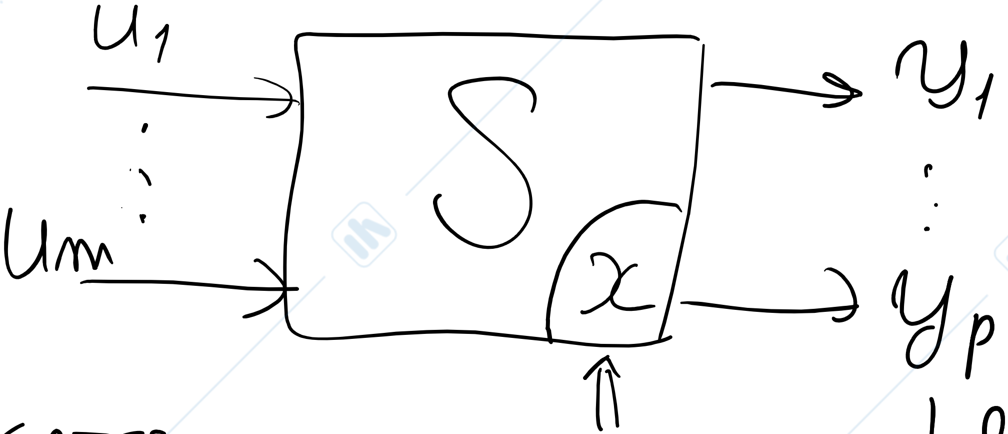
SISTEMI DINAMICI



CONDIZ. INIZIALI del sistema

<u>INGRESSO</u> $u \in \mathbb{R}^m$

<u>USCITA</u> $y \in \mathbb{R}^p$

$u(t), y(t)$

$t \in \mathbb{R}$ TEMPO CONTINUO

$x(t) \in \mathbb{R}^n$

↳ STATO del sistema

SIST. DINAMICI c'è un legame NON istantaneo tra ING e USCITA

NON BASTA conoscere $u(t)$ per ricostruire <u>UNIVOCAM.</u> $y(t)$

$\Downarrow$

Occorre info sul "PASSATO del sistema"

È CONTENUTA nello STATO del sistema $x(t) \in \mathbb{R}^n$

n = ORDINE del SISTEMA = # delle "VARIABILI DI STATO" ↳ COMPONENTI di $x(t)$

è NOTA la condiz. iniziale $x(t_0)$ t_0: TEMPO INIZIALE

SIST. DINAMICI

$$\begin{cases} u(t), \; t \geq t_0 \\ x(t_0) \end{cases} \Rightarrow y(t), \; t \geq t_0$$

RAPPRESENTAZIONE DI STATO

EQUAZ. di STATO $\underline{\dot{x}(t)} = \underline{\underline{f}}(x(t), u(t), t)$ EQ DIFF.LE

TRASFORM. O EQUAZ. DI USCITA $\underline{y(t)} = \underline{\underline{g}}(x(t), u(t), t)$ EQ ALGEBRICA

$\in \mathbb{R}^n$

$y \in \mathbb{R}^r$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

f, g sono FUNZ. VETTORIALI → a valori in $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^p$

$$\underline{\dot{x}}(t) = f(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t)$$
$$\underline{y}(t) = g(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t)$$

CLASSIFICAZ. dei SISTEMI DINAMICI

(1) TEMPO VAR.

f o g sono FUNZ. ESPLICITE del tempo

$$\dot{x}(t) = x(t) \boxed{\sin(t)}$$

TEMPO INV.

né f né g sono funz. espl. del tempo

(2) SISO

$u(t)$ e $y(t) \in \mathbb{R}$

MIMO

$u(t)$ e/o $y(t)$ sono vettoriali.

3) LINEARI

Sia f sia g è funt. lin di $x(t)$ e $u(t)$

NON LIN.

f e/o g è funt. NON LIN. di $u(t)$ e/o $x(t)$

4) STRETTAMENTE PROPRIO

Se la funt. di uscita non dipende direttamente da $u(t)$

$$y(t) = g(x(t), t)$$

PROPRIO

Viceversa

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

LINEARI e TEMPO INVARIANTI

L.T.I.

A $n \times n$

B $n \times m$

C $p \times n$

D $p \times m$

$$\dot{x}^{n}(t) = A x^{n}(t) + B u^{m}(t)$$

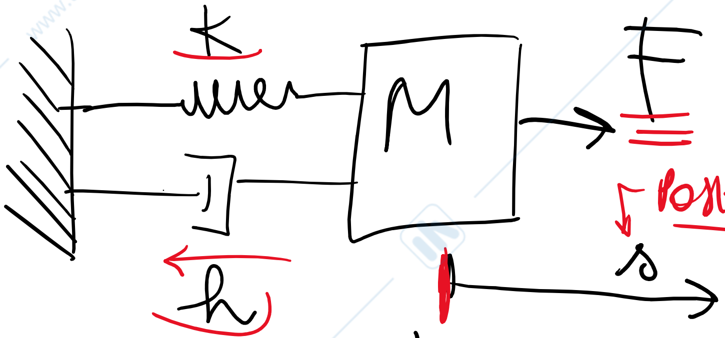
$$y^{p}(t) = C x^{n}(t) + D u^{m}(t)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$$

A, B, C, D sono matrici di coeffic. costanti

ESEMPIO

EQUAZIONI DI STATO del sistema



BILANCIO di FORZE

$$Ma = \sum_i F_i$$

s	POSIZ.	
$\dot{s}$	VELOCITÀ	ds/dt
$\ddot{s}$	ACCEL.	$\frac{d\,vel}{dt}$

INGR/USCITA

$$M\ddot{s} = \underbrace{-ks}_{F_{MOLLA}} \underbrace{-h\dot{s}}_{F_{SMORZ}} + F$$

MOTO del CORPO è descritto da un'eq. di M.le lineare di II GRADO

$\boxed{\text{2 VAR. DI STATO}}$

$\dot{x} = f$ ...

STATO $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \end{bmatrix}$ $\quad u = F \quad \boxed{y = s}$

$$\cancel{M}\ddot{s} = -ks - h\dot{s} + F \qquad \text{dividendo per } M$$

$M \neq 0$

$$\ddot{s} = -\frac{k}{M}s - \frac{h}{M}\dot{s} + \frac{F}{M}$$

$\boxed{\dot{x}_2 = \ddot{s}}$

RAPPR. STATO

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{K}{M}x_1(t) - \dfrac{h}{M}x_2(t) + \dfrac{u(t)}{M} \end{cases}$$

$m=2$ $\quad \boxed{y(t) = x_1(t)}$ $\quad$ A, B, C, D ?

$$A_{2\times 2} = \begin{array}{c} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/M & -h/M \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} \\ u \end{array}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^2 \qquad u, y \in \mathbb{R}$$

$$C = y \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \end{array} \qquad D = y \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ u \end{array}$$

CLASSIFICAZ

- SISTEMA DINAMICO
- II° ORDINE ($n=2$)
- SISO
- LIN e TEMPO INV.
- STRETT. PROPRIO

NEI SISTEMI LTI se il sistema è STR. PROPRIO $\Leftrightarrow$ $D=0$

ES CLASSIFICARE il sistema

$$\dot{x}(t) = -3x(t)^2 + \sin(t)\,u(t)$$
$$y(t) = 2x(t) + u(t)$$

SCELTA delle VAR. DI STATO

CRITERIO GENERALE

La costruzione del modello porta a una eq. diff.le di GRADO n

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \varphi\left(\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{dy}{dt}, y, u\right)$$

$x_n \quad \dots \quad x_2 \quad x_1$

$\Downarrow$

SI PUÒ PORRE

$$\boxed{x_1(t) = y(t)}$$

$$x_2(t) = dy/dt$$

$$x_3(t) = d^2y/dt^2$$

$$\vdots$$

$$x_n(t) = d^{n-1}y/dt^{n-1}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = \varphi\left(x_n(t), x_{n-1}(t), \dots, x_1(t), u(t)\right)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Nell'esempio di prima

$$\ddot{s} = -\frac{k}{M}s - \frac{h}{M}\dot{s} + \frac{1}{M}\overset{u}{F}$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \boxed{\varphi\left(\underset{x_2}{\frac{ds}{dt}}, \underset{x_1}{s}, u\right)}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \varphi\left(x_2(t), x_1(t), u\right) = -\frac{k}{M}x_1(t) - \frac{h}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}u(t)$$

ESERCIZIO

$$\dddot{y}(t) = \sqrt{2y(t)\dot{y}(t) + 5u(t)(1+\ddot{y}(t)^2)}$$

SCRIVERE IL SISTEMA IN FORMA DI STATO e CLASSIFICARLO

ES. x_1 POSIZ
x_2 VELOCITÀ

IN MOLTI CASI FISICA

VAR STATO $\longleftrightarrow$ GRANDEZZE ASSOCIATE a "FENOMENI DI ACCUMULO"

EQ. DI BILANCIO

LA SCELTA delle VAR DI STATO non è UNIVOCA

↓ energia
massa
potenza
calore

posso fare CAMBI di VARIABILI

ELETTRICA → · TENSIONI sui CONDENS.
· CORRENTI negli INDUTTORI

MECCANICA → POSIZ
VELOCITÀ

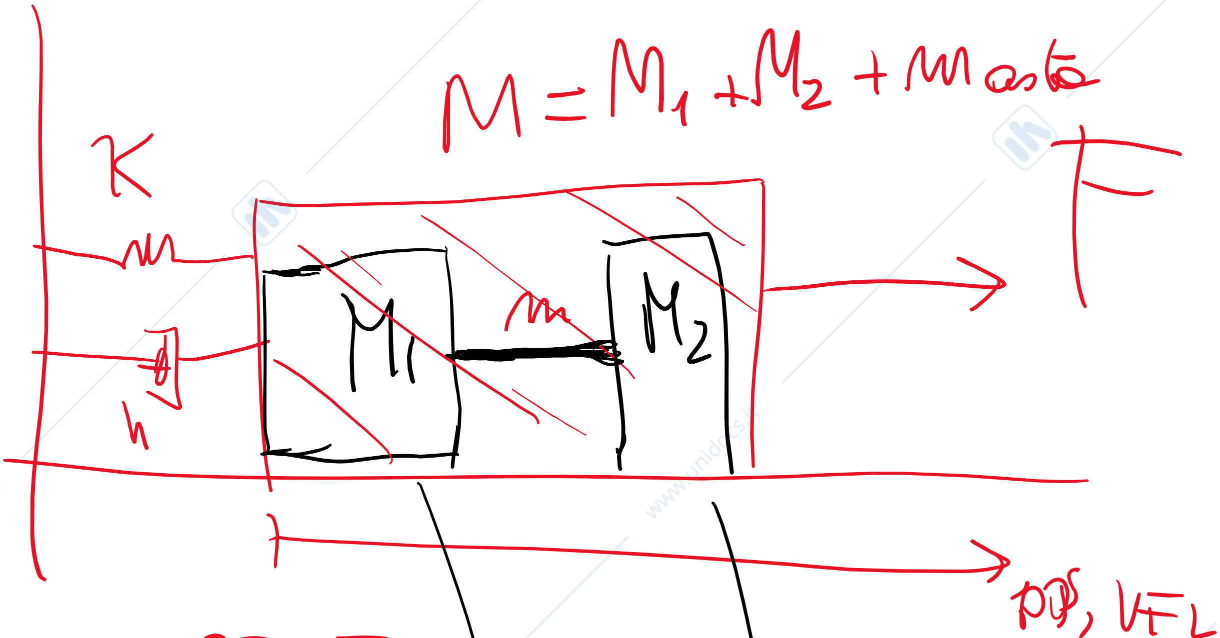
TERMICA → TEMPERATURA

IDRAULICA → MASSA

ORDINE DEL SISTEMA?

il # delle VAR DI STATO

è UNIVOCO??



↳ 2 VAR STATO

$n=4$ || ORD. 2 $\begin{cases} Pos\ 1 \\ vel\ 1 \end{cases}$ + $\begin{matrix} Pos_2 \\ vel\ 2 \end{matrix}$ ORD 2

PROGETTO SIST. CONTROLLO

↓

SIMULAZ. SEMPLICE

SIMULAZIONE dei SISTEMI CONTR.

DIGITAL TWIN

Fissato il sistema fisico, l'ordine con cui descriverlo dipende dalla complessità del modello desiderato

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

che a sua volta
dipende dallo
scopo del modello
stesso

∃ sistemi in cui
$n = \infty$
sistemi A DIMENSIONE
INFINITA
↳ FISICA del
problema di

descrive con eq. diff.li alle derivate parziali

TEMPERATURA in UNA STANZA

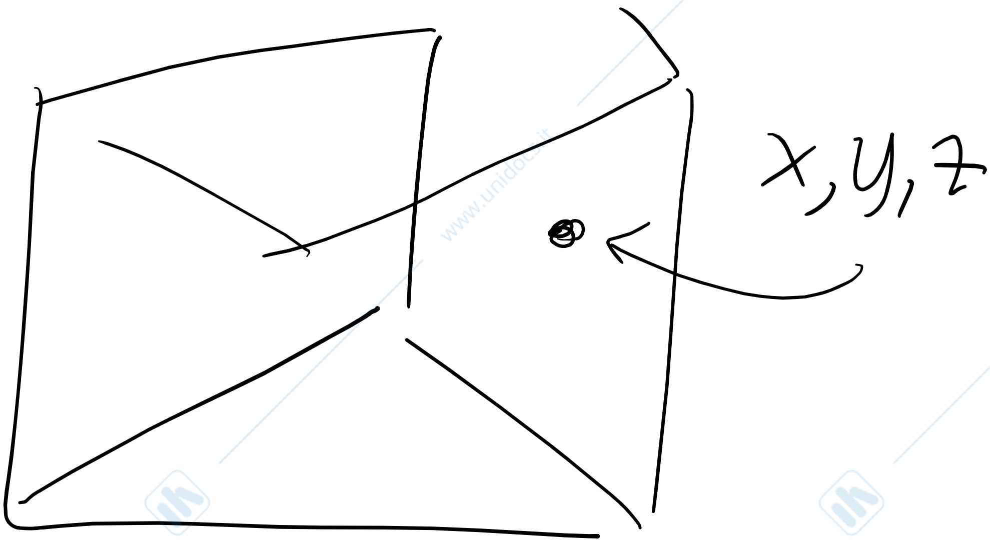
$\boxed{T(t)}$

$\Downarrow$

$\underline{T_{MEDIA}}$

$\downarrow$

$(\#, t)$



$$T(x, y, z; t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Rightarrow\ \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ \Rightarrow\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{aligned}}$$

$x(t)$?

$y(t)$?

CALCOLO del MOVIMENTO del SISTEMA

$$\begin{cases} u(t),\ t \geq t_0 \\ x(\underline{\underline{t_0}}) \end{cases} \Longrightarrow \text{CALCOLARE } x(t) \text{ e } y(t)$$

Se il SISTEMA è TEMPO INVARIANTE

POSSIAMO SEMPRE PORRE $\boxed{t_0 = 0}$

NOTI

la funzione di ingresso $u(t),\ t \geq 0$

e

la C.I. $x(0) = x_0$

$\downarrow$

la soluz. delle eq. di STATO ci dà

$x(t) = \boxed{\text{MOVIMENTO dello STATO}}$

Sostituendo $x(t)$ e $u(t)$ nelle trasf. di uscita

$\Downarrow$

MOVIMENTO dell'USCITA

Ci concentriamo per ora su un particolare MOVIMENTO (MOTION) che è caratterizzato da una funz. di ingresso COSTANTE

(*) $\boxed{u(t) = \bar{u} \text{ cost. } \forall t \geq 0}$

se $\exists$ un movim. dello stato e dell'uscita

$\boxed{\text{COSTANTI}}$ associati a $u(t) = \bar{u}$

$x(t) = \bar{x}$ cost. $\forall t \geq 0$

$y(t) = \bar{y}$ cost. $\forall t \geq 0$

Se $\exists$ chiamo questi MOVIMENTI, **MOVIMENTI** (o STATI e USCITE) **DI EQUILIBRIO**

MOVIM. di EQUILIBRIO

Sist. dinamico TEMPO INV.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

NOTI $u(t) = \bar{u}$ cost. $\forall t \geq 0$

$\boxed{x(0) = \bar{x}}$ C.I.

STATO di EQ: il movim. COSTANTE dello stato $x(t) = \bar{x}$, $t \geq 0$

Se $\exists$, associato a $u(t) = \bar{u}$

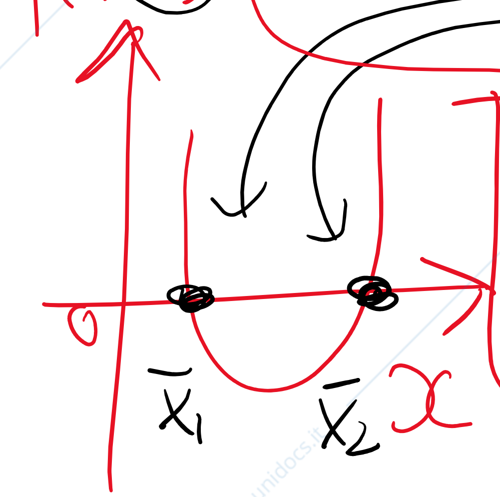
USCITA di EQ: Movim dell'uscita COSTANTE $y(t) = \bar{y}$ $\forall t \geq 0$ associato a $u(t) = \bar{u}$

↳ CALCOLO dello STATO di EQ

$$\dot{x} \rightarrow \boxed{0 = f(\bar{x}, \bar{u})}$$

cost

$f(x, \bar{u})$

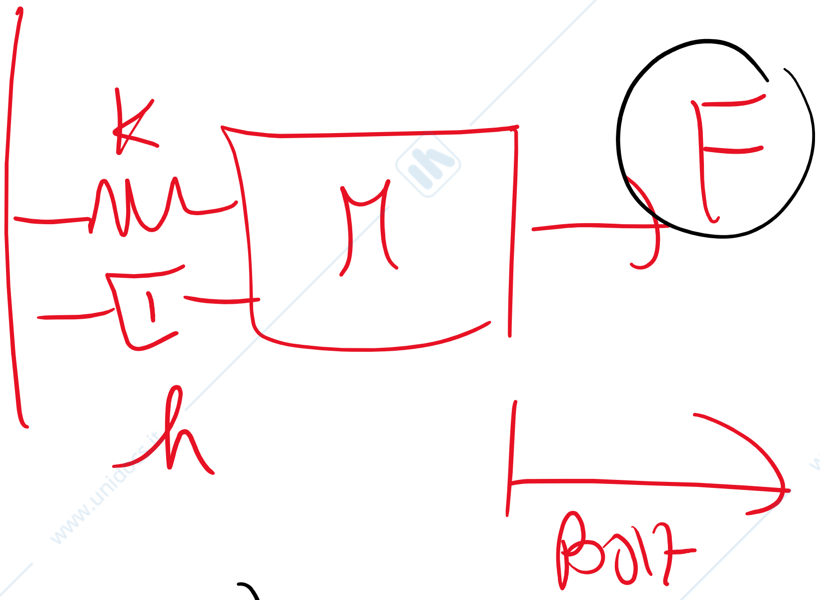


$\boxed{\text{ZERO di } f(\cdot, \bar{u})}$

USCITA di EQ.

$$\boxed{\overline{y} = g(\overline{x}, \overline{u})}$$

Riprendiamo l'es. della MASSA



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{k}{M}x_1 - \dfrac{h}{M}x_2 + \dfrac{1}{M}u \end{cases}$$

$u(t) = \overline{u}$ COST

$$\boxed{y = x_1}$$

CALCOLO $\overline{x}, \overline{u}$?

$\bar{x}$ cost.

$\dot{x}$

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 = -\frac{K}{\cancel{M}}\bar{x}_1 - \frac{b}{M}\cancel{\bar{x}_2} + \frac{1}{\cancel{M}}\bar{u} \end{cases}$$

$\boxed{\bar{x}_2 = 0}$ vel nulla

$M \neq 0$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{K}\bar{u}$$

posiz. che dip da $\bar{u}$ e da K

STATO EQ

$$\boxed{(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \left(\frac{1}{K}\bar{u}, 0\right)}$$

vel nulla

$$\boxed{\bar{y} = \bar{x}_1 = \frac{\bar{u}}{K}}$$

es

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 3 \\ \bar{x}_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \bar{u} = 1$$

$$y(t) = \cancel{\boxed{3x_1(t) - 2x_2(t)}} + 2u(t)$$

$$\boxed{\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})}$$

$$\bar{y} = 3\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 + 2\bar{u}$$

$$= 9 - 14 + 2 = -2$$