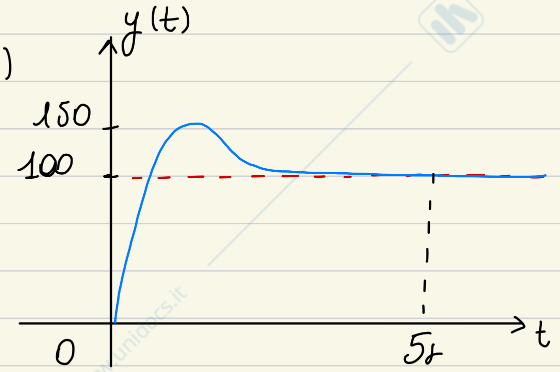
Esercizio 1: Risposta allo scalino - grafico

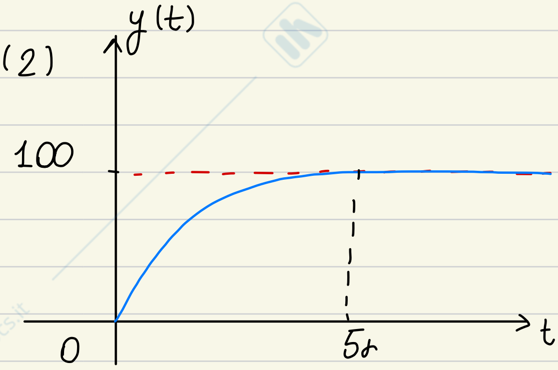
Dire, motivando la risposta, quale tra gli andamenti sotto riportati rappresenta la risposta allo scalino del sistema lineare e tempo invariante di ordine 2 con funzione di trasferimento:

$$F(s) = 100 \frac{1 + s/20}{(1+s)(1+s/100)}$$

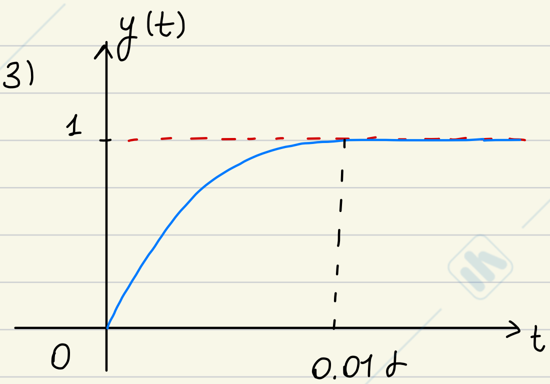
(1)



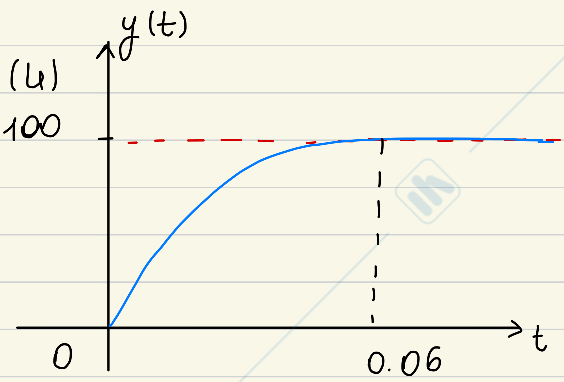
(2)



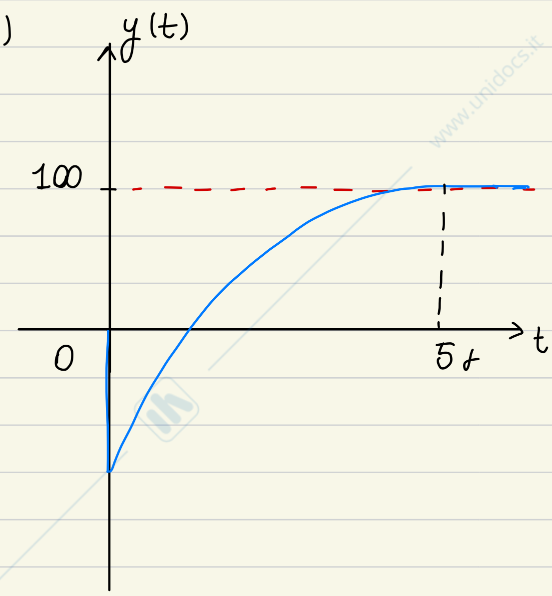
(3)



(4)



(5)



Per rispondere al quesito analizziamo la funzione di trasferimento $F(s)$.

→ Dato che la $F(s)$ non ha poli o zeri in zero è di tipo $g = 0$

→ Il guadagno di $F(s)$ è dato da $\mu = F(0)\, s^g$, quindi

$$\mu = F(0)\, s^0 = 100 \left.\frac{1+s/20}{(1+s)(1+s/100)}\right|_{s=0} = 100$$

→ La funzione di trasferimento $F(s)$ ha 2 poli in $s=-1$ ed $s=-100$ → entrambi i poli sono reali negativi e quindi il sistema con funzione di trasferimento $F(s)$ è asintoticamente stabile.

→ La funzione di trasferimento ha uno zero in $s=-20$ → lo zero è reale negativo.

Posso quindi concludere che il sistema è a fase minima.

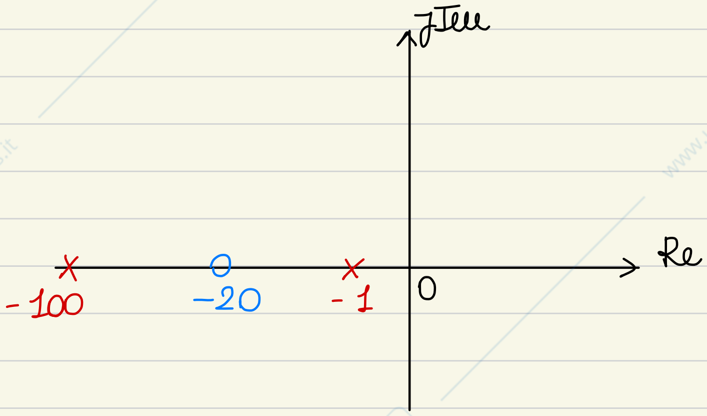
Visto le caratteristiche di $F(s)$ il valore di μ indica il valore di y_∞. Infatti, sono verificate le ipotesi del teorema del valore finale e quindi:

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} s\, Y(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \frac{F(s)}{\cancel{s}} = F(0) = \mu$$

→ Dato che in Figura (3) la risposta allo scalino tende a 1, sicuramente quella NON è la risposta del sistema descritto da $F(s)$.

Dato che lo zero è stabile NON ho sottoelongazione e quindi la risposta di $F(s)$ allo scalino non è quella riportata in (5).

Per scegliere tra le candidate precedenti valutiamo la posizione relativa tra i poli e lo zero di $F(s)$.



Il polo in $s=-1$ è dominante rispetto a quello in $s=-100$ e quindi "detta" il tempo di assestamento. In particolare:

$$T_a \simeq 5\,T_{max} = 5\,s$$

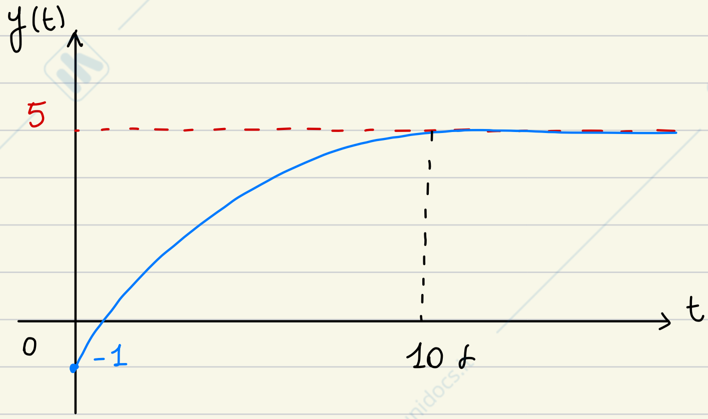
→ La risposta in figura (3) non può rappresentare la risposta a scalino del sistema con funzione di trasferimento $F(s)$ dato che si assesta troppo rapidamente.

Lo zero è compreso tra i due poli → NON si ha sovraelongazione

→ la risposta allo scalino del sistema con funzione di trasferimento $F(s)$ è data dal grafico in figura 2.

Esercizio 2

Si determini la funzione di trasferimento associata alla risposta a gradino riportata nella figura sottostante:



Dato che non si hanno sovraelongazioni o sottoelongazioni possiamo dedurre che il sistema che ha generato la risposta a gradino sottostante sia approssimabile ad un sistema del 1° ordine.

Dato che le condizioni iniziali sono non nulle ($y(0)=-1$). Questo accade quando il grado relativo di numeratore e denominatore è nullo! Nota bene: quando il grado relativo è non nullo la $G(s)$ è strettamente propria e quindi:

$$y(0)=\lim_{s\to\infty} \cancel{s}\frac{G(s)}{\cancel{s}} = \lim_{s\to\infty} G(s)=0$$

Di conseguenza la funzione di trasferimento associata al sistema che ha generato la funzione di trasferimento mostrata sopra ha la forma:

$$G(s)=\mu\frac{(1+sT)}{(1+s\tau)}$$

Dobbiamo quindi trovare i valori di μ, T and τ che portano ad avere la risposta in figura.

In primo luogo notiamo che la risposta a scalino converge quindi $\tau>0$ (affinchè il polo di $G(s)$ sia stabile). Imponendo $\tau>0$ possiamo applicare il teorema del valore finale e quindi

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{G(s)}{\cancel{s}} = G(0)=\mu$$

Dal grafico si nota che $y_\infty=5$ e quindi $\boxed{\mu=5}$

Si noti inoltre che il tempo di assestamento è : $T_a \cong 10s$.
Sappiamo inoltre che $T_a \simeq 5\tau$ e quindi :

$$5\tau = 10 \rightarrow \boxed{\tau = 2}$$

Per trovare il valore di T applichiamo infine il teorema del valore iniziale :

$$y(0) = \lim_{s \to \infty} \frac{\cancel{s} G(s)}{\cancel{s}} = \lim_{s \to \infty} \mu \frac{(1+sT)}{1+s\tau} = \mu \frac{T}{\tau}$$

Dal grafico si nota che $y(0) = -1$ e quindi :

$$\mu \frac{T}{\tau} = -1 \rightarrow \boxed{T = -\frac{\tau}{\mu} = -\frac{2}{5}}$$

Si ottiene quindi che : $\boxed{G(s) = 5 \, \frac{(1 - 2s/5)}{1+2s}}$

Nota bene: il sistema non è a fase non minima (ho uno zero instabile). Questo fa sì che la condizione iniziale sia negativa quando il valore che si vuole inseguire è positivo.

Esercizio 3

Si confrontino le risposte a scalino dei sistemi descritti da :

$$G_1(s) = \frac{6}{1+2s} \qquad G_2(s) = \frac{6+6s}{1+2s} \qquad G_3(s) = \frac{6-6s}{1+2s}$$

Tutte e tre le funzioni di trasferimento sono caratterizzate dallo stesso polo. Infatti il denominatore di $G_i(s)$, con $i = 1, 2, 3$, è dato da :

$$D_i(s) = 1 + s\tau \quad \text{con} \quad \boxed{\tau = 2}$$

Dato che il tempo di assestamento dipende da τ, le risposte di tutti e tre i sistemi si assestano a :

$$T_a \cong 5\tau = 10 s$$

Si noti inoltre che $G_i(0) = \mu_i = 6$, $i = 1, 2, 3$. Quindi, dato che il guadagno in continua rappresenta il valore dell'uscita a regime

$$G_i(0) = \lim_{s \to 0} \frac{\cancel{s} G_i(s)}{\cancel{s}} = \lim_{s \to 0} y_i(s)$$

le risposte di tutti e tre i sistemi tendono allo stesso valore.

Guardando le funzioni di trasferimento differiscono per i loro zeri (nota bene: gli zeri influenzano le condizioni iniziali).

$$y_1(0) = \lim_{s\to\infty} G_1(s)\frac{\cancel{s}}{\cancel{s}} = \lim_{s\to\infty} \frac{6}{1+2s} = 0 \quad \text{(il grado relativo è 0)}$$

$$y_2(0) = \lim_{s\to\infty} G_2(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{6+6s}{1+2s} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{(lo zero è stabile)}$$

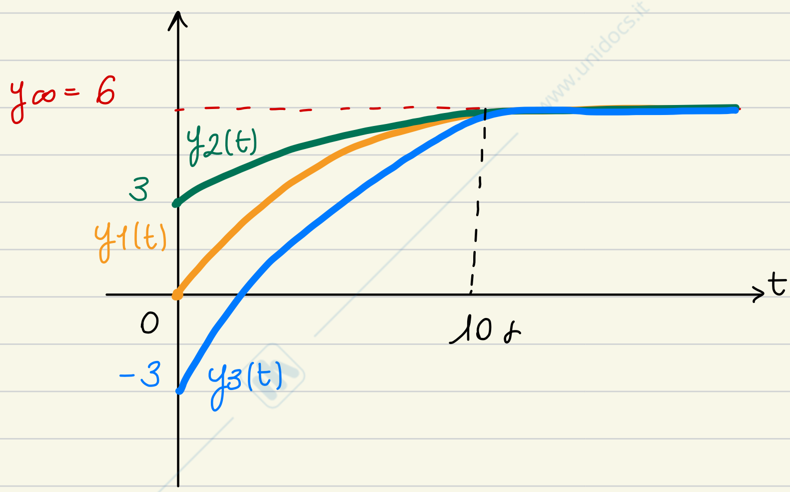
→ si noti che
$$\dot{y}_2(0) = \lim_{s\to\infty} s\left[sY(s) - y_2(0)\right] = \lim_{s\to\infty} s\left[\frac{6+6s}{1+2s} - 3\right]$$
$$= \lim_{s\to\infty} s\left[\frac{6+6s-3(1+2s)}{(1+2s)}\right] = \lim_{s\to\infty} s\left[\frac{6+\cancel{6s}-3-\cancel{6s}}{1+2s}\right] =$$
$$= \frac{3}{2}$$

⇒ la risposta cresce (infatti da $y(0)=3$ deve arrivare a $y_\infty = 6$)

$$y_3(0) = \lim_{s\to\infty} G_3(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{6-6s}{1+2s} = -\frac{6}{2} = -3 \quad \text{(il sistema non è a fase minima)}$$

→ si noti che
$$\dot{y}_3(0) = \lim_{s\to\infty} s\left[sY_3(s) - y_3(0)\right] = \lim_{s\to\infty} s\left[\frac{6-6s}{1+2s} + 3\right] = \lim_{s\to\infty} s\left[\frac{6-\cancel{6s}+3+\cancel{6s}}{1+2s}\right]$$
$$= \frac{9}{2}$$

⇒ la risposta cresce più velocemente del caso precedente dato che, a parità di tempo di assestamento, parto da una condizione iniziale più "lontana" dal valore di regime.



l'effetto di uno zero è lo spostamento della condizione iniziale rispetto a zero. Se lo zero è instabile allora la condizione iniziale è negativa.

Esercizio 4: Fase non minima

Si consideri il seguente sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -10x_1(t) - 11x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

(1) Determinare (ed analizzare) la funzione di trasferimento del sistema

(2) Determinare (in modo qualitativo) la risposta allo scalino

(1) Nota bene: si assume che $x(0)=0$.

Antitrasformando le equazioni di stato si ottiene:

$$\begin{cases} sX_1(s) = X_2(s) \quad (a) \\ sX_2(s) = -10X_1(s) - 11X_2(s) + U(s) \quad (b) \end{cases}$$

(a) $X_1(s) = \dfrac{X_2(s)}{s}$ (la prima componente di stato è solo l'integrale della seconda)

(b) $(s+11)X_2(s) = -10\dfrac{X_2(s)}{s} + U(s)$

$\rightarrow (s^2+11s+10)X_2(s) = sU(s) \rightarrow \boxed{X_2(s) = \dfrac{sU(s)}{s^2+11s+10}}$

da cui si ricava (per sostituzione nell'espressione trovata a partire da (a)):

$$\boxed{X_1(s) = \frac{U(s)}{s^2+11s+10} \cdot \frac{\cancel{s}}{\cancel{s}}}$$

Sostituendo nell'equazione di uscita si ha:

$$Y(s) = X_1(s) - X_2(s) = \left[\frac{1}{s^2+11s+10} - \frac{s}{s^2+11s+10}\right]U(s) = -\frac{(s-1)}{s^2+11s+10}U(s)$$

La funzione di trasferimento associata al sistema è quindi:

$$G(s) = -\frac{(s-1)}{s^2+11s+10}$$

Analizziamo quindi la funzione:

- tipo: non ci sono poli o zeri in zero $\rightarrow g=0$
- guadagno: $\mu = G(0) = \dfrac{1}{10}$

° **poli**: la funzione di trasferimento ha 2 poli in $s=-1$ ed $s=-10$.
Dato che il sistema è del 2° ordine e si hanno 2 poli, l'ordine del sistema e quello della funzione di trasferimento coincidono e quindi non si hanno cancellazioni. Possiamo studiare la stabilità del sistema a partire dai poli della funzione di trasferimento.

→ Il sistema è asintoticamente stabile.

° **zeri**: la funzione ha uno zero in $s=1$ (instabile)

→ il sistema NON è a fase minima

Nota bene: il sistema è strettamente proprio (non ho relazione diretta tra input e output) e la funzione di trasferimento $G(s)$ è strettamente propria.

(2) $u(t) = sca(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{1}{s}$

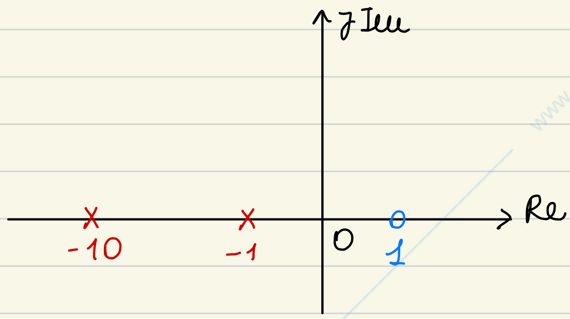
$$\Rightarrow Y(s) = -\frac{(s-1)}{s^2+11s+10} \cdot \frac{1}{s}$$

Dato che $Y(s)$ non ha poli instabili (ma solo un polo in zero e poli a parte reale negativa) posso usare il Teorema del valore finale (TVF)

TVI $$y(0) = \lim_{s\to\infty} Y(s)s = \lim_{s\to\infty} -\frac{(s-1)}{s^2+11s+10} = 0$$

TVF $$y_\infty = \lim_{s\to 0} Y(s)s = \lim_{s\to 0} -\frac{(s-1)}{s^2+11s+10} = \frac{1}{10} = \mu$$

Avendo due poli reali posso calcolare il tempo di assestamento considerando il polo dominante.



Si vede che il polo dominante è quello in $s=-1$ e quindi:

$$\boxed{T_a = 5\tau_{max} = 5s}$$

Per capire come si comporta la risposta del sistema nel transitorio andiamo a calcolare la derivata di $y(t)$.

→ $Y_d(s) = \mathcal{L}[\dot{y}(t)] = Y(s)\cdot s - y(0) = Y(s)\cdot s$

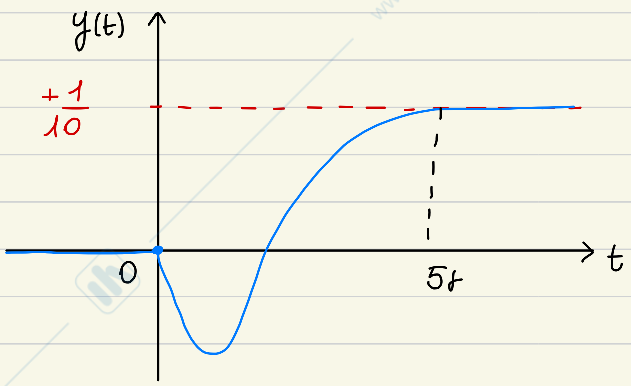
$\to y_d(s) = -\frac{(s-1)}{s^2+11s+10}\cdot\frac{1}{\cancel{s}}\cdot\cancel{s} = -\frac{(s-1)}{s^2+11s+10}$ la funzione di trasferimento è razionale, strettamente propria e con poli a parte reale negativa.

Applicando il teorema del valore iniziale si può calcolare la derivata di $y(t)$ in zero e quindi capire come varia inizialmente la risposta.

TVI $\quad \dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\,Y_d(s) = \lim_{s\to\infty} -\frac{s(s-1)}{s^2+11s+10} = -1$ la derivata è NEGATIVA $\to$ inizialmente la risposta DECRESCE (allontanandosi quindi inizialmente dal valore di regime)

Nota bene: la derivata è negativa perché il sistema è a fase non minima.

Nota bene: l'ordine della prima derivata non nulla di y nell'origine dipende dal grado relativo della f.d.t. $G(s)$. In questo caso il grado relativo (differenza poli-zeri) è 1 e quindi $\dot{y}(0)\neq 0$.



Verifichiamo infine la risposta ottenuta in modo analitico (ossia scomponiamo con Heaviside $Y(s)$ e antitrasformiamo)

$$Y(s) = -\frac{(s-1)}{s^2+11s+10}\,\frac{1}{s} = -\frac{(s-1)}{(s+1)(s+10)}\,\frac{1}{s} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{s+10}$$

$\to \alpha_1(s+1)(s+10) + \alpha_2 s(s+10) + \alpha_3 s(s+1) = -(s-1)$

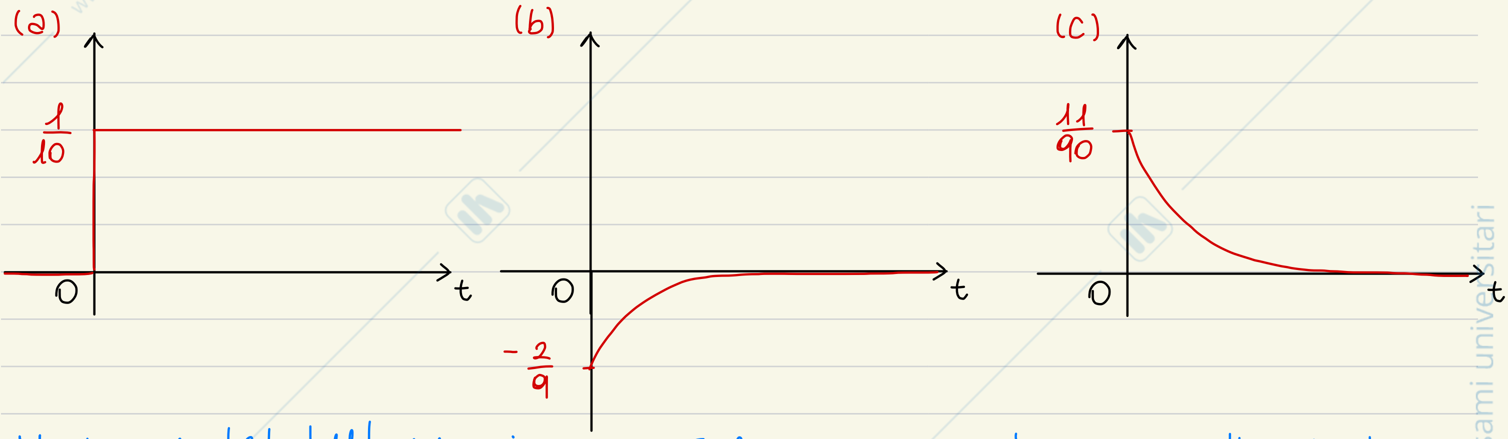
$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)s^2 + (11\alpha_1 + 10\alpha_2 + \alpha_3)s + 10\alpha_1 = -(s-1)$

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0 & (a) \\ 11\alpha_1 + 10\alpha_2 + \alpha_3 = -1 & (b) \\ 10\alpha_1 = 1 \to \alpha_1 = \frac{1}{10} & \text{(Nota che è uguale a } \mu) \end{cases}$$

(a)-(b) $\begin{cases} -10\alpha_1 - 9\alpha_2 = 1 \to -9\alpha_2 = 1 + 10\alpha_1 \Rightarrow -9\alpha_2 = 2 \to \alpha_2 = -\frac{2}{9} \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0 \end{cases}$

$\hookrightarrow \alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2 = -\frac{1}{10} + \frac{2}{9} = \frac{-9+20}{90} = \frac{11}{90}$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s}-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{11}{90}\,\frac{1}{s+10}\right]=\underbrace{\frac{1}{10}\,sca(t)}_{(a)}-\underbrace{\frac{2}{9}\,e^{-t}sca(t)}_{(b)}+\underbrace{\frac{11}{90}\,e^{-10t}sca(t)}_{(c)}$$



Nota bene che $\left|\frac{2}{9}\right| > \left|\frac{11}{90}\right|$, determinando così la sottoelongazione una volta che t è di poco maggiore a zero.

$$y(0)=\frac{1}{10}-\frac{2}{9}+\frac{11}{90}=\frac{9-20+11}{90}=0.$$ (a riprova del risultato ottenuto con TVI)