FONDAMENTI DI AUTOMATICA I - Ingegneria Elettrica **Prof.ssa Mara Tanelli**
Prima Prova in Itinere del 20 novembre 2009

1. Si consideri il sistema dinamico lineare e tempo invariante con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + x_2(t) + 3u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_2(t)$$
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

1.1 Studiare la stabilità del sistema.

La matrice A del sistema è $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

i cui autovalori sono $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = 1$

Poiché esiste un autovalore con parte reale > 0, per il criterio degli autovalori si può concludere che il sistema è <u>INSTABILE</u>

1.2 Calcolare il <u>movimento libero dell'uscita</u> del sistema associato alla condizione iniziale $x_1(0) = x_2(0) = 1$.

La 2ª eq. è disaccoppiata dalla prima (x_2 è indip. da x_1)
Risolvo le eq. separatamente

<u>IIª eq</u> $\dot{x}_2(t) = x_2(t)$, $x_2(0) = 1 \Rightarrow x_2(t) = e^t, t \geq 0$

<u>Sostituisco nella Iª eq. e pongo $u=0$</u>

$$\dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + e^t, \quad x_1(0) = 1$$

$$x_1(t) = e^{-3t}x_1(0) + \int_0^t e^{-3(t-\tau)} e^{\tau} d\tau = e^{-3t} + e^{-3t}\int_0^t e^{4\tau} d\tau =$$

$$= e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{-3t}\left[e^{4t} - 1\right] = \frac{3}{4}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^t, \quad t \geq 0$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{3}{4}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^t + e^t = \boxed{\frac{3}{4}e^{-3t} + \frac{5}{4}e^t, \quad t \geq 0}$$

1.3 Si dica, motivando la risposta, se esistono condizioni iniziali diverse da $x_1(0) = x_2(0) = 0$ tali che il movimento libero dell'uscita tende a zero per $t \to +\infty$.

Tutte le condizioni iniziali del tipo $\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ sono tali per cui $\lim_{t \to +\infty} y_L(t) = 0$

in quanto se $x_2(0) = 0$ il modo associato all'autovalore ~~xxx~~ a parte reale positivo non compare nel mov. dell'uscita

2. Si consideri il sistema dinamico non lineare con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1(t) = 2x_1^3(t) - 2x_1^2(t)x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t)$$
$$y(t) = x_2(t)$$

2.1 Determinare tutti gli stati $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ e le uscite $\bar{y}$ di equilibrio associati all'ingresso costante $u(t) = \alpha$, $t \geq 0$, con α parametro reale.

$$\begin{cases} 2\bar{x}_1^3 - 2\bar{x}_1^2\bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_2 = \bar{u} = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\bar{x}_1^2(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = 0 \\ \bar{x}_2 = \alpha \end{cases}$$

EQ. 1 $\begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = \alpha \end{cases}$, $\bar{y} = \alpha$ EQ. 2 $\begin{cases} \bar{x}_1 = \alpha \\ \bar{x}_2 = \alpha \end{cases}$ $\bar{y} = \alpha$

2.2 Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio determinato al punto precedente caratterizzato da $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$.

Eq. del ~~generico~~ sistema lin. attorno al generico punto di eq:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = \left[6\bar{x}_1^2 - 4\bar{x}_1\bar{x}_2\right]_{eq} \delta x_1 - 2\bar{x}_1^2\Big|_{eq} \delta x_2 \\ \delta\dot{x}_2 = -\delta x_2 + \delta u \end{cases}$$

$$\delta y = \delta x_2$$

In $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (\alpha, \alpha)$ si ha $\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = 2\alpha^2\delta x_1 - 2\alpha^2\delta x_2 \\ \delta\dot{x}_2 = -\delta x_2 + \delta u \end{cases}$

$$\delta y = \delta x_2$$

2.3 Posto ora $\alpha = 0$, studiare la stabilità del sistema linearizzato e valutare, se possibile, la stabilità del movimento di equilibrio del sistema non lineare.

La matrice A del sistema lin. per $\alpha=0$ è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ i cui autovalori sono $\lambda=0$, $\lambda=-1$

Poiché $Re(\lambda_i) \leq 0 \; \forall i$ e $\exists i : Re(\lambda_i) = 0$ con l'autovalore a parte reale nullo di molt. alg 1 il sistema LIN. è semplicem. stabile.

Poiché $\exists$ un autov. a parte reale nulla del sist. linearizzato non si può concludere nulla circa le propr. di stab. del mov. di eq.

3. Si consideri la seguente funzione di trasferimento di un sistema lineare e tempo invariante di ordine due

$$G(s) = 2\frac{s+50}{s^2+2s+10}.$$

3.1 Determinare tipo, guadagno, poli e zeri di $G(s)$.

TIPO $g=0$

$\mu = G(0) = \frac{100}{10} = 10$

ZERO $s=-50$

POLI: $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-10} = -1 \pm 3i$

3.2 Si calcoli l'espressione analitica della risposta del sistema $y(t)$ all'ingresso $u(t) = \text{sca(t)}$ in funzione del tempo.

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2(s+50)}{s^2+2s+10}\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+10}$$

$$\frac{A(s^2+2s+10)+s(Bs+C)}{\dots} = \frac{2(s+50)}{\dots}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+C=2 \\ 10A=100 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A=-10 \\ C=2-2A=-18 \\ A=10 \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{10}{s} + \frac{-10s-18}{s^2+2s+10} = \frac{10}{s} + K_1\frac{(s+1)}{(s+1)^2+9} + K_2\frac{3}{(s+1)^2+9}$$

$$\begin{cases} K_1 = -10 \\ K_1+3K_2 = -18 \end{cases} \quad \begin{cases} K_1=-10 \\ K_2 = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 10 - 10e^{-t}\cos(3t) - \frac{8}{3}e^{-t}\sin(3t), \; t \geq 0}$$

3.3 Valutare ora $y(0)$ e $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ mediante i teoremi del valore iniziale e del valore finale e verificare la correttezza dell'espressione analitica di $y(t)$ ottenuta al punto precedente confrontandone il valore iniziale e finale con quelli calcolati.

TVI $y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} G(s) = 0$ $\qquad y(0) = 10 - 10 = 0$ ✓

TVF applicabile perché i poli di $Y(s)$ sono tutti a parte reale < 0 o nulli

$$y_\infty = \lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} G(s) = 10$$

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 10 + 0 + 0 = 10 \quad ✓$$

3.4 Si dica, <u>giustificando la risposta</u>, se e come cambierebbero il valore iniziale e finale di $y(t)$ nel caso in cui il sistema fosse alimentato dall'ingresso:

a) $u(t) = \text{imp(t)}$

b) $u(t) = 10\,\text{sca(t)}$.

Poli di $Y(s)$ tutti con $Re(p) < 0$

a) $Y(s) = G(s)\,U(s) = G(s)$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$

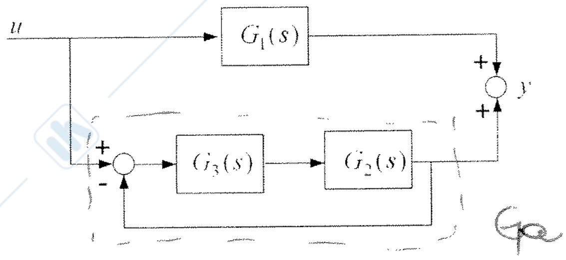
TVI: $y(0) = \lim_{s\to\infty} sG(s) = 2$

TVF $y_\infty = \lim_{s\to 0} sG(s) = 0$

b) Per linearità, la risposta a $u(t) = 10\,\text{sca}(t)$ è uguale a $10\,y_{sca(t)}(t)$, quindi: $y(0) = 0$

$y_\infty = 10 \cdot 10 = 100$

4. Si consideri lo schema a blocchi in figura, dove $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$ sono funzioni di trasferimento di sistemi di ordine uno.



4.1 Determinare l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema in funzione di $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$.

$$H(s) = G_1 + G_a(s)$$

$$= G_1(s) + \frac{G_2(s)G_3(s)}{1+G_2(s)G_3(s)}$$

4.2 Posto $G_1(s) = \frac{2}{s+6}$; $G_2(s) = \frac{2}{s+2}$, $G_3(s) = \frac{6}{s+9}$, calcolare $H(s)$ e studiare la stabilità del sistema con ingresso u e uscita y.

$$G_a(s) = \frac{\frac{2}{s+2}\,\frac{6}{s+9}}{1+\frac{2}{s+2}\,\frac{6}{s+9}} = \frac{12}{(s+2)(s+9)+12} = \frac{12}{s^2+11s+30}$$

$$= \frac{12}{(s+6)(s+5)}$$

2 POLI con Re < 0 perchè coeff. del den. concordi e non nulli $p_1 = -6$, $p_2 = -5$

$$H(s) = \frac{2}{s+6} + \frac{12}{(s+6)(s+5)} = \frac{2(s+5)+12}{(s+6)(s+5)} = \frac{2s+22}{(s+6)(s+5)}$$

1 AUTOV. "nascosto" $\lambda = -6$

Σ_{uy} ha 3 AUTOV.: 2 sono i poli di $H(s)$ e uno è l'aut. nascosto $\lambda = -6$ $\quad \lambda_i(\Sigma_{uy}) = \{-6, -6, -5\}$

$Re(\lambda_i(\Sigma_{uy})) < 0 \ \forall i \iff \Sigma_{uy}$ è AS. STABILE

4.3 Calcolare la risposta di regime del sistema con funzione di trasferimento $H(s)$ all'ingresso
$u(t) = 2 + \sin(0.1\,t)$. , $t \geq 0$ $H(s)$ AS. ST. $\Rightarrow$ ha senso parlare di risposta di regime.

Uso pr. sovr. effetti $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$

$u_1(t) = 2\,sca(t)$ $H(s)$ è AS. ST. e non ha zeri nell'origine $\Rightarrow y_{1\infty} = 2 \cdot H(0) = 2 \cdot \frac{11}{15} = \frac{22}{15}$

$u_2 = \sin(0.1t) \Rightarrow$ TH. RISP. in freq. $y_{2,\infty}(t) = |H(j\omega)|_{\omega=0,1} \sin(0{,}1t + \angle H(j0.1))$

Tutte sing di $H(s)$ sono > di un fattore almeno 10 della ω dell'ingresso

$\simeq \frac{11}{15} \sin(0{,}1t)$

5. Si consideri il generico sistema dinamico non lineare e tempo invariante

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)).$$

5.1 Dare la definizione di stato di equilibrio $\bar{x}$ associato all'ingresso costante $u(t) = \bar{u}$, $t \geq 0$.

lo stato di eq. $\bar{x}$ associato a $u(t) = \bar{u}$ è, se $\exists$, la soluzione, costante nel tempo, di $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$

5.2 Dare la definizione di asintotica stabilità (alla Lyapunov) dello stato di equilibrio.

lo stato di eq $\bar{x}$ è AS. ST. se $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0 : \forall x_{0p} \in \mathbb{R}^n$:

$\|x_{0p} - \bar{x}\| < \delta$ si abbia

$\|x_p(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ e $\lim_{t \to +\infty} x_p(t) = \bar{x}$

$x_p(t)$ mov. dello stato ottenuto con c.I. x_{0p} e ingresso $u(t) = \bar{u}$, $t \geq 0$