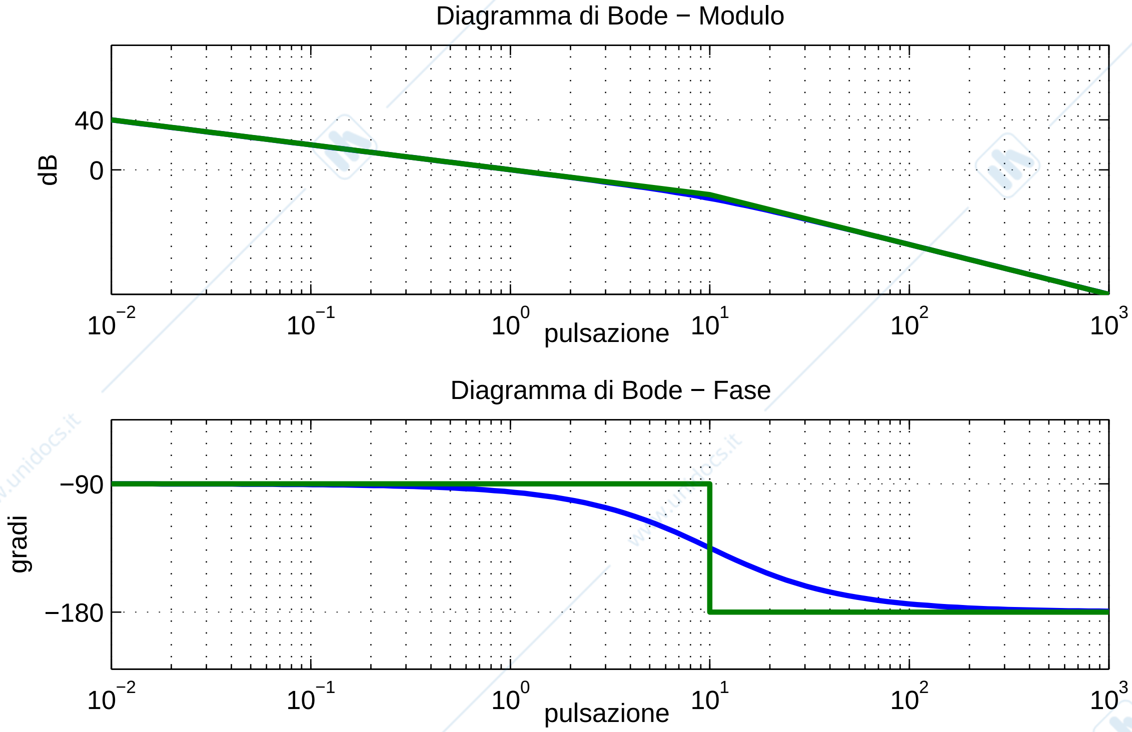
FONDAMENTI DI AUTOMATICA - Ingegneria Gestionale **Prof.ssa Mara Tanelli**
Appello del 28 luglio 2014



1. In figura è riportato il diagramma di Bode di modulo e fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema lineare tempo invariante di ordine due senza autovalori nascosti e senza zeri.

1.1 Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a) $G(s)$ è di tipo zero.

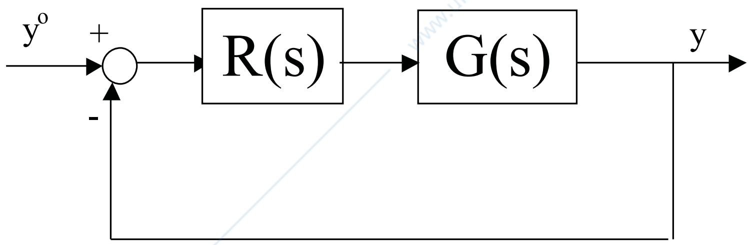
FALSO. Il diagramma di Bode del modulo ha pendenza iniziale normalizzata pari a -1, quindi il tipo e' $g = 1$.

b) $G(s)$ ha grado relativo zero.

FALSO. Il diagramma di Bode del modulo ha pendenza finale normalizzata pari a -2, quindi il grado relativo e' 2.

c) Il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ è asintoticamente stabile.

FALSO. Come visto al punto a) $G(s)$ ha un polo nell'origine, unito ad un altro polo con parte reale negativa. Il sistema pertanto non e' asintoticamente stabile (ma semplicemente stabile).



1.2 Si supponga ora che il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ sia connesso in retroazione come mostrato in figura.
Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
a) Posto $R(s) = 1$, il sistema retroazionato soddisfa il criterio di Bode per l'asintotica stabilità.

VERO. Poiche' $R(s) = 1$, si ha $L(s) = G(s)$ e possiamo fare riferimento ai diagrammi dati. Le condizioni di applicabilita' ($P = 0$ e ω_c ben definita) sono verificate. I diagrammi mostrano che $\mu_L = \mu_G = 1 > 0$ e $\varphi_m \approx 90° > 0$. Pertanto, il sistema in anello chiuso e' asintoticamente stabile.

b) Posto $R(s) = e^{-s\tau}$, con $\tau = 1$s, il sistema retroazionato mostrato in figura è asintoticamente stabile.

VERO. Il ritardo modifica solo la fase del sistema, aggiungendo uno sfasamento di $\omega_c \tau \frac{180}{\pi} \approx 57°$. Per quanto visto al punto precedente il margine di fase resta positivo e quindi il sistema in anello chiuso resta asintoticamente stabile.

1.3 Posto di nuovo $R(s) = 1$, tracciare l'andamento qualitativo dell'uscita $y(t)$ del sistema retroazionato a fronte di un riferimento $y^o(t) = \text{sca(t)}$.

La funzione di trasferimento da studiare e' la sensitività complementare, ovvero $F(s)$. Dato che il margine di fase è $> 75°$, tale $F(s)$ puo' essere approssimata con una funzione di trasferimento del primo ordine, con un polo reale in $\omega_c = 1$rad/s. Poiche' $L(s)$ e' di tipo 1, si avra' guadagno unitario. Le caratteristiche della risposta allo scalino sono quindi: $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) > 0$, $y_\infty = 1$ e assenza di sovraelongazioni.

2. Si consideri il sistema dinamico lineare e tempo invariante con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -2x_1(t) + u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) + u(t)\\ y(t) &= x_1(t) + x_2(t).\end{aligned}$$

2.1 Calcolare il movimento dell'uscita del sistema associato alla condizione iniziale $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ e all'ingresso costante $u(t) = \overline{u} = 5$.

Il sistema e' composto da due sistemi del primo ordine identici in parallelo. Poiche' sono uguali anche le condizioni iniziali, l'uscita si ottiene come

$$y(t) = 2x_1(t) = 2x_2(t) = 2\left[e^{-2t}x(0) + \int_0^t e^{-2(t-\tau)}5\right] = 5 - 3e^{-2t},\ t \geq 0$$

.

2.2 Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema e dire, motivando la risposta, se è possibile studiare la stabilità del sistema a partire dalla conoscenza della sola $G(s)$.

Si ha $Y(s) = 2X_1(s) = 2X_2(s) = \frac{2}{s+2}U(s)$.
La funzione di trasferimento, quindi, ha un solo polo, mentre il sistema di partenza e' di ordine 2. Pertanto, non è possibile studiare la stabilità del sistema a partire dalla conoscenza della sola $G(s)$.

2.3 Calcolare l'uscita di regime del sistema a fronte dell'ingresso $u(t) = \text{imp(t)} + \text{sin(0.1t)}$, e dire, motivando la risposta, dopo quanto tempo l'uscita del sistema si assesta a quella di regime calcolata.

Usando il principio di sovrapposizione degli effetti è possibile studiare separatamente i due ingressi. Il primo, imp(t), è un ingresso che tende a zero. Poichè il sistema è asintoticamente stabile, l'uscita relativa a tale ingresso tende a zero.

Per quanto riguarda il secondo ingresso, poichè il sistema è asintoticamente stabile è possibile applicare il teorema della risposta in frequenza, e quindi si ha che, a regime

$$y(t) = |G(j0.1)| \sin(0.1t + \arg(G(j0.1))) \approx \sin(0.1t).$$

La pulsazione dell'ingresso, infatti, è inferiore di più di una decade rispetto al polo, che è l'unica singolarità di $G(s)$.

Il tempo di assestamento è pari a $T_a \approx 5\tau_d = 5/|Re(p_d)| = 5/2 = 2.5$s.

3. Si consideri il sistema lineare e tempo invariante a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 2u(k) \\ x_2(k+1) &= 4x_1(k) - 2u(k) \\ y(k) &= x_1(k) + 2x_2(k), \end{aligned}$$

3.1. Studiare la stabilità del sistema.

La matrice dinamica del sistema è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

,

i cui autovalori sono $\lambda_i(A) = \{0, 0\}$. Poichè $|\lambda_i(A)| < 1, \forall\, i$ il sistema è asintoticamente stabile.

3.2. Calcolare stato e uscita di equilibrio associati all'ingresso costante $\overline{u} = 1$, $\forall\, k$.

Risolvendo le equazioni $x_1(k+1) = x_1(k) = \overline{x}_1$ e $x_2(k+1) = x_2(k) = \overline{x}_2$ si ottiene $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = (2, 6)$ che, sostituite nell'equazione di uscita, danno $\overline{y} = 14$.

3.1. Calcolare la funzione di trasferimento del sistema.

Applicando la trasformata Zeta alle equazioni di stato (con l'ipotesi di condizioni iniziali nulle), si ha $X_1(z) = \frac{2}{z}U(z)$ e $X_2(z) = \frac{8-2z}{z}U(z)$. Sostituendo tali espressioni nell'equazione di uscita, si ottiene

$$Y(z) = X_1(z) + 2X_2(z) = \frac{2(8-z)}{z^2}U(z) = G(z)U(z).$$

3.3. Calcolare i primi 4 campioni dell'uscita del sistema ottenuta applicando come ingresso un impulso unitario (a partire da condizioni iniziali nulle).

L'ingresso considerato vale 1 per $k = 0$ e 0 per $k \neq 0$. Applicando tale ingresso e iterando le equazioni di stato e uscita si ottiene $y(0) = 0, y(1) = -2, y(2) = 16, y(3) = 0$.

4. Si mostri, aiutandosi con un esempio numerico, che un sistema non lineare può ammettere più di uno stato di equilibrio associato allo stesso ingresso costante, e che tali stati di equilibrio possono avere proprietà di stabilità diverse.

Vedi libro o appunti (un esempio di tale situazione è il sistema considerato nell'esercizio 1 del tema d'esame del 3/07/14).

5. Si enunci con precisione il teorema della risposta in frequenza.

Vedi libro o appunti.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari