ESPONENZIALE DI MATRICE

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Formule di Lagrange:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_{t_0} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$\boxed{\text{Come calcolo } e^{At} \text{ ?}}$$

Ci basiamo sullo sviluppo in serie

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Si estende al caso matriciale con A $n \times n$

$$e^{At} = I_n + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots = \sum_{0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!}, \quad t \geq 0$$

NOTE

1. Lo sviluppo in serie è una definizione
2). Si può verificare che con qsto def. la FdL è soluzione di $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(t_0) = x_0$
3) $e^{At} \neq$ dalla matrice degli esponenziali degli elementi di A !!

---

* CASI PARTICOLARI *

1) A DIAGONALE $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

In qsto caso (e solo in questo)

$A^i = \begin{bmatrix} \lambda_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^i \end{bmatrix}$ e quindi $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$

N.B.

$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_i \ \ (i = 1, \dots, n) \text{ AUTOV. di } A \\ e^{\lambda_i t} \text{ MODI di } A \end{array}}$

(2) A non diagonale MA DIAGONALIZZABILE (sempre se ha autov. distinti!)

ovvero $\exists\, T_D$ $n\times n$ Non singolare ($\det(T_D)\neq 0$):

$$\underbrace{T_D A T_D^{-1}}_{\text{sx e dx}} = A_D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (*)$$

A è SIMILE ad una matrice diagonale

sx a sx per T_D^{-1} e a dx per T_D

$$e \quad T_D^{-1}\underbrace{T_D A T_D^{-1}}_{A_D} T_D = T_D^{-1} A_D T_D \Rightarrow \boxed{A = T_D^{-1} A_D T_D}$$

Da (*) si ha:

$$e^{At} = \sum_0^\infty \frac{(At)^i}{i!} = \sum_0^\infty \frac{(T_D^{-1} A_D t T_D)^i}{i!} =$$

$$= T_D^{-1}\underbrace{\left\{\sum_0^\infty \frac{(A_D t)^i}{i!}\right\}}_{e^{A_D t}} T_D =$$

$$= T_D^{-1}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix} T_D = T_D^{-1} e^{A_D t} T_D$$

NOTA

$$(T_D^{-1} A_D t T_D)^2 =$$
$$= T_D^{-1} A_D t \underbrace{\cancel{T_D T_D^{-1}}}_{I} A_D t T_D$$
$$= T_D^{-1} (A_D t)^2 T_D$$

ecc.

$\Rightarrow$ se A è diagonalizzabile, la trasf. di similitudine diagonalizza anche l'esponenziale

ES 1

$$\dot{x} = Ax \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$ DIAGONALE!

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$x_L(t) = e^{At} x_0 = e^{At} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} x_1(0) \\ e^{-2t} x_2(0) \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{NOTA}}$

$$\dot{x} = Ax \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 & \Rightarrow x_{L1}(t) = e^{-t} x_1(0) \\ \dot{x}_2 = -2x_2 & \Rightarrow x_{L2}(t) = e^{-2t} x_2(0) \end{cases}$$

2 sistemi scalari disaccoppiati!

ES 2

$$\dot{x} = Ax \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovalori?

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda - 1)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \mp \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 \boxed{\begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}}$$ DISTINTI

↓

A è diagonalizzabile

Calcolo AUTOVETTORI

Def. Un vettore $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ è AUTOVETTORE di A associato all'autovalore $\lambda \iff \boxed{Av = \lambda v}$, λ autov. di $A_{n\times n}$

A $n \times n$

• Se $\forall$ autov. distinti $\Rightarrow \exists$ n AUTOV. LINEARM. INDIPENDENTI

$T^{-1} = [v_1 | v_2 | \dots | v_n]$ è NON SINGOLARE

$Av = \lambda_1 v$ $\quad \lambda_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} v_1 + 2v_2 = 3v_1 \\ 2v_1 + v_2 = 3v_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2v_2 = 2v_1 \\ 2v_1 = 2v_2 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\boxed{v_1 = v_2}$

$$v_{\lambda=3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$Av = \lambda_2 v$ $\quad \lambda_2 = -1$, $\lambda_2 \to -1$

$$\begin{cases} v_1 + 2v_2 = -v_1 \\ 2v_1 + v_2 = -v_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2v_1 = -2v_2 \\ 2v_1 = -2v_2 \end{cases}$$

$\boxed{v_1 = -v_2}$

$\Downarrow$

$\boxed{v_1 = 1 \quad v_2 = -1}$

$$v_{\lambda=-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A_D = T_D A T_D^{-1} \iff A = T_D^{-1} A_D T_D}$$

$$T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda=3 \quad \lambda=-1$

T_D^{-1} = matrice autovettori

VERIFICHIAMO!

$$A_D = T_D A T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

fate verifica x vs.

$$T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

AUTOV. ASSOC. a $\lambda_2 = -1$

AUTOV. ASSOC. a $\lambda_1 = 3$

$$\det(T_D^{-1}) = -2$$

$$T_D = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

(reho)

$$e^{At} = T_D^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}}_{e^{A_D t}} T_D = \dots$$

$= T_D^{-1} e^{A_D t} T_D$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{+3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -e^{3t}-e^{-t} & -e^{3t}+e^{-t} \\ -e^{3t}+e^{-t} & -e^{3t}-e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x_L(t) = e^{At}x(0)}$$

$\Rightarrow$ ML è C.L. di esponenziali con coeff.nte dipendono da x_0, T_D^{-1} e T_D che hanno come esponenti gli autovalori di A

$e^{\lambda_i t} \Rightarrow$ MODI del sistema (nel caso di λ_i reali e distinti)

Vero in generale!

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$\boxed{\lambda_i(A):\ \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1}$$

$$A_D = T_D A T_D^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right] & \end{array} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1(A) & 0 \\ 0 & \lambda_2(A) \end{bmatrix}$$

NOTA

Se $T_D^{-1} = \begin{bmatrix} v_2 & v_1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_D = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$

NBB A_t e A_D hanno gli stessi autovalori (sono matrici simili)

$$\det(\lambda I - A_D) = \det(\lambda I - T_D A T_D^{-1}) = \det(\lambda T_D T_D^{-1} - T_D A T_D^{-1}) =$$

$$\det\left[T_D\,(\lambda I - A)\,T_D^{-1}\right] = \det T_D \det(\lambda I - A) \det T_D^{-1}$$

$$\det T_D^{-1} = \frac{1}{\det(T_D)}$$

$$\overset{!}{=} \det(\lambda I - A)$$

$$\boxed{\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}}$$

- In generale, occorre calcolare e^{At} data A

ES. 3) $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ è TRIANGOLARE SUP. $\Rightarrow$ gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale principale

NOTA 2 AUTOV. coincidenti

A ha $\boxed{2\ \lambda_i \text{ coincidenti}}$

USIAMO LA DEF.

$$e^{At} = I_{m\times m} + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots$$

$I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\frac{At}{1!} = \begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix}$$

$$\frac{(At)^2}{2!} = \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix} = \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} \lambda^2 t^2 & 2\lambda t^2 \\ 0 & \lambda^2 t^2 \end{bmatrix}$$

$0 + t + 2\lambda t^2 + 3\lambda^2 t^3 + 4\lambda^3 t^4 + \dots$

$t(1 + 2\lambda t + 3\lambda^2 t^2 + 4\lambda^3 t^3 + \dots)$

$e^{\lambda t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!}$

$= 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} + \dots$

$$\frac{(At)^3}{3!} = \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda^2 t^2 & 2\lambda t^2 \\ 0 & \lambda^2 t^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} \lambda^3 t^3 & 3\lambda^2 t^3 \\ 0 & \lambda^3 t^3 \end{bmatrix}$$

$$1 + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} \longrightarrow e^{\lambda t}$$

$$* = 0 + \frac{t}{1!} + \frac{2\lambda t^2}{2!} + \frac{3\lambda^2 t^3}{3!} + \dots = t\left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \dots\right) \to t e^{\lambda t}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & * \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} \dots$$

$$\cancel{\frac{0}{0!} + \frac{t}{1!} + \frac{2\lambda t^2}{2!} + \frac{3\lambda^2 t^3}{3!} + \dots \quad t\left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \dots\right)}$$

$$* = \cancel{0} + t + \frac{2\lambda t^2}{2!} + \frac{3\lambda^2 t^3}{3!} + \dots = t\left(\frac{1}{1} + \frac{2\lambda t}{2} + \frac{3\lambda^2 t^2}{3!} + \frac{4\lambda^3 t^3}{4!}\right)$$

$$\Rightarrow t \sum_{0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = \boxed{t e^{\lambda t}}$$

$$1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} \qquad t\left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \dots\right)$$

$$\boxed{\text{es. } \frac{3\lambda^2 t^2}{3!} \to \frac{\lambda^2 t^2}{2!}}$$

$$\boxed{e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}}$$

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t\left(1 + \frac{2\lambda t^2}{2!} + \frac{3\lambda^2 t^3}{3!} \dots\right) \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x_L(t) = e^{At}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} e^{\lambda t} + x_{20} t e^{\lambda t} \\ x_{20} e^{\lambda t} \end{bmatrix}}$$

CASO 2° di CONCORRENTI — Modi di A: $\left\{ \begin{array}{l} e^{\lambda t} \\ t e^{\lambda t} \end{array} \right.$

fra exp + polinomio di t

ESEMPIO

1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 = \Delta_A(\lambda)$

$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ caso part. di $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_{1,2} = 0$ $\boxed{\text{MOLT ALG} = 2}$

AUTOVETTORI

$\boxed{\begin{array}{l} A v_1 = \lambda_1 v_1 \\ A v_2 = \lambda_2 v_2 \end{array}}$ $\quad \lambda_1 v_1 = 0 \quad \lambda_2 v_2 = 0$ $\quad v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix}$

v_1 q/s, v_2 q/s $\Rightarrow$ li posso scegliere $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

sono $\neq 0$ e LIN. IND.

$\boxed{\text{MOLT. GEOM } 2}$

NOTA Possibili polin. MINIMI $\begin{cases} \lambda \\ \lambda^2 \end{cases}$

$\psi_{1A}(\lambda) = \lambda \rightarrow \psi_{1A}(A) = A = 0$

$\boxed{\lambda = 0 \text{ è RADICE SEMPLICE POLIN. MINIMO!}}$

CL MODI $e^{0t} = 1$

2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$

$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ caso part. di $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ con $\lambda = 0$

MOV. LIBERO

$\boxed{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x_1(t) = x_{10} \\ x_2(t) = x_{20} \end{array}}$ NON DIVERGE!

$e^{At} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$ due sistemi 1° ordine indip.

$\det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 \quad \lambda_{1,2} = 0$ $\boxed{\text{MOLT. ALG } 2}$

$Av = \lambda v$

$\begin{bmatrix} v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ $\quad A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} v_2 = 0 \\ v_1 \text{ q/s} \end{array}}$ $\quad v = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \; \alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{MOLT. GEOM } 1 < 2}$

NOTA $\psi_{A_1}(\lambda) = \lambda \rightarrow \psi_{A_1}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$

$\psi_{A_2}(\lambda) = \lambda^2 \rightarrow \psi_{A_2}(A) = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{CL. MODI}}$ e^{0t}, te^{0t}

$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda = 0$ RADICE MULTIPLA POL. MINIMO!

vero x q/s $A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$

$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} + x_{20} t \\ x_{20} \end{bmatrix}$

$\boxed{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 = x_{10} + x_{20} t \xrightarrow{t \to +\infty} \infty \\ \rightarrow x_2 = x_{20} \end{array}}$

Tornando alle FdL

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

- **A diagonale**:

$$x_L(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} x_1(t_0) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} x_n(t_0) \end{bmatrix}$$

$$x_F(t) = \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_1 (t-t_0)} b_1 u(\tau)\, d\tau \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_n (t-t_0)} b_n u(\tau)\, d\tau \end{bmatrix}$$

è come avere n sistemi del 1° ordine! Del resto, se A è diagonale le eq. sono

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \; a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11} x_1 + b_1 u \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{nn} x_1 + b_n u \end{cases}$$

Non c'è interazione tra le ≠ eq. di stato!

RAPPRESENTAZIONI EQUIVALENTI

SIST. LTI
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

- **A diagonalizzabile**:

So che $\exists\, T_D$ NON SING: $T_D A T_D^{-1} = A_D$

$\Rightarrow$ cambio le VAR. di STATO definendo

$$\boxed{\hat{x} = T_D x} \quad \Updownarrow \quad \boxed{x = T_D^{-1} \hat{x}}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = T_D \dot{x} = T_D (A \overset{T_D^{-1}\hat{x}}{x} + Bu) = \\ \quad = T_D A T_D^{-1} \hat{x} + T_D B u \\ y = Cx + Du = C T_D^{-1} \hat{x} + Du \end{cases}$$

$y(t) = CT_D^{-1}\hat{x} + Du$
$= CT_D^{-1}(T_D x) + Du$
$= Cx + Du = y$

Nelle nuove coordinate ho

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ \hat{y} &= \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u\end{aligned}}$$

$$\begin{cases} \hat{A} = T_D A T_D^{-1} = A_D \\ \hat{B} = T_D B \\ \hat{C} = C T_D^{-1} \\ \hat{D} = D \end{cases}$$

SISTEMI EQUIVALENTI

con $= u(t)$ il mov. uscita è $\equiv$

Poiché $\hat{A} = A_D$ diagonale ci siamo ricondotti al caso part. per il calcolo del movimento!

NB le
$x_0 \to x(t)$
$\hat{x}_0 = T x_0$
$\hat{x}(t) = T x(t)$

NB ecco perché scelta var. di stato NON è unica
Posso anche usare una T_D q.s perché NON singolare per fare cambio di var

NB Se A è qualsiasi e NON DIAG si può mostrare che $\exists\, T$ non sing: $\hat{A} = TAT^{-1}$ è espressa in una forma particolare detta forma di Jordan, di cui la diagonalizzazione è un caso particolare (mai non la vediamo)

NBB Abbiamo visto che c'è un legame molto forte fra $\lambda_i(A)$ e il comportamento del sistema: ci torneremo presto!