\2e^{t}&-e^{t}\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}-1&1\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-e^{3t}+2e^{t}&e^{3t}-e^{t}\\-2e^{-3t}+2e^{t}&2e^{3t}-e^{t}\end{bmatrix}$$

$$\to x_l(t)=e^{At}x_0=\begin{bmatrix}-e^{+3t}+2e^{t}&e^{3t}-e^{t}\\-2e^{+3t}+2e^{t}&2e^{t3}-e^{t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{10}\\x_{20}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-x_{10}+x_{20})e^{3t}+(2x_{10}-x_{10})e^{t}\\2(x_{10}+x_{20})e^{3t}+(2x_{10}-x_{20})e^{t}\end{bmatrix}$$

3) Studiare la risposta libera quando lo stato iniziale è uno degli autovettori

caso 1: $x(0)=v_1x_0=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}x_0$

$$\to x_l(t)=\begin{bmatrix}x_0e^{3t}\\2e^{3t}x_0\end{bmatrix}$$

caso 2: $x(0)=v_2x_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}x_0 \to x_l(t)=\begin{bmatrix}x_0e^{t}\\x_0e^{t}\end{bmatrix}$

In entrambi i casi vedo solo l'autovalore "eccitato" dato che sto considerando l'evoluzione del sistema lungo l'autovettore corrispondente.

4) Determinare la risposta libera per $x(0)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ } non sono nella condizione precedente
$\Rightarrow$ eccito entrambi i modi

$$\to x_l(t)=\begin{bmatrix}-e^{3t}+3e^{t}\\-2e^{3t}+3e^{t}\end{bmatrix}$$

sostituendo

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari