Rappresentazioni della FdT

Fondamenti di Automatica

Mara Tanelli

Slide di supporto alla lezione del 9 aprile 2020

Terminologia: FdT come funzione razionale

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)} = \frac{\beta_\nu s^\nu + \beta_{\nu-1} s^{\nu-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_\nu s^\nu + \alpha_{\nu-1} s^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad , \quad \nu \le n \quad , \quad \alpha_\nu \ne 0$$

Reali o
complessi coniugati!

Zeri

Radici dell'equazione $N_G(s) = 0$

Poli

Radici dell'equazione $D_G(s) = 0$

Relazione tra poli e autovalori

Poli

Autovalori

Tutti i poli sono autovalori

Qualche autovalore potrebbe non essere polo

Per i sistemi in forma minima, tutti gli autovalori sono poli

Poli=Autovalori

Nell'insieme, poli e zeri costituiscono le *Singolarità*

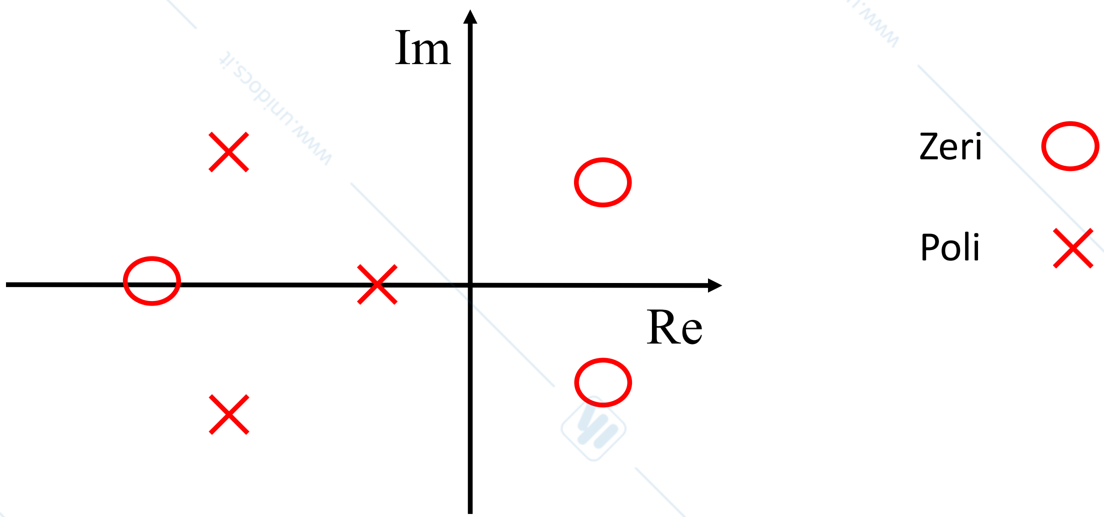
Convenzioni - 2

Salvo contrario avviso, nel resto della presentazione si farà riferimento a sistemi in cui non avvengono cancellazioni:

I concetti di polo e di autovalore coincidono

Rappresentazioni e parametri - 1

Sul piano di Gauss zeri e poli (reali o complessi) si rappresentano con cerchietti e crocette



Rappresentazioni e parametri - 2

Forme fattorizzate - 1

$$G(s)=\frac{\boxed{\rho}\prod_i (s+z_i)\prod_i \left(s^2+2\varsigma_i\alpha_{ni}s+\alpha_{ni}^2\right)}{s^{\boxed{g}}\prod_i (s+p_i)\prod_i \left(s^2+2\xi_i\omega_{ni}s+\omega_{ni}^2\right)}$$

$$G(s)=\frac{\boxed{\mu}\prod_i (1+\tau_i s)\prod_i \left(1+2\varsigma_i s/\alpha_{ni}+s^2/\alpha_{ni}^2\right)}{s^{\boxed{g}}\prod_i (1+T_i s)\prod_i \left(1+2\xi_i s/\omega_{ni}+s^2/\omega_{ni}^2\right)}$$

Costante di trasferimento	ρ	reale non nullo
Guadagno	μ	reale non nullo
Tipo (#zeri - # poli nulli, in s=0)	g	intero positivo, negativo o nullo

Rappresentazioni e parametri - 3

Forme fattorizzate - 2

$$G(s)=\frac{\rho\prod_i (s+z_i)\prod_i \left(s^2+2\varsigma_i\alpha_{ni}s+\alpha_{ni}^2\right)}{s^g\prod_i (s+p_i)\prod_i \left(s^2+2\xi_i\omega_{ni}s+\omega_{ni}^2\right)}$$

$$G(s)=\frac{\mu\prod_i (1+\tau_i s)\prod_i \left(1+2\varsigma_i s/\alpha_{ni}+s^2/\alpha_{ni}^2\right)}{s^g\prod_i (1+T_i s)\prod_i \left(1+2\xi_i s/\omega_{ni}+s^2/\omega_{ni}^2\right)}$$

Zeri e *Poli* reali non nulli	$-z_i \quad , \quad -p_i$	$z_i \neq 0 \quad , \quad p_i \neq 0$
Costanti di tempo	$\tau_i \quad , \quad T_i$	$\tau_i \neq 0 \quad , \quad T_i \neq 0$
Pulsazioni naturali di zeri e poli cc	$\alpha_{ni} \quad , \quad \omega_{ni}$	$\alpha_{ni} > 0 \quad , \quad \omega_{ni} > 0$
Smorzamenti di zeri e poli cc	$\varsigma_i \quad , \quad \xi_i$	$\lvert\varsigma_i\rvert < 1 \quad , \quad \lvert\xi_i\rvert < 1$

Rappresentazioni e parametri - 4

Relazioni tra i parametri

$$G(s)=\frac{\rho\prod_i(s+z_i)\prod_i\left(s^2+2\varsigma_i\alpha_{ni}s+\alpha_{ni}^2\right)}{s^g\prod_i(s+p_i)\prod_i\left(s^2+2\xi_i\omega_{ni}s+\omega_{ni}^2\right)}$$

$$G(s)=\frac{\mu\prod_i(1+\tau_i s)\prod_i\left(1+2\varsigma_i s/\alpha_{ni}+s^2/\alpha_{ni}^2\right)}{s^g\prod_i(1+T_i s)\prod_i\left(1+2\xi_i s/\omega_{ni}+s^2/\omega_{ni}^2\right)}$$

$$\mu=\rho\frac{\prod_i z_i\prod_i\alpha_{ni}^2}{\prod_i p_i\prod_i\omega_{ni}^2}\quad\Leftrightarrow\quad\rho=\mu\frac{\prod_i\tau_i\prod_i\omega_{ni}^2}{\prod_i T_i\prod_i\alpha_{ni}^2}$$

$$\tau_i=\frac{1}{z_i}\quad,\quad T_i=\frac{1}{p_i}$$

Rappresentazioni e parametri - 5

Guadagno - 1

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{\mu \prod_i (1+\tau_i s) \prod_i \left(1 + 2\varsigma_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2\right)}{s^g \prod_i (1+T_i s) \prod_i \left(1 + 2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2\right)}$$

Ipotesi: il sistema è asintoticamente stabile ($g \le 0 , T_i > 0 , \xi_i > 0$)

Calcolo del valore asintotico dell'uscita conseguente a un ingresso costante

$$u(t) = \bar{u}\,\text{sca}(t) \quad \Leftrightarrow \quad U(s) = \frac{\bar{u}}{s}$$

$$\boxed{\bar{y}} = \lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} sG(s)U(s) = \lim_{s \to 0} sG(s)\frac{\bar{u}}{s} = \lim_{s \to 0} G(s)\bar{u} =$$

$$= G(0)\bar{u} = \left(-CA^{-1}B + D\right)\bar{u} = \boxed{\begin{cases} \mu\bar{u} & , \quad g = 0 \\ 0 & , \quad g < 0 \end{cases}}$$

Rappresentazioni e parametri - 6

Guadagno - 2

$$\bar{y} = \left(-CA^{-1}B + D\right)\bar{u} = \begin{cases} \mu\bar{u} & , \quad g = 0 \\ 0 & , \quad g < 0 \end{cases}$$

Per un sistema asintoticamente stabile con $g = 0$, il guadagno μ è il rapporto tra il valore dell'uscita asintotica e il valore dell'ingresso costante che l'ha prodotta

Si ricordi anche che all'equilibrio (indipendentemente dalla stabilità asintotica) si aveva

$$\bar{y} = \left(-CA^{-1}B + D\right)\bar{u}$$

e lo scalare $-CA^{-1}B + D$ era stato denominato guadagno statico

Ciò motiva la nuova denominazione (usata anche quando $g \neq 0$)

Rappresentazioni e parametri - 7

Integratore

$$G(s)=\frac{1}{s} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l}\dot{x}(t)=u(t)\\ y(t)=x(t)\end{array} \quad , \quad x_0=0 \quad \Leftrightarrow \quad y(t)=\int_0^t u(\tau)d\tau$$

Una fdt con un polo in $s=0$ ha l'uscita pari all'integrale tra 0 e t dell'ingresso

Ricordare il teorema di integrazione per la trasformata di Laplace

Se $g=2$ l'uscita è l'integrale doppio e così via

Generalizzazione: una fdt di tipo $g>0$ contiene g *Azioni integrali*

Derivatore

La funzione $G(s)=s$ non è una fdt!

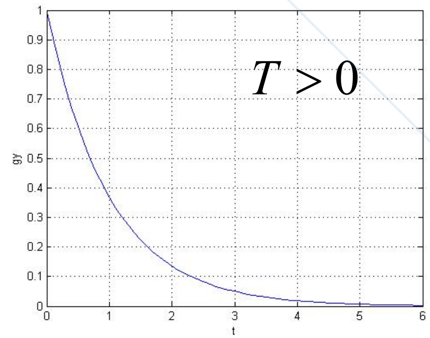
Però una fdt con $g<0$ contiene g *Azioni derivative*

Ricordare il teorema di derivazione per la trasformata di Laplace

Rappresentazioni e parametri - 8

Costanti di tempo (al denominatore)

$$G(s)=\frac{1}{1+sT} \quad \Leftrightarrow \quad g_y(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$



La risposta all'impulso coincide con un movimento libero

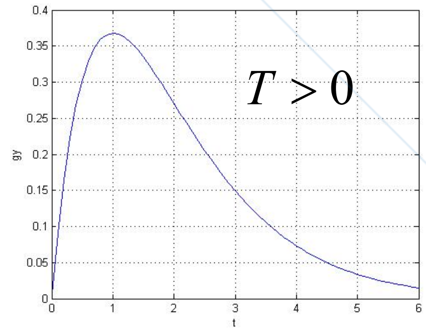
Presenza nel movimento libero del modo

$$e^{-\frac{t}{T}}$$

Per un sistema asintoticamente stabile, una costante di tempo "piccola" corrisponde a una risposta all'impulso e a un modo "veloci"

Generalizzazione

$$G(s)=\frac{1}{(1+sT)^2} \quad \Leftrightarrow \quad g_y(t)=\frac{1}{T^2}te^{-\frac{t}{T}}$$



Rappresentazioni e parametri - 9

Pulsazione naturale e smorzamento (al denominatore) - 1

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \;,\; \omega_n > 0 \;,\; |\xi| < 1 \;\Rightarrow\; s = p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\omega_n = |p_{1,2}|$$

$$\xi = \cos(\theta)$$

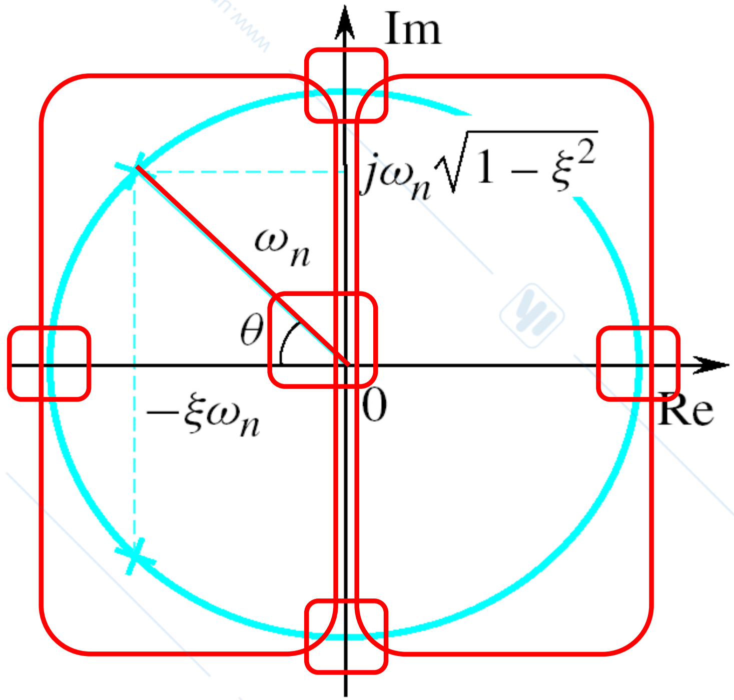
$$\xi = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}(p_{1,2}) = 0$$

$$\xi > 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}(p_{1,2}) < 0$$

$$\xi < 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}(p_{1,2}) > 0$$

$$\xi = 1 \;\Leftrightarrow\; p_{1,2} = -\omega_n$$

$$\xi = -1 \;\Leftrightarrow\; p_{1,2} = \omega_n$$



Rappresentazioni e parametri - 10

Pulsazione naturale e smorzamento (al denominatore) - 2

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \quad \Leftrightarrow \quad g_y(t)=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n t\sqrt{1-\xi^2}\right)$$

La risposta all'impulso coincide con un movimento libero

Presenza nel movimento libero del modo

$$e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n t\sqrt{1-\xi^2}\right)$$