

Esercizio 1

Si consideri la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\mu}{s(s+1)}, \quad \mu > 0 \text{ e } |\mu| < 1$$

Tracciare il diagramma polare di $G(j\omega)$.

Per tracciare il diagramma polare seguiamo questi step:

- (1) analisi di $G(s)$
- (2) tracciamento dei diagrammi di Bode (asintotici)
- (3) tracciamento dei diagrammi polari

(1)

La funzione di trasferimento $G(s)$:

- * è di tipo $g=1$ (ha un polo nell'origine)
- * ha guadagno (generalizzato) $= G(0)s^g = \mu$ **positivo**
- * Non ha zeri
- * ha un polo in $p=-1$

(2)

Viste le caratteristiche della f.d.t.:

- $g=1 \rightarrow$ il diagramma di Bode del modulo ha pendenza iniziale -20 dB/dec
 \rightarrow il diagramma di Bode della fase ha inizialmente valore -90°
- $\mu > 0 \rightarrow$ il diagramma di Bode della fase non è influenzato dal guadagno
- $p=-1 \rightarrow$ per $\omega \geq 1 \text{ rad/s}$, il diagramma di Bode del modulo decreta di altri -20 dB/dec
 \rightarrow per $\omega \geq 1 \text{ rad/s}$, il diagramma di Bode della fase decreta di altri -90°

Potremmo disegnare i diagrammi di Bode a partire da $\omega = 10^{-1} \text{ rad/s}$. Dobbiamo quindi capire $|G(j10^{-1})|_{\text{dB}}$ (dato che questo differisce da $20 \log |\mu|$, che possiamo calcolare come:

$$|G(j0.1)|_{\text{dB}} \approx 20 \log |\mu| - 20g \log |j10^{-1}| = 20 \log |\mu| + 20$$

trascuro le
altre lungolarità (che hanno ω arrotondata più alta)

Il diagramma di Bode riportato in figura sottostante si ottiene per $\mu \approx 0.9$ (per valori di μ diversi cambia il punto di partenza del diagramma).

Nota:

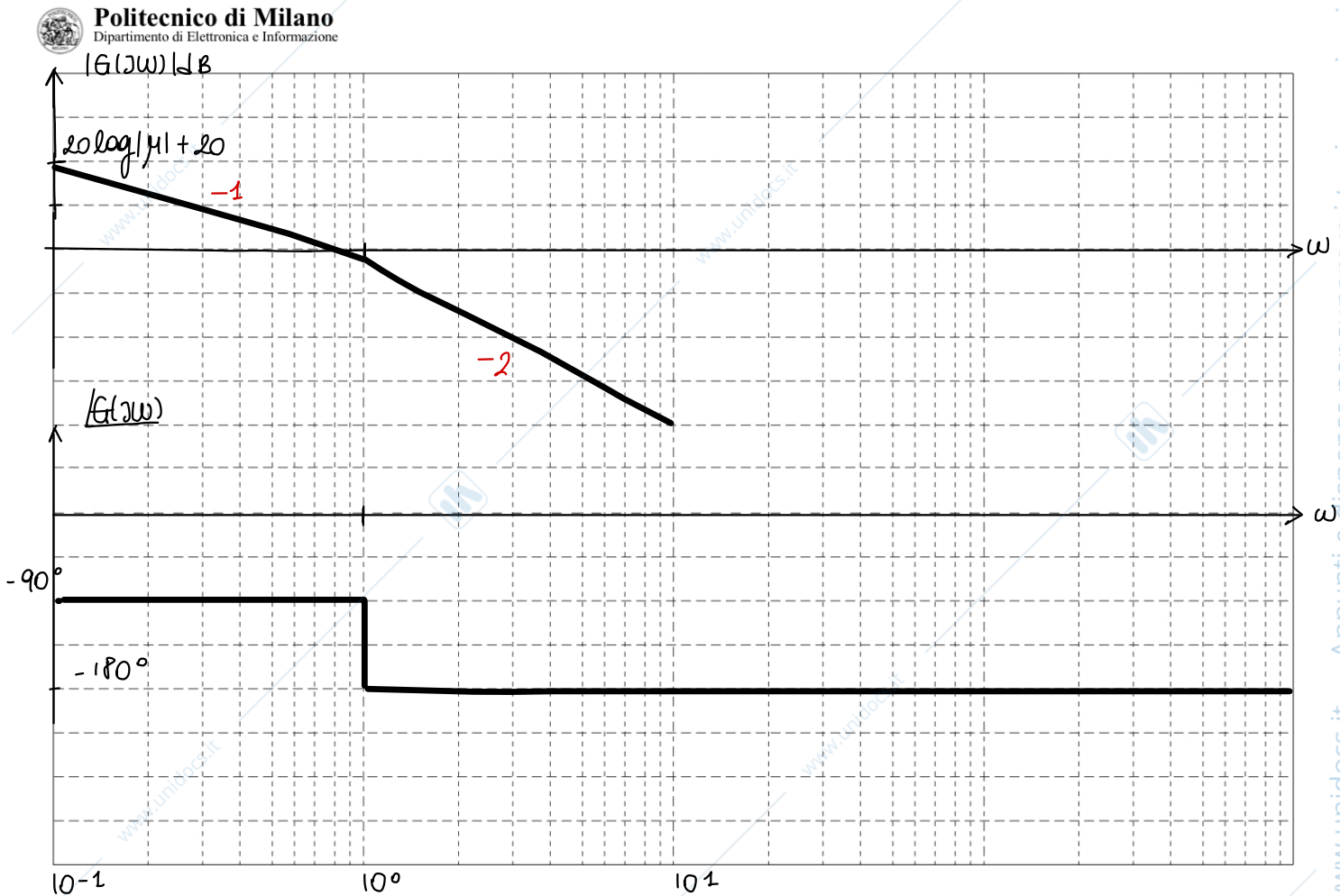
$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |\mu| - 20 \log |\omega| - 20 \log |1+j\omega| = 20 \log |\mu| - 20g \log(\omega) - 20 \log(\sqrt{1+\omega^2})$
 $20 \log(\omega)$ è positivo solo per $\omega > 1$ (prima si va a sommare a $20 \log |\mu|$), mentre $20 \log(\sqrt{1+\omega^2})$ diventa non trascurabile solo per $\omega > 1$.

In prima approssimazione mi aspetto che il modulo non sia ricorrenemente negativo per $\omega < 1$ (qualiasi sia il valore di μ).

Dato che per $\omega < 1$ rad/s il polo in $p = -1$ ha un effetto trascurabile sul $|G(j\omega)|_{dB}$, allora:

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log |\mu| - 20 \log \omega \rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 0 \rightarrow 20 \log |\mu| - 20 \log \omega = 0$$

$$\rightarrow 20 \log \left(\frac{|\mu|}{\omega} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{|\mu|}{\omega} = 1 \rightarrow \omega = |\mu| \text{ o sia } \omega = |\mu|^{1/9} \text{ pulsazione di intersezione con l'asse a } 0 \text{ dB.}$$



Partiamo quindi al disegno del diagramma polare, studiando la $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = \frac{\mu}{j\omega(1+j\omega)} = \frac{\mu}{-\omega^2 + j\omega}$$

$$\rightarrow |G(j\omega)| = \frac{|\mu|}{|\omega| |j - \omega|} = \frac{|\mu|}{\omega \sqrt{1 + \omega^2}}$$

$$\rightarrow \angle G(j\omega) = \text{atg}(\mu) - \text{atg}(j\omega) - \text{atg}(1 + j\omega) = 0^\circ - 90^\circ - \text{atg}(\omega)$$

Quindi,

$$\bullet \omega \rightarrow 0 \text{ allora } |G(j\omega)| \rightarrow \infty \text{ e } \angle G(j\omega) \rightarrow -90^\circ$$

• $\omega \rightarrow +\infty$ allora $|G(j\omega)| \rightarrow 0$ e $\angle G(j\omega) \rightarrow -90^\circ - (90^\circ) = -180^\circ$ (per le proprietà dell'atg.)

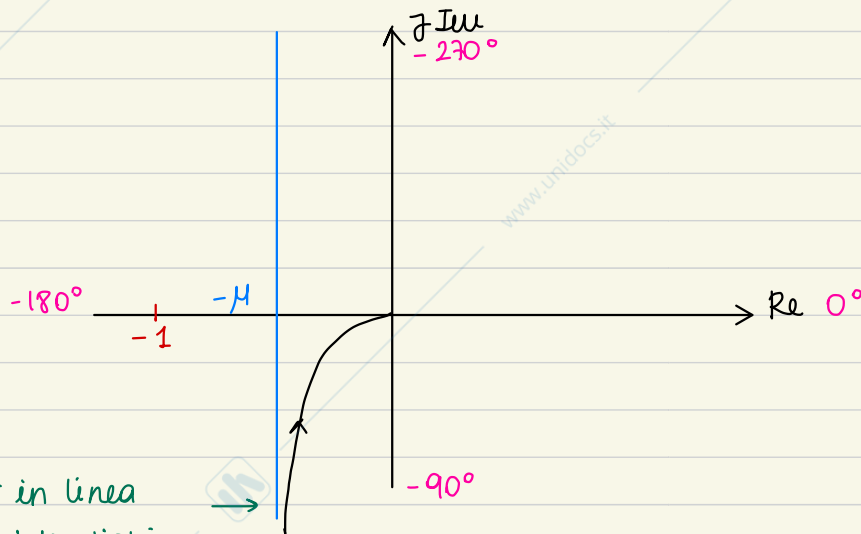
→ Il diagramma polare (per $\omega \rightarrow 0$) ha un **asintoto verticale**. In particolare:

$$G(j\omega) = \operatorname{Re}(G(j\omega)) + j \operatorname{Im}(G(j\omega))$$

Analizziamo le parte reale e la parte immaginaria di $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = \frac{\mu}{\omega(j-\omega)} = \frac{\mu}{\omega} \frac{(-j-\omega)}{(1+\omega^2)} = -\frac{\mu}{1+\omega^2} - \frac{j\mu}{\omega(1+\omega^2)}$$

- per $\omega \rightarrow 0$ $\operatorname{Re}(G(j\omega)) \rightarrow -\mu$ e $\operatorname{Im}(G(j\omega)) \rightarrow -\infty$ (ho un asintoto verticale in $-\mu$)
- per $\omega \rightarrow \infty$ $\operatorname{Re}(G(j\omega)) \rightarrow 0$ e $\operatorname{Im}(G(j\omega)) \rightarrow 0$



Il grafico è in linea con le considerazioni sulla fase che con quelle sulla parte immaginaria di $G(j\omega)$

Esercizio 2

Tracciare il diagramma polare della risposta in frequenza del sistema G :

$$G(f) = -28 \frac{f-1}{(f+0.5)(f+1)}$$

Per il tracciamento del diagramma polare, analizziamo prima la funzione di trasferimento. In primo luogo portiamo la funzione di trasferimento in forme di Bode:

$$G(f) = -28 \frac{-1(1-f)}{0.5(1+2f)(1+f)} = 56 \frac{(1-f)}{(1+2f)(1+f)}$$

Quindi, la funzione:

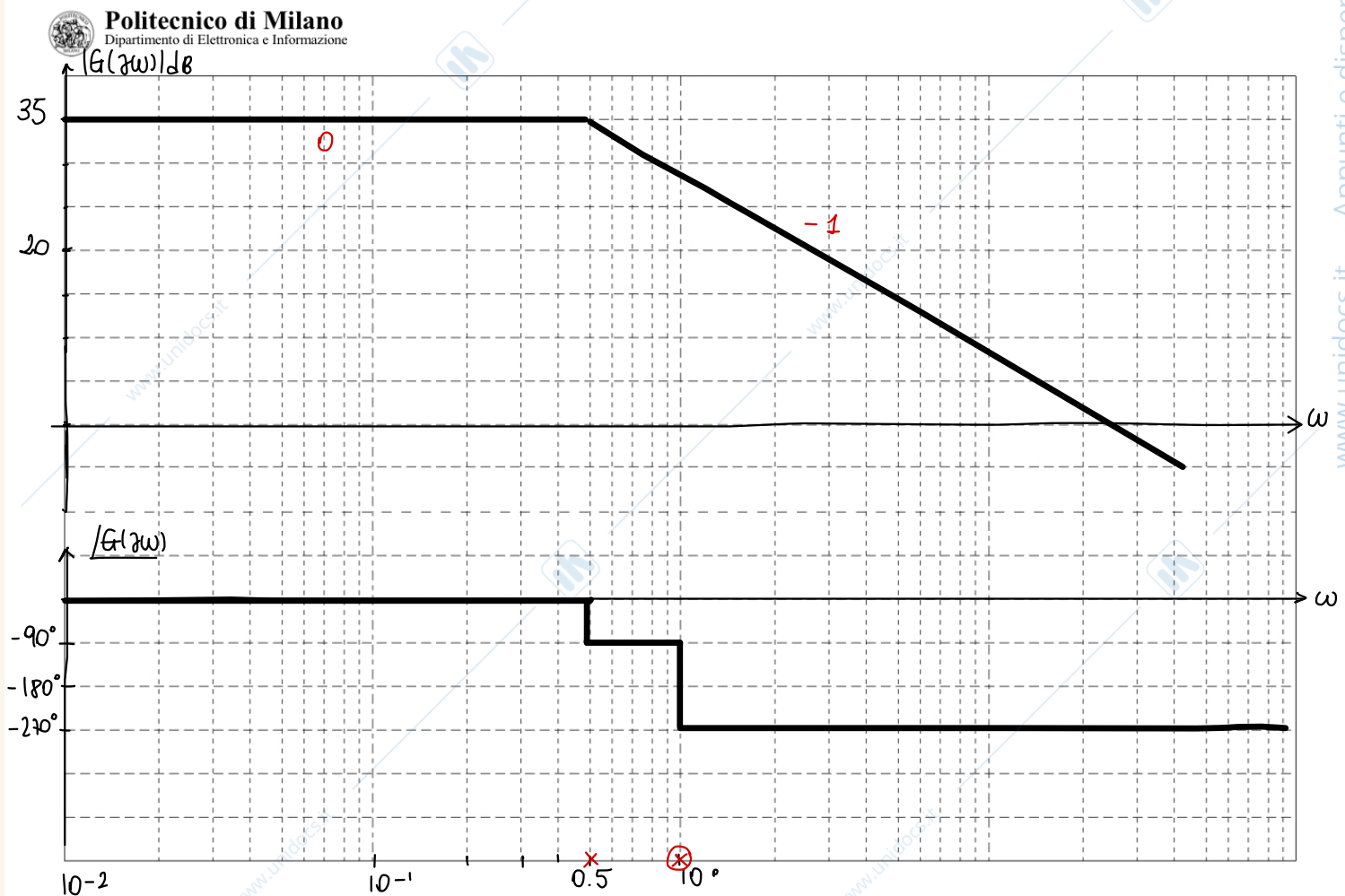
- è di tipo $g=0$
- ha guadagno $\mu=56$
- ha uno zero in $z=1$ (instabile)
- ha 2 poli: $p_1=-0.5$ e $p_2=-1$ (entrambi stabili)

Date le caratteristiche della funzione di trasferimento.

- $u > 0$ e $g = 0 \rightarrow$ il diagramma di Bode del modulo ha pendenza 0 dB/dec e assume valore $20 \log |u|$ fino a quando non viene raggiunta la prima irregolarità
- \rightarrow il diagramma di Bode della fase ha valore 0° fino a quando non viene raggiunta la prima irregolarità.

Nota. $20 \log |u| = 20 \log 56 \approx 35 \text{ dB}$

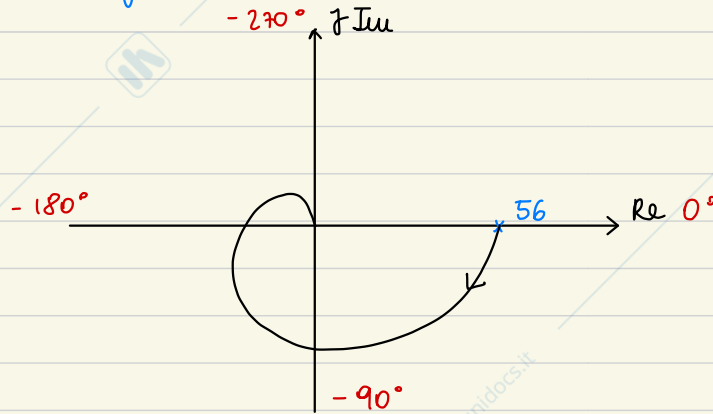
- $p_1 = -0.5 \rightarrow$ da $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$:
 - il diagramma del modulo decresce di -20 dB/dec
 - il diagramma della fase decresce di -90° (dato che il polo è stabile)
 - $z = 1 \rightarrow$ da $\omega = 1 \text{ rad/s}$:
 - il diagramma del modulo si porta a crescere di 20 dB/dec , rispetto alla pendenza precedente
 - dato che lo zero è instabile, la fase decresce ulteriormente di -90°
 - $p_2 = -1 \rightarrow$ da $\omega = 1 \text{ rad/s}$:
 - il diagramma di Bode del modulo decresce di -20 dB/dec (rispetto alla pendenza precedente)
 - il diagramma di Bode della fase decresce di altri -90°
- \rightarrow l'effetto del polo e dello zero instabile si annulla in modulo e corrisponde a quello di un doppio polo stabile in fase.



Guardando la funzione di trasferimento ed i diagrammi di Bode si nota che:

• $\omega \rightarrow 0$ $|G(j\omega)| = G(0) = 56$, $\angle G(j\omega) = 0^\circ \rightarrow$ il diagramma polare ha inizio nel punto $(56, 0)$ nel piano complesso

• $\omega \rightarrow \infty$ $|G(j\omega)| = 0$ (dato che la funzione è strettamente propria - nota che: $|G(j\omega)|_{dB} \rightarrow -\infty$ e che $20 \log |G(j\omega)| \rightarrow \infty$ se e solo se $|G(j\omega)| \rightarrow 0$) e $\angle G(j\omega) = -270^\circ$



Esercizio 3

Tracciare il diagramma polare delle risposte in frequenza del sistema G

$$G(s) = \frac{1+s}{(1-\frac{1}{5}s)(1+0.1s)}$$

la funzione di trasferimento:

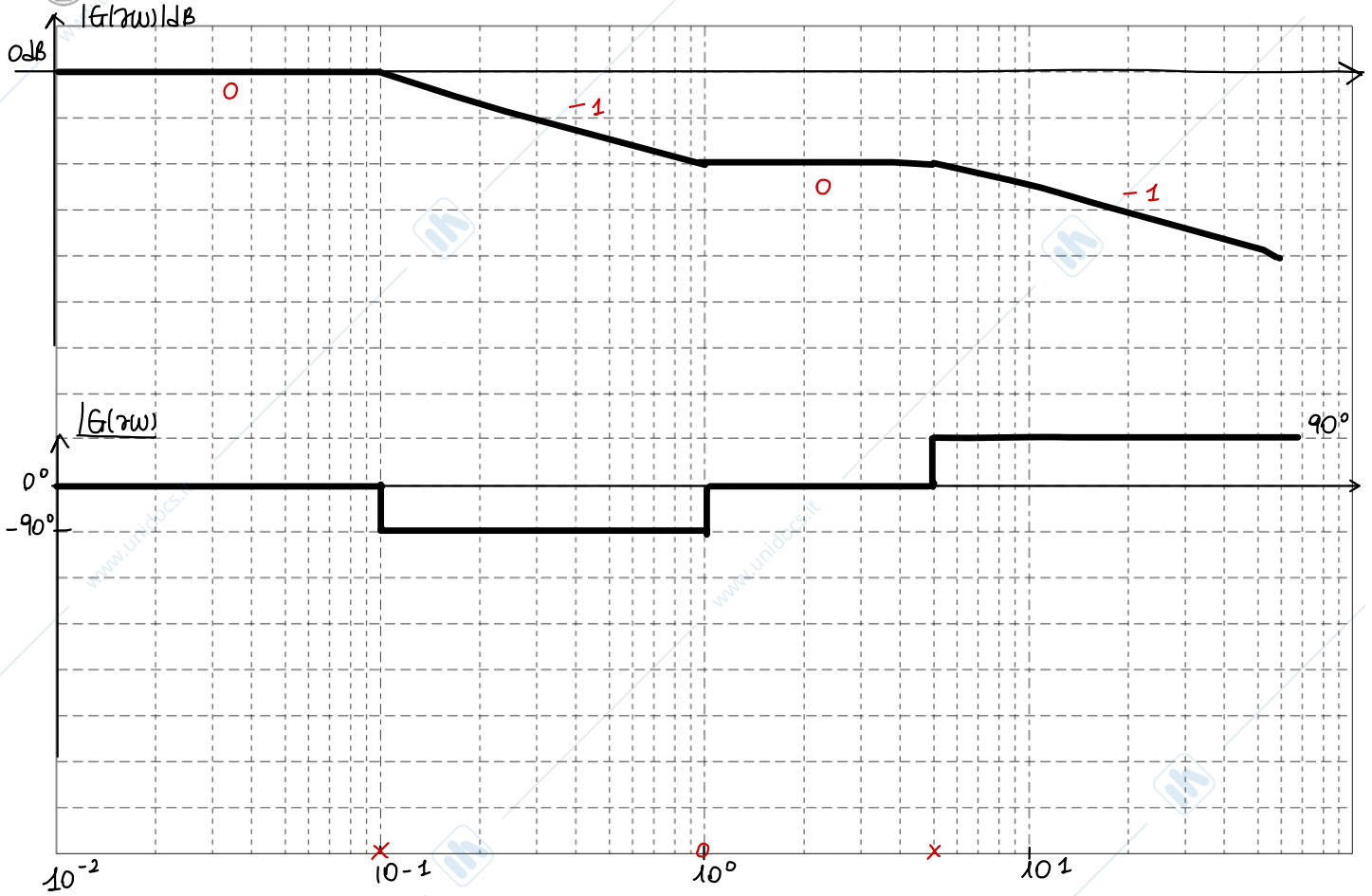
- è di tipo $g=0$
- ha guadagno $\mu=1$
- ha uno zero in $z=-1$ (stabile)
- ha due poli, uno in $p_1=5$ (instabile) ed uno in $p_2=-0.1$ (stabile)

Di conseguenza:

- $g=0$ e $\mu=1 \rightarrow$ la pendenza del diagramma del modulo è 0 dB/dec , ed il modulo ha valore $20 \log |\mu| = 0 \text{ dB}$
- $p_2 = -0.1 \rightarrow$ per $\omega = 0.1 \text{ rad/s}$:
 - il diagramma del modulo decreta di -20 dB/dec
 - il diagramma della fase decreta di -90° (polo stabile)
- $z = -1 \rightarrow$ per $\omega = 1 \text{ rad/s}$:
 - il diagramma del modulo cresce di 20 dB/dec (rispetto alla pendenza precedente)
 - il diagramma della fase cresce di 90° (zero stabile)
- $p_1 = +5 \rightarrow$ per $\omega = 5 \text{ rad/s}$:
 - il diagramma del modulo decreta di -20 dB/dec (rispetto alla pendenza precedente)
 - il diagramma della fase cresce di 90° (dato che il polo è instabile)

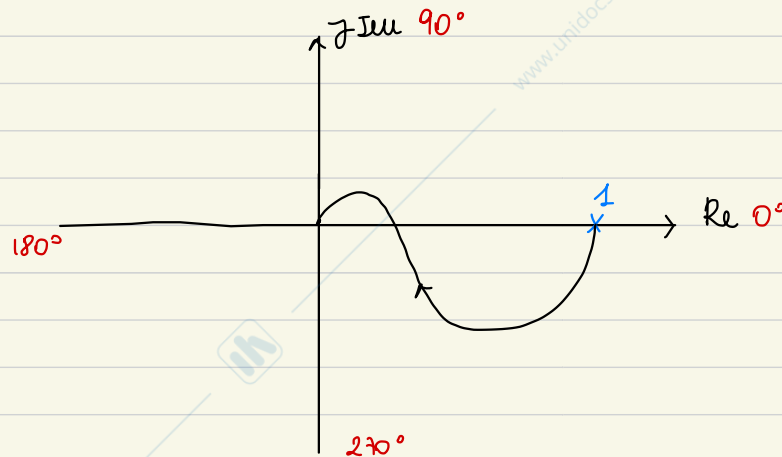


Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione



Guardando i diagrammi di Bode si nota che:

- $\omega \rightarrow 0$ $|G(j\omega)| = 1$ e $\angle G(j\omega) = 0^\circ$ (il diagramma polare parte dal punto (1,0))
- $\omega \rightarrow +\infty$ $|G(j\omega)| \rightarrow 0$ e $\angle G(j\omega) \rightarrow 90^\circ$



Esercizio 4

Tracciare il diagramma polare della risposta in frequenza del sistema G

$$G(s) = 100 \frac{e^{-2s}}{1+4s}$$

La funzione di trasferimento non è razionale. Capiremo quindi prima quale sia l'effetto del ritardo sul modulo e sulla fase della $G(s)$.

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} &= 20 \log |100| + 20 \log |e^{-2j\omega}| - 20 \log |1+j4\omega| = \\ &= 20 \log |100| + 20 \log |\underbrace{\sin(2\omega) - \cos(2\omega)}_{=1}| - 20 \log |1+j4\omega| = \\ &= 20 \log |100| - 20 \log |1+j4\omega| = |\tilde{G}(j\omega)|_{dB} \quad \text{con} \quad \tilde{G}(j\omega) = \frac{100}{1+4j\omega} \quad \begin{array}{l} \text{funzione} \\ \text{razionale} \end{array} \end{aligned}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle 100 + \angle e^{-2j\omega} - \angle 1+4j\omega = \angle e^{-2j\omega} - \text{atg}(4\omega) = -2\omega - \underbrace{\text{atg}(4\omega)}_{\angle \tilde{G}(j\omega)}$$

L'effetto del ritardo è quindi quello di portare ad una diminuzione delle fase lineare con ω .

→ l'effetto del ritardo è visibile solo nella fase

Portiamo quindi disegnare i diagrammi di Bode di $\tilde{G}(j\omega)$ e poi disegnare $|G(j\omega)|$ approssimativamente per punti.

Condensiamo $\tilde{G}(s)$:

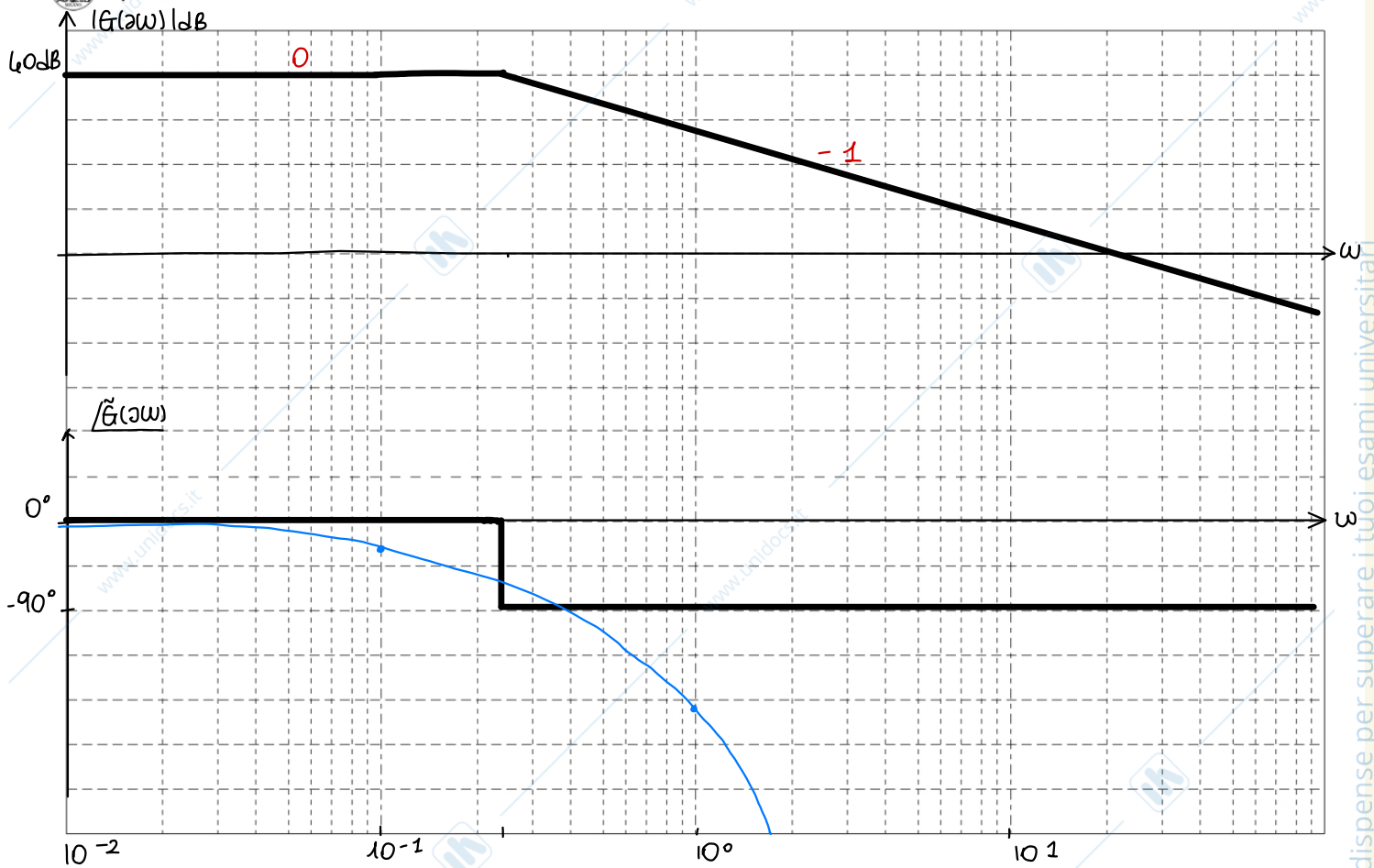
$$\tilde{G}(s) = \frac{100}{1+4s}$$

La funzione di trasferimento:

- è di tipo $g=0$
- ha guadagno $\mu=100$
- ha un solo polo in $p_1 = -\frac{1}{4}$ (stabile)

Di conseguenza:

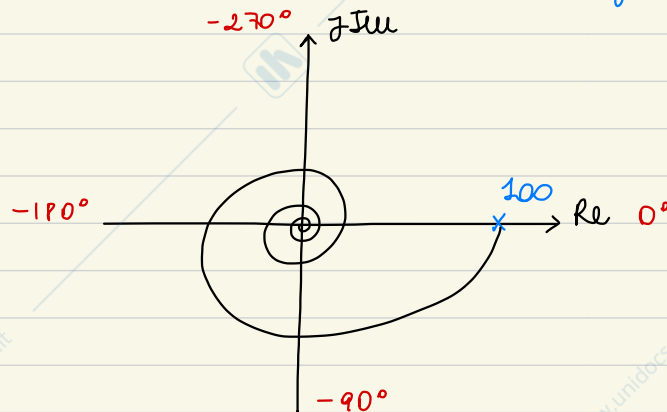
- $g=0$ e $\mu > 0$ → il diagramma del modulo ha pendenza iniziale pari a 0 dB/dec e il diagramma ha valore $20 \log |\mu| = 20 \log 100 = 40$ dB
→ il diagramma della fase è inizialmente pari a 0°
- $p_1 = -0.25$ → per $\omega = 0.25$ rad/s:
 - il diagramma del modulo decreta di 20 dB/dec
 - il diagramma della fase decreta di -90°



$$\begin{aligned}
 |G(j\omega)| &= -2\omega - \text{atg}(4\omega) \rightarrow |G(j0.1)| = -0.2 - \text{atg}(0.4) \approx -11.45^\circ - 21.80^\circ = -33.25^\circ \\
 |G(j1)| &= -2 - \text{atg}(4) \approx -114.45^\circ - 75.96^\circ = -190.41^\circ \\
 |G(j2)| &= -4 - \text{atg}(8) \approx -229.18^\circ - 86.42^\circ = -315.60^\circ
 \end{aligned}$$

Potremmo quindi notare come:

- $\omega \rightarrow 0$ $|G(j\omega)| = 100$ e $\angle G(j\omega) = 0^\circ$ (il diagramma polare parte dall'asse reale nel punto $(100, 0)$)
- $\omega \rightarrow \infty$ $|G(j\omega)| \rightarrow 0$ e $\angle G(j\omega)$ decreta all'infinito \rightarrow ho un andamento spiraleico (in prossimità dell'origine)



Esercizio 5 (margini di stabilità)

Si consideri la seguente funzione di sistema:

$$L(s) = \frac{\mu}{(1+sT_1)^2(1+sT_2)} \quad \text{con } T_1 \gg T_2 \text{ e } \mu, T_1, T_2 > 0$$

Visualizzare i margini di stabilità nei diagrammi di Bode e nei diagrammi polare.

Sappiamo che:

- * margine di fase $\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$ con $\varphi_c = \angle L(j\omega_c)$ con $\omega_c = \{ \omega : |L(j\omega)| = 1 \}$
- * margine di guadagno $mg = -|L(j\omega_\pi)|_{dB} \left(\frac{1}{|L(j\omega)|} \right)$ con $\omega_\pi = \{ \omega : \angle L(j\omega) = -180^\circ \}$

Analizziamo prima la funzione di trasferimento:

- tipo: $q=0$ (non ci sono né poli né zeri nell'origine)
- Guadagno: $\mu > 0$
- No zeri
- 3 poli: 2 poli coincidenti in $p_1 = -\frac{1}{T_1}$ (stabile) $\rightarrow \omega_{p1} \ll \omega_{p2}$ per definizione
- 1 polo in $p_2 = -\frac{1}{T_2}$ (stabile)

Abbiamo quindi che:

- $\omega < \omega_{p1}$ i diagrammi di Bode sono influenzati dal solo guadagno $\mu > 0$
 - \rightarrow il diagramma del modulo ha pendenza 0 dB/dec e valore $20 \log \mu$
 - \rightarrow il diagramma della fase ha valore 0°
- $\omega = \omega_{p1}$ si rivela dell'effetto del doppio polo (stabile)
 - \rightarrow la pendenza del diagramma del modulo passa a -40 dB/dec
 - \rightarrow la fase passa a -180°
- $\omega = \omega_{p2}$ si rivela dell'effetto dell'ultimo polo (stabile)
 - \rightarrow la pendenza del diagramma del modulo decreta di altri -20 dB/dec
 - \rightarrow la fase diminuisce di altri -90°

I margini di stabilità devono essere visti dai **diagrammi veri** e non da quelli approssimati, che in questo caso siamo in grado di disegnare più o meno accuratamente dato che le singolarità sono isolate.

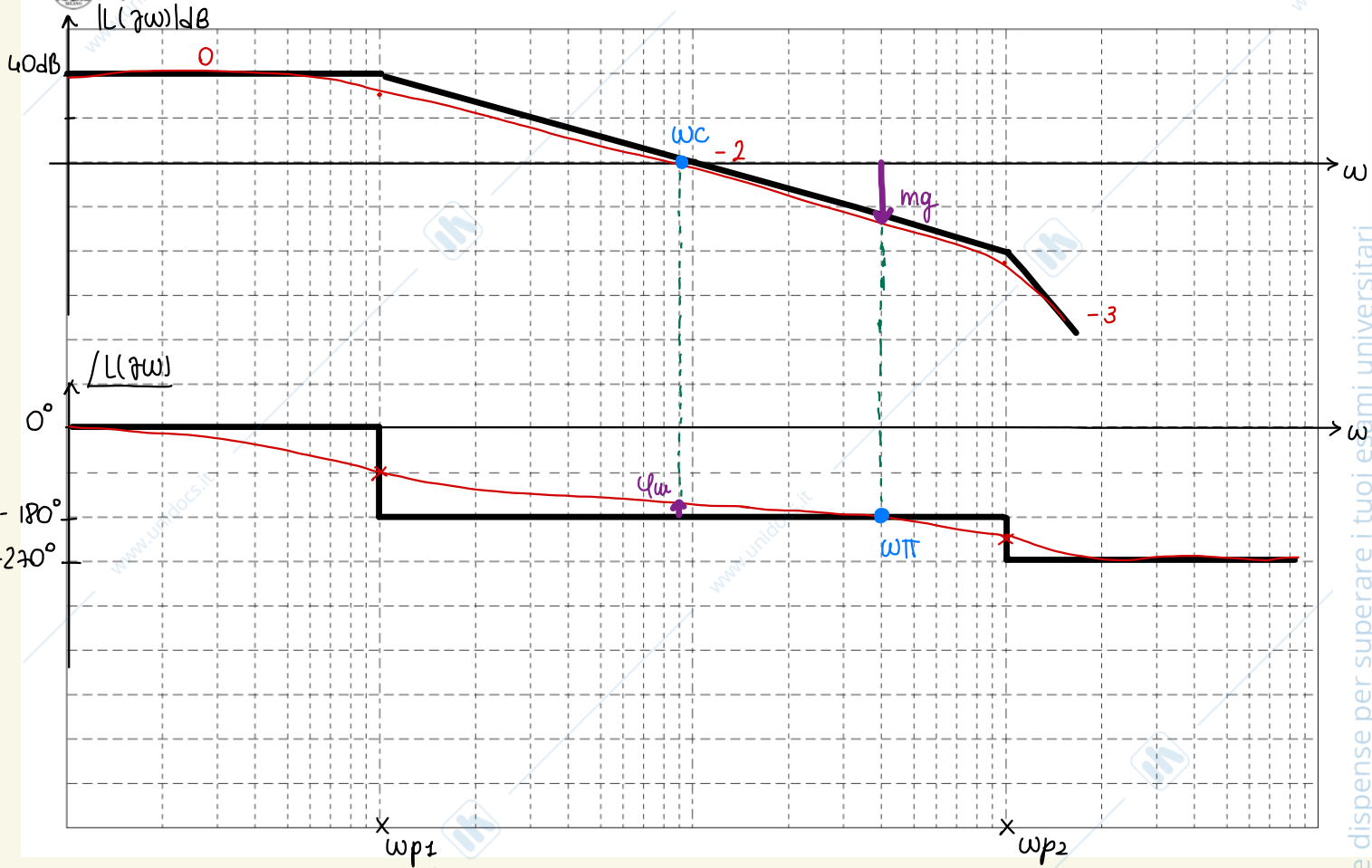
Modulo: ho un errore di -6 dB in corrispondenza di ω_{p1} , e di -3 dB per $\omega = \omega_{p2}$.

Fase: ad ogni cambio di pendenza passo per un punto medio tra il valore precedente e successivo della fase.

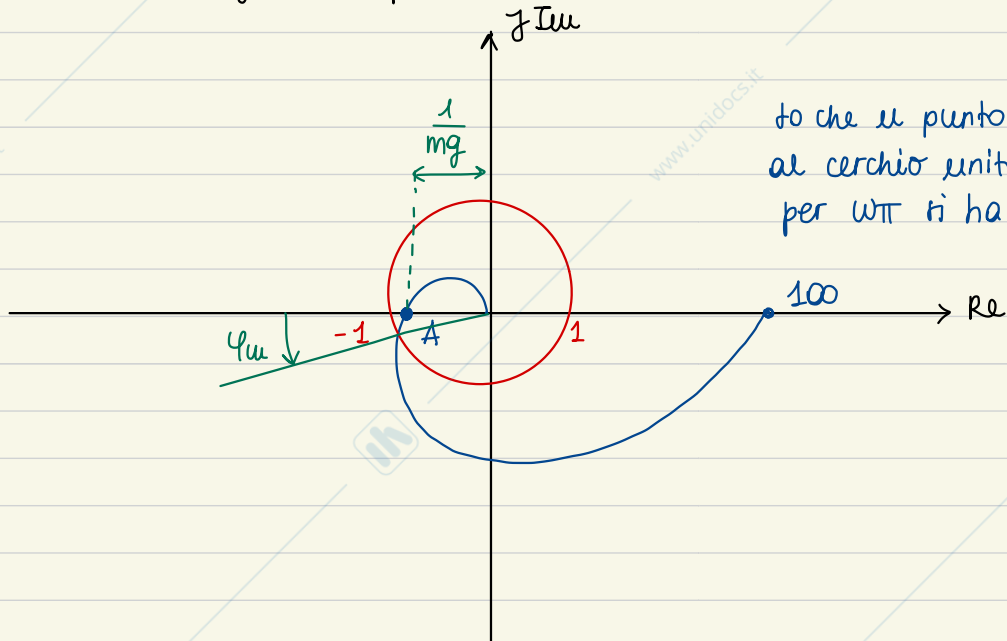
Di seguito riportiamo il diagramma di Bode assumendo che $\mu = 100$ e che ω_{p1} ed ω_{p2} si trovino a due decadi di distanza.



Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione

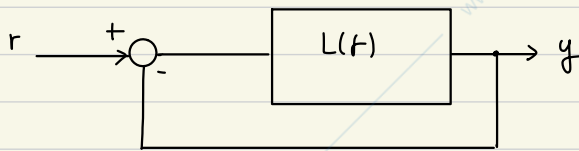


Se consideriamo invece il diagramma polare.



to che il punto A è interno al cerchio unitario perché, per ω_T si ha: $|L(j\omega)|_{dB} < 0dB$

Esercizio 6 (stabilità retroazionati)



ti consideri la seguente funzione di anello :

$$L(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)}$$

- (1) Tracciare i diagrammi di Bode di $L(s)$
- (2) studiare la stabilità del sistema retroazionato
- (3) Calcolare il margine di guadagno
- (4) ti consideri $L(s) = \frac{2.5}{(s+1)(1+0.5s)(1+0.1s)}$. Studiare la stabilità del sistema retroazionato e calcolare il margine di guadagno

(1) $L(s)$ non è in forma di Bode. Quindi per prima cosa lo riportiamo in forma di Bode :

$$L(s) = \frac{5}{2(1+s)(1+0.5s)} = \frac{2.5}{(1+s)(1+0.5s)}$$

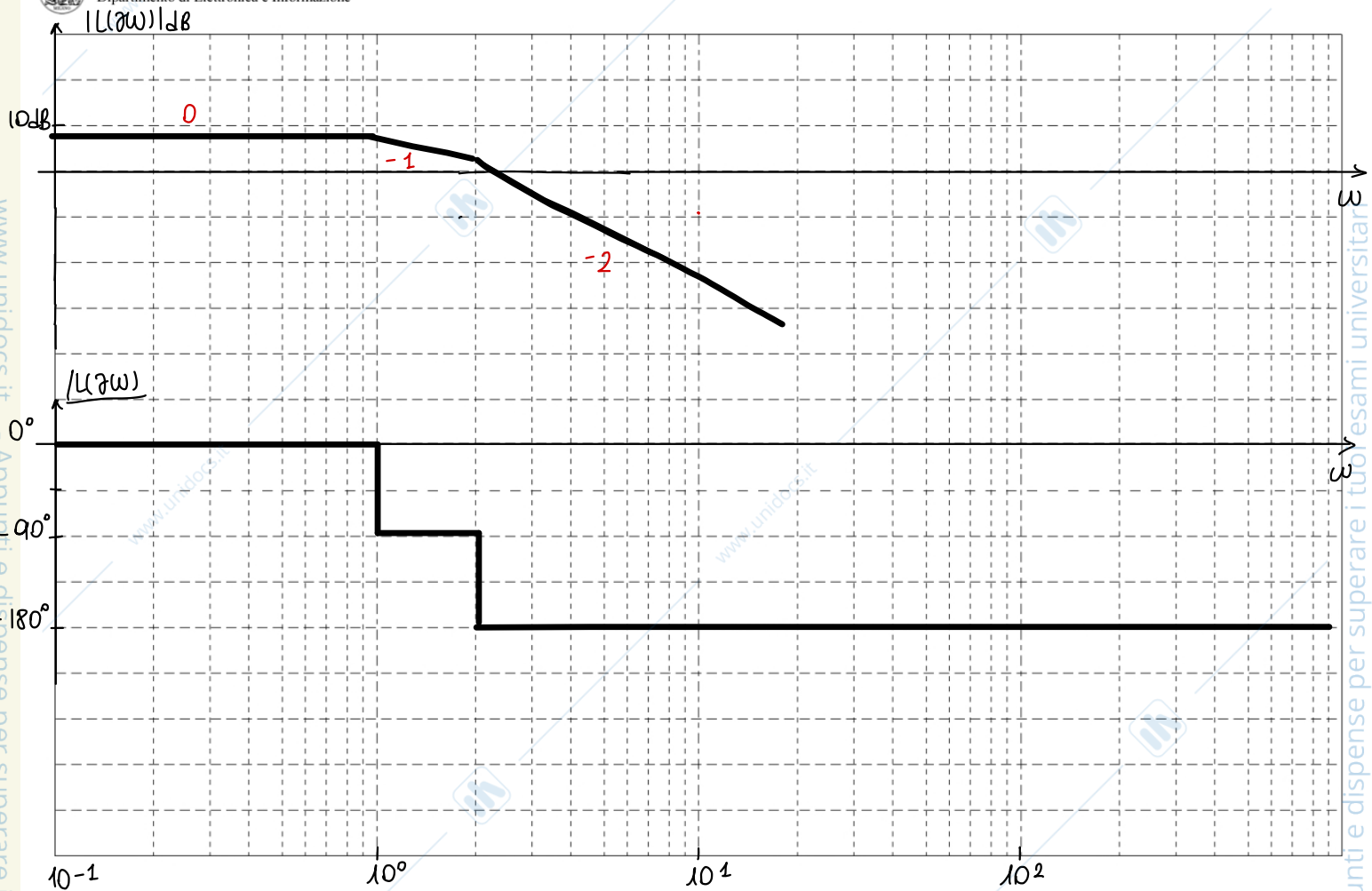
la funzione di trasferimento:

- è di tipo $q=0$
- ha guadagno $\mu = 2.5$
- ha 2 poli in $p_1 = -1$ e $p_2 = -2$ (stabile)

Quindi:

- da $\omega < \omega_{p1}$ ($\omega_{p1} = 1 \text{ rad/s}$) allora i diagrammi sono influenzati solo da
 - il diagramma del modulo ha valore $20 \log 2.5$ e pendenza 0 dB/dec
 - il diagramma delle fasi ha valore 0°
- da $\omega = \omega_{p1}$
 - il diagramma del modulo ha pendenza -20 dB/dec
 - il diagramma delle fasi ha valore -90° (polo stabile)
- da $\omega = \omega_{p2}$
 - la pendenza del diagramma del modulo si riduce di -20 dB/dec
 - la fase si riduce di -90° (polo stabile)

ti noti che: $20 \log \mu = 20 \log 2.5 \cong 8 \text{ dB}$



(2)

Possiamo applicare il criterio di Bode (dato che $P=0$ e che ha un unico attraversamento di $|L(j\omega)|$ dB a 0 dB).

$\mu > 0$ e quindi dobbiamo calcolare il margine di fase $\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$. Per far questo dobbiamo trovare ω_c tale che $|L(j\omega_c)|$ dB = 0 dB. Ci aspettiamo che $\omega_c \in [1, 2]$ rad/s (vedi i diagrammi di Bode). Però calcoliamo ω_c analiticamente risolvendo:

$$|L(j\omega_c)| = 1 \rightarrow \left| \frac{5}{(j\omega_c + 1)(j\omega_c + 2)} \right| = \frac{5}{|(j\omega_c + 1)(j\omega_c + 2)|} = 1$$

$$\rightarrow |(j\omega_c + 1)(j\omega_c + 2)| = 5$$

$$\rightarrow |2 - \omega_c^2 + j3\omega_c| = 5 \Rightarrow \sqrt{(2 - \omega_c^2)^2 + 9\omega_c^2} = 5$$

$$\rightarrow 4 + \omega_c^4 - 4\omega_c^2 + 9\omega_c^2 = 25 \Rightarrow \omega_c^4 + 5\omega_c^2 - 21 = 0 \rightarrow \omega_c^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{109}}{2}$$

Dato che $\omega_c^2 > 0$ per definizione l'unica soluzione accettabile è $\omega_c^2 = \frac{-5 + \sqrt{109}}{2} \cong 2.7$

$$\rightarrow \omega_c \cong 1.65 \text{ rad/s}$$

Calcoliamo quindi analiticamente la fase:

$$\angle L(j\omega) = \angle \mu - \angle (1+j\omega) - \angle (1+j0.5\omega) = -\text{atg}(\omega) - \text{atg}(0.5\omega) \cong -58.8^\circ - 39.5^\circ = -98.3^\circ$$

$$\rightarrow \varphi_m \cong 180^\circ - 98.3^\circ = 81.7^\circ > 0$$

→ Il sistema in anello chiuso è **asintoticamente stabile**

In questo caso potevamo anche usare il teorema della piccola fase. Infatti $\angle L(j\omega) \rightarrow -180^\circ$ per $\omega \rightarrow \infty$ e quindi è verificata la condizione sufficiente per l'asintotica stabilità.

(3) Dato che $\angle L(j\omega) \rightarrow -180^\circ$ solo per $\omega \rightarrow +\infty$ allora $k_m = +\infty$

Il guadagno può quindi aumentare infinitamente senza che il sistema diventi instabile.

(4) Nota che la nuova $L(s) = \frac{2.5}{(s+1)(1+0.5s)(1+0.1s)} = \underbrace{L_{(1)}(s)}_{\text{la } L(s) \text{ precedente}} \cdot \frac{1}{1+0.1s}$

Quello che cambia è l'aggiunta di un polo in $p_3 = -10$. Notando che $\omega_c \ll \omega_{p3}$ sappiamo che la ω_c non è modificata rispetto a quelle della $L(s)$ precedente.

Inoltre, dato che sono soddisfatte le ipotesi del criterio di Bode e $\mu > 0$, dobbiamo solo calcolare φ_m .

$$\text{Nota che: } \angle L(j\omega) = \angle L_{(1)}(j\omega) - \text{atg}(\omega \cdot 0.1) \cong -98.3^\circ - 9.4^\circ = -107.7^\circ$$

$$\rightarrow \varphi_m = 180^\circ - 107.7^\circ > 0$$

→ Il sistema è ancora asintoticamente stabile.

Dato che è detto $\angle L(j\omega) \rightarrow -270^\circ$ per $\omega \rightarrow \infty$ ed è finito k_m (quindi non potremmo incrementare eccessivamente il guadagno senza rendere il sistema instabile)

Dobbiamo quindi cercare ω_π e lo facciamo per tentativi, sapendo che $\angle L(j\omega) = -107.7^\circ$

$$\text{Tentiamo } \omega_\pi = 5 \rightarrow \angle L(j5) = -\text{atg}(5) - \text{atg}(2.5) - \text{atg}(0.5) \cong -78.7^\circ - 68.2^\circ - 26.6^\circ = -173.4^\circ$$

$$\text{Aumentiamo a } \omega_\pi = 7 \rightarrow \angle L(j7) \cong -81.9^\circ - 74.1^\circ - 35^\circ = -191^\circ$$

Riduciamo a $\omega_\pi = 5.7 \rightarrow \angle L(j5.7) \cong -180^\circ$ (approssimativamente, il comando MATLAB `margin` restituisce 5.657)

$$\rightarrow \omega_g = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} \rightarrow \text{calcoliamo } |L(j\omega_\pi)| \cong \frac{2.5}{|(1+j\omega_\pi)(1+j0.5\omega_\pi)(1+j0.1\omega_\pi)|} = 0.12$$

→ $wg \approx 8.04$ (il comando MATLAB `margin` restituisce $mg = 7.9203$)