POLITECNICO DI MILANO

FONDAMENTI DI AUTOMATICA
(Ingegneria dell'Automazione)
Prof.ssa Mara Tanelli

Anno Accademico 2015/16

Seconda prova in itinere 28/06/2016

COGNOME ....

NOME ....

MATRICOLA ....

FIRMA ....

- Consegnare esclusivamente il presente fascicolo.
- Utilizzare, per la minuta, i fogli bianchi forniti in aggiunta a questo fascicolo.
- Non si possono consultare libri, appunti, dispense, ecc.
- Si raccomandano chiarezza, precisione e concisione nelle risposte.

FONDAMENTI DI AUTOMATICA - Ingegneria dell'Automazione
Prof.ssa Mara Tanelli
Seconda Prova in Itinere del 28 giugno 2016

1. Si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = 10\frac{2s+1}{(200s+1)(0.02s+1)}$$

di un sistema lineare tempo invariante senza autovalori nascosti.

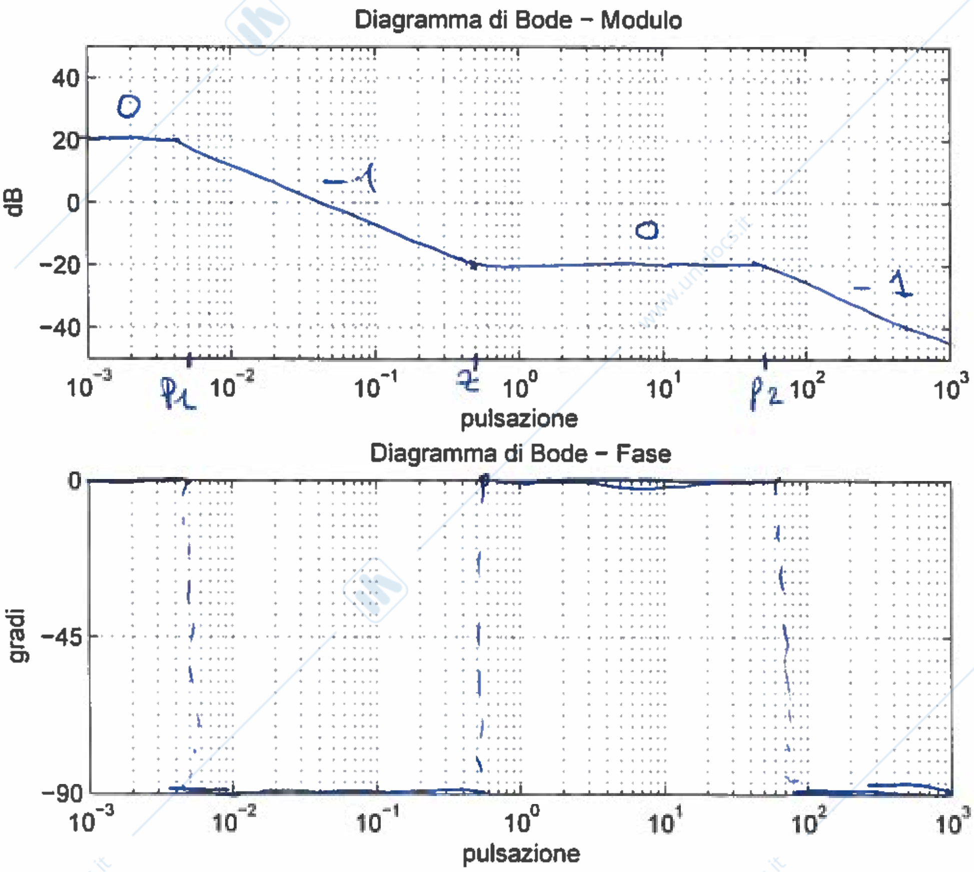
1.1 Calcolare guadagno, tipo, poli e zeri di $G(s)$ e studiare la stabilità del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ **(2 punti)**.

TIPO $g = 0$ $\mu = G(0) = 10$ POLI: $p_1 = -\frac{1}{200} = -0{,}005$ $p_2 = -\frac{1}{0{,}02} = -5$

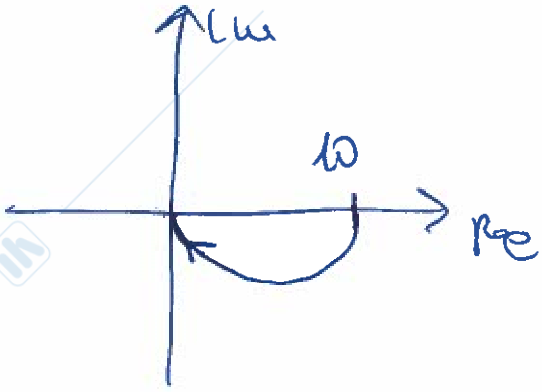
ZERO $z = -1/2 = -0{,}5$

SIST. II° ordine con 2 poli e no λ_i NASCOSTI $\Rightarrow \{p_i\} = \{\lambda_i\}$ e $Re(\lambda_i) < 0 \; \forall i \Leftrightarrow$ SIST. AS. STABILE

1.2 Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ **(2 punti)**.



1.3 Tracciare qualitativamente il diagramma polare della risposta in frequenza associata a $G(s)$ (**1 punto**).



$|G(j0)| = 10$

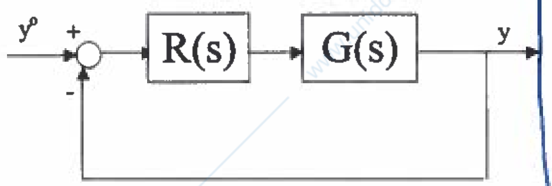
$\angle G(j0) = 0°$

$|G(j\infty)| = 0$

$\angle G(j\infty) = -90°$

1.4 Si supponga ora che il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ venga retroazionato come in figura.

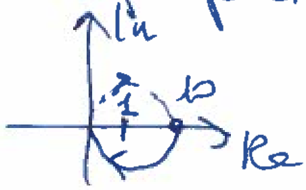
SOLUZ. ALTERNATIVA
CALCOLO POLIN. CARATT.
$N_L + D_L = 0$
con $R(s) = K$ e vedo per quali valori di K sist. in A.CHIUSO ha poli con $Re<0$



SOLUZ. ALTERNATIVA
a) OK PICCOLA FASE
b) OK PICCOLO GUADAGNO
c) AFFICO CRIT. BODE (APPLICABILE) MA HO $\mu<0$ e $\varphi_m<0$
sist. in A.CHIUSO INSTABILE

Si studi la stabilità del sistema in anello chiuso quando:
a) $R(s) = 1$; b) $R(s) = 0.01$; c) $R(s) = -1$ (**3 punti**).

Come si vede dal diagr. polare, il diagr. di Nyq. del caso a) è

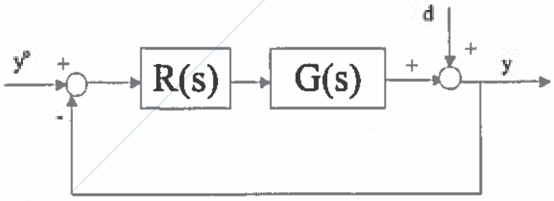


e mostra che il sistema ha margine di guadagno infinito (non interseca semiasse reale <0)
$\Rightarrow \forall$ valore costante positivo $R(s) = K$ il sist. in A.CHIUSO è AS.ST. (CASI a) e b)) ($P=0$ e $N=0$)

Per il caso c) si può sempre usare il criterio di Nyquist applicato a $L(s) = G(s)$ contando i giri attorno a $(+1,0)$. Dalla figura si vede che $N = -1 \neq P = 0 \Rightarrow$ SIST. IN A.CHIUSO INSTABILE

1 giro senso orario

2. Si consideri il sistema di controllo in figura



dove $G(s) = 10\frac{0.01s+1}{10s+1}$.

2.1 Si progetti un regolatore $R(s)$ in modo tale che: 1) il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile; 2) l'errore a transitorio esaurito a fronte di $y^o(t) = \pm\,\mathrm{sca}(t)$ sia nullo; 3) il modulo dell'errore a transitorio esaurito a fronte di $d(t) = \sin(\omega t), \omega \in [0.1, 1]$rad/s sia $|e_\infty| \le 0.1$; 4) la pulsazione critica del sistema in anello chiuso sia $\omega_c \ge 8$ rad/s e 5) il margine di fase sia $\varphi_m \ge 60°$ **(5 punti)**.

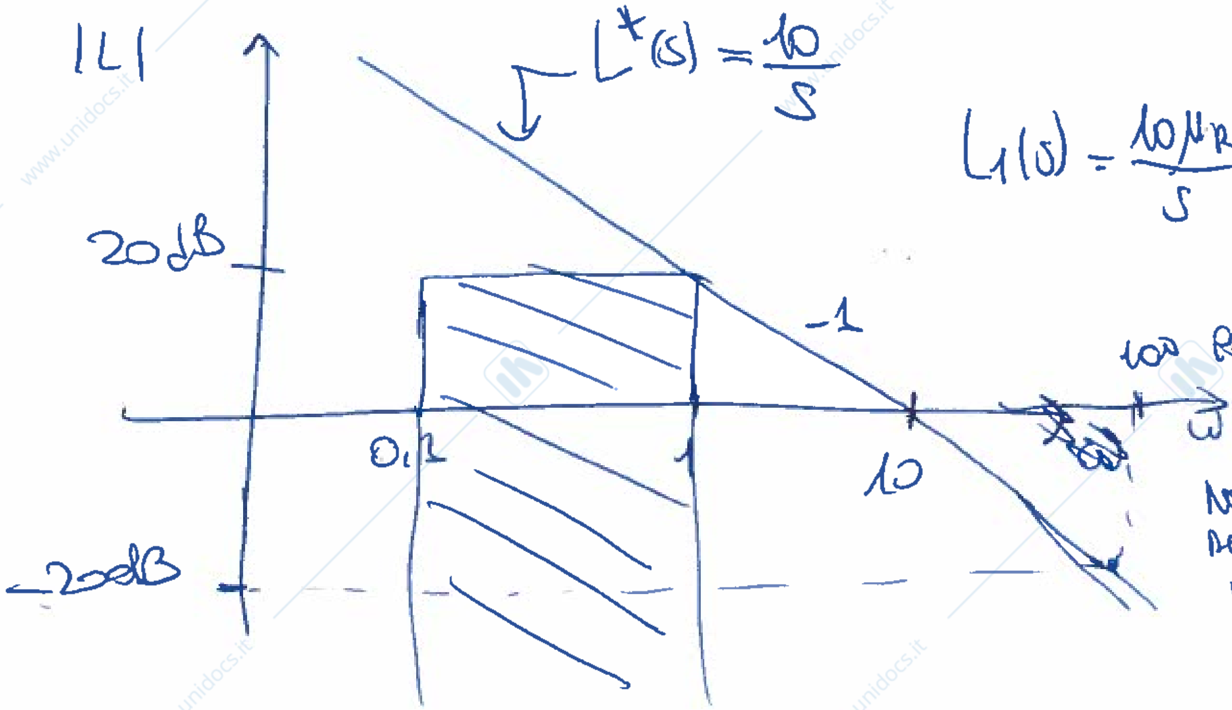
1) VERIFICO DOPO

2) serve $g_L \ge 1 \rightarrow R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$

3) Serve $|S(j\omega)| \cdot 1 = |e_{\infty d}| \le 0{,}1$ per $\omega \in [0{,}1, 1]$

poiché $\omega_{dist.} < \omega_c$. $|S(j\omega)| \simeq \frac{1}{|L(j\omega)|}$

$\Rightarrow |e_{\infty d}| \le 0{,}1 \iff |L(j\omega)| \ge 10$ (20 dB) per $\omega \in [0{,}1, 1]$



$L_1(s) = \frac{10\mu_R}{s} \underbrace{\frac{0{,}01s+1}{10s+1}}$

↓

un polo in $\omega = 0{,}1$

↓

NON RISPETTO VINCOLI!

Se $L^*(s) = \frac{10}{s}$ $\omega_c = 10 \frac{rad}{s}$ (ok) $\varphi_m \simeq 90°$ ok

vincolo su d ok!

Con $L^*(s) = \frac{10}{s}$ → $R(s) = \frac{1}{s} \frac{10s+1}{0{,}01s+1}$ REALIZZABILE!

Applicando il crit. di Bode a $L^*(s)$ (applicabile perchè $\mu_L>0$ e ω_c ben definita) si ha

$\mu_L > 0$ e $\varphi_m > 0$

$\Updownarrow$

sist. in anell. chiuso as. stabile

2.2 Con riferimento al sistema di controllo progettato al punto precedente dire, giustificando la risposta, quanto vale l'ampiezza dell'uscita $y(t)$ di regime associata all'ingresso $y^o(t) = 2 - 3\sin(0.1t) + 5\sin(100\,t)$ con $d(t) = 0$ (**3 punti**).

F.d.T. $y^o \to y$ è $F(s) \simeq \frac{1}{\frac{s}{\omega_c}+1} = \frac{1}{0{,}1s+1}$

$\varphi_m > 75°$ e $L(s)$ tipo 1

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Per pr. sovr. effetti} \\ y_\infty = y_{1\infty}^o + y_{2\infty}^o + y_{3\infty}\end{array}}$$

$y_1^o = 2$ → sist. as. st. tipo 0 $\quad y_{1\infty} = F(0) \cdot 2 = 2$

$y_2^o = -3\sin(0{,}1t) \quad 0{,}1 < \omega_c$ → $|F(j\omega)| \simeq 1 \quad \omega < \omega_c$

→ per th. risp. in freq. (applic. perchè sist. in an. ch. as. stabile) $\quad y_{2\infty} = -3\,|F(j0{,}1)| \simeq -3$

$y_3^o = 5\sin(100t) \quad 100 > \omega_c$ → $|F(j\omega)| \simeq |L(j\omega)| \quad \omega > \omega_c$

per th. risp. in freq. $\quad y_{3\infty} = 5\,|L(j100)| \simeq 5 \times \underbrace{0{,}1}_{-20dB} = 0{,}5$

3. Si consideri il sistema lineare e tempo invariante a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni

$$x_1(k+1) = -4x_2(k) + u(k)$$
$$x_2(k+1) = -x_1(k)$$
$$y(k) = -x_2(k) + 2u(k)$$

3.1. Si calcolino stati e uscita di equilibrio associati a $u(k) = \bar{u} = 1$ (**1 punto**).

$\bar{x}_1 = -4\bar{x}_2 + 1 \rightarrow \bar{x}_1 = 4\bar{x}_1 + 1 \rightarrow \bar{x}_1 = -1/3$

$\bar{x}_2 = -\bar{x}_1$ $\qquad \bar{x}_2 = 1/3$

$\bar{y} = -\bar{x}_2 + 2$ $\qquad \bar{y} = -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3}$

3.2. Si studi la stabilità del sistema (**2 punti**).

$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & 4 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ $\quad \det(\lambda I - A) = 0$

$\Updownarrow$

$\lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda^2 = 4 \rightarrow \lambda = \pm 2$

$\exists i : |\lambda i| > 1 \iff$ sist. INSTABILE

~~3.2.~~ 3.3. Si calcolino i primi 4 campioni del movimento dello stato e dell'uscita del sistema associati a condizioni iniziali $x(0) = [0, \ 0]^T$ e all'ingresso $u(k) = \text{sca}^*(k)$, $k \geq 0$ (**2 punti**).

$\text{sca}^*(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$

$\underline{k=0}$

$x_1(1) = -4x_1(0) + u(0) = 1$

$x_2(1) = -x_1(0) = 0$

$y(0) = -x_2(0) + 2u(0) = 2$

$k=1$

$x_1(2) = -4x_2(1) + u(1) = 1$

$x_2(2) = -x_1(1) = -1$

$y(1) = -x_2(1) + 2u(1) = 2$

$k=2$ $\quad x_1(3) = -4x_2(2) + u(2) = 4 + 1 = 5$

$x_2(3) = -x_1(2) = -1$

$y(2) = -x_2(2) + 2u(2) = 1 + 2 = 3$

$k=3$

$y(3) = -x_2(3) + 2u(3)$

$= 1 + 2 = 3$

$k=0$ $\quad x(0) = [0, 0]^T$

$y(0) = 2$

$k=1$ $\quad x(1) = [1, 0]^T$

$y(1) = 2$

$k=2$ $\quad x(2) = [1 \ \ -1]^T$

$y(2) = 3$

$k=3$ $\quad x(3) = [5 \ \ -1]$

$y(3) = 3$

4. Si definisca la classe dei regolatori P.I.D., discutendo in modo sintetico i principali problemi realizzativi ad essi legati (**5 punti**).

Vedi libro / appunti

PUNTI PRINCIPALI:

- EQUAZ. PID CON 3 COMPONENTI
- PROBLEMA PARTE DERIVATIVA COL grado relativo
- " DERIVAZIONE dell'errore

↓

DERIVAZ. USCITA

- PROBLEMA WIND-UP

↓

IMPLEMENTAZ. ANTIWINDUP

5. Si definisca il concetto di margine di guadagno, precisandone il significato nell'ambito dello studio dei sistemi di controllo in retroazione (**5 punti**).

Vedi libro / appunti

PUNTI PRINCIPALI

- CONTESTO, def. SISTEMA IN AN. CHIUSO e della Fdt d'anello
- IPOTESI SU L(s) e sul suo diagr. polare
- Def. Km
- Legame tra Km e stabilità sistema in AN. CHIUSO
- Significato di Km come massimo valore del guadagno: K L(s) con K<Km dà un sistema in AN. CHIUSO AS. STABILE

6. Con riferimento alle equazioni Matlab sotto riportate, si dica, motivando la risposta, qual e' il valore delle variabili z, p ed x (**1 punto**).

```
num=[1 -2]; den=[1 1];
g=tf(num,den);
z=zero(g);
p=pole(g);
x=dcgain(g);
```

$$G = \frac{s-2}{s+1}$$

$z = 2$

$p = -1$

$x = G(0) = -2$