FONDAMENTI DI AUTOMATICA - Ingegneria Gestionale
Prof.ssa Mara Tanelli
Appello del 7 luglio 2016

1. Si consideri il sistema dinamico lineare e tempo invariante con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}_1(t) = (\alpha+1)x_1(t) - 2\beta x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t)$$
$$\dot{x}_3(t) = \alpha x_3(t) + 2u(t)$$
$$y(t) = x_1(t),$$

con α e β parametri reali.

1.1 Determinare per quali valori di α e β il sistema è asintoticamente stabile. **1 punto**

La matrice A è $A = \begin{bmatrix} \alpha+1 & -2\beta & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ triangolare

$\lambda_i(A) = \{\alpha+1, -2, \alpha\}$

SIST. AS. STAB. $\iff \mathrm{Re}(\lambda_i(A)) < 0 \ \forall i \iff \begin{cases} \alpha+1<0 \\ \alpha<0 \end{cases} \iff \boxed{\begin{array}{l} \alpha < -1 \\ \forall \beta \end{array}}$

1.2 Posto $\alpha = \beta = 1$ determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita del sistema associato alla condizione iniziale $x(0) = [1 \ 1 \ 2]^T$ e all'ingresso $u(t) = \overline{u} = 1$, $t \geq 0$. **2 punti**

Dato che $y = x_1$, e che la dinamica di x_3 è disaccoppiata da quella di x_1 e x_2 devo studiare il sistema

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - 2x_2$$
$$\dot{x}_2 = -2x_2 + u \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$y = x_1$$

Dalla seconda eq. si ha $x_2(t) = e^{-2t}x_{20} + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} d\tau =$

$$= e^{-2t} + e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau} d\tau = e^{-2t} + \frac{e^{-2t}}{2}(e^{2t}-1) = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t}, \ t \geq 0}$$

E poi

$$y(t) = x_1(t) = e^{2t}x_{10} + \int_0^t e^{2(t-\tau)}(-2)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\tau}\right] d\tau =$$

$$y(t) = x_1(t) = e^{2t} - \int_0^t e^{2(t-\tau)} d\tau - \int_0^t e^{2(t-\tau)} e^{-2\tau} d\tau =$$

$$= e^{2t} - e^{2t} \int_0^t e^{-2\tau} d\tau - e^{+2t} \int_0^t e^{-4\tau} d\tau = e^{2t} - \frac{1}{2} e^{2t}(e^{-2t} - 1) +$$

$$+ \frac{e^{2t}}{4}(e^{-4t} - 1) = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{5}{4}e^{2t}, \ t \geq 0}$$

1.3 Posto ora $\alpha = -1$ e $\beta = 1$ calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema e dire, motivando la risposta, se è possibile valutare le proprietà di stabilità del sistema dall'analisi della sola $G(s)$. **2 punti**

$$\dot{x}_1 = -2x_2$$
$$\dot{x}_2 = -2x_2 + u$$
$$\dot{x}_3 = -x_3 + 2u$$
$$y = x_1$$

$\rightarrow$ Pongo $x(0) = 0$ e applico la trasf. di Laplace.

$$\begin{cases} sX_1(s) = -2X_2(s) \rightarrow X_1(s) = -\frac{2}{s}X_2(s) \\ (s+2)X_2(s) = U(s) \rightarrow X_2(s) = \frac{U(s)}{s+2} \end{cases}$$

$$Y(s) = X_1(s) = \boxed{-\frac{2}{s(s+2)}} U(s)$$

$G(s) \leftarrow$

$G(s)$ ha 2 poli $p = \{0, -2\}$ e il sist. è di ordine 3. Poiché un polo è in $s=0$ posso solo dire che il sistema non è AS. STABILE. Per stabilire se è SEMPL. ST. o INST. occorre conoscere l'autov. nascosto

2. Si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = 10\frac{s+1}{(100s+1)(0.01s+1)}$$

di un sistema lineare tempo invariante senza autovalori nascosti.

2.1 Calcolare guadagno, tipo, poli e zeri di $G(s)$ e studiare la stabilità del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$. **2 punti**

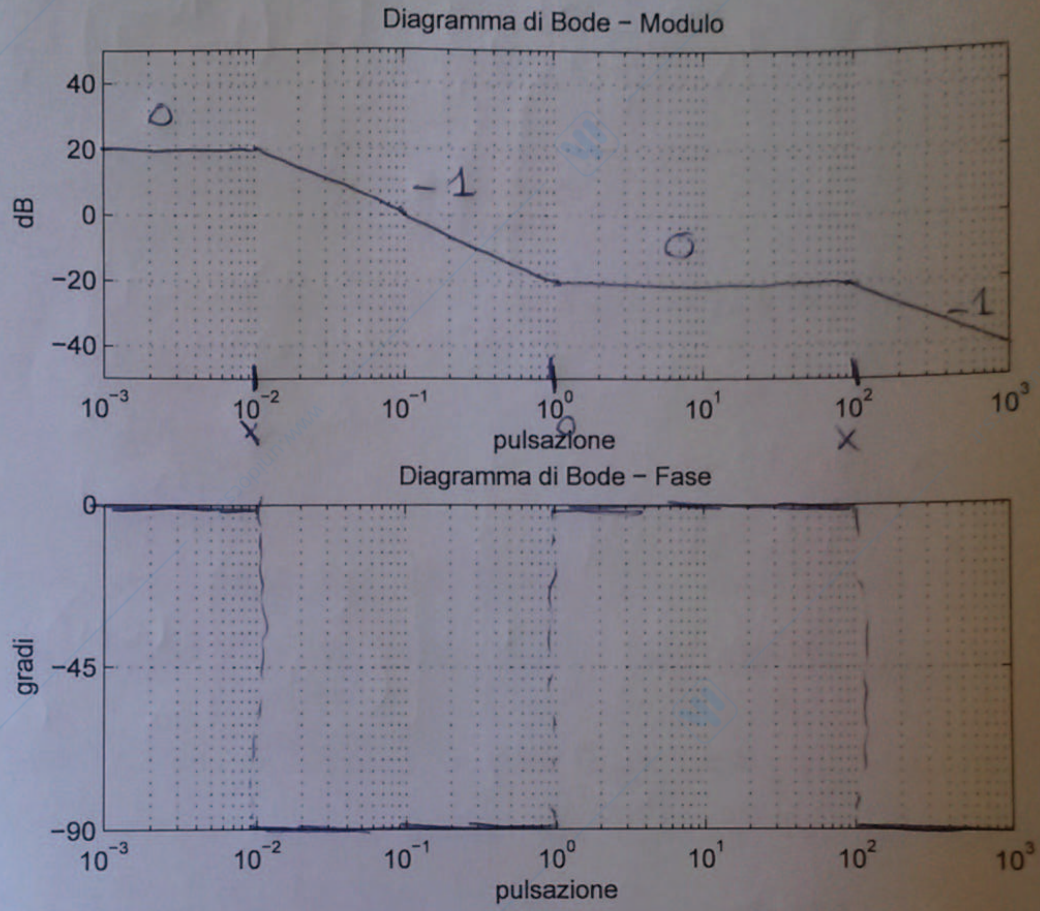
TIPO $g = 0$

$\mu = G(0) = 10$

ZERO: $z = -1$ poli $p_1 = -\frac{1}{100}$ $p_2 = -\frac{1}{0{,}01} = -100$

Il sistema ha 2 poli e non ha autov. nascosti per ipotesi $\rightarrow \{p_i\} \equiv \{\lambda_i\}$ e poiché $Re(\lambda_i) < 0 \ \forall i$ il sistema è AS. STABILE.

2.2 Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$. **2 punti**



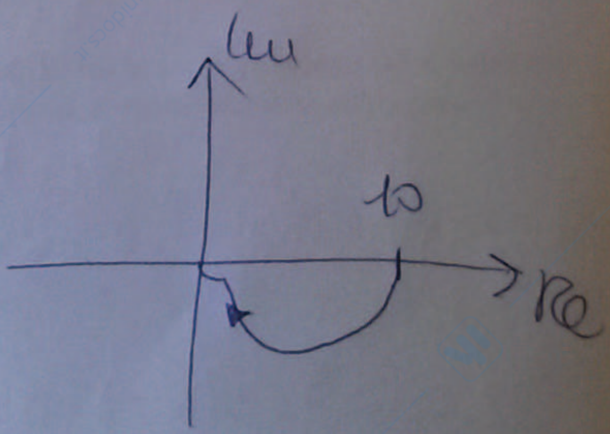
2.3 Tracciare qualitativamente il diagramma polare della risposta in frequenza associata a $G(s)$. **1 punto**

$|G(j0)| = 10$

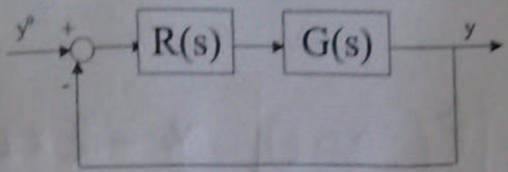
$\measuredangle G(j0) = 0°$

$|G(j\infty)| = 0$

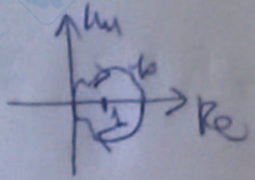
$\measuredangle G(j\infty) = -90$



2.4 Si supponga ora che il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ venga retroazionato come in figura.



Si studi la stabilità del sistema in anello chiuso quando:
a) $R(s) = 1$; b) $R(s) = 0.01$; c) $R(s) = -1$. **3 punti**

a) 

$L(s) = G(s) \rightarrow P=0$ ~ N (dal diagr. di Nyquist si ha $N=P=0$ → sist. in A.C. As. STABILE

b) identico ad a) con $L(s) = 0{,}01\, G(s)$ e quindi diagr. di Nyquist identico ma che parte da $L(0) = 0{,}1$. Si ha sempre $N=P=0$ → sist. in A.Ch. AS. STABILE

c) ~~Sappiamo~~ $L(s) = -G(s)$. Si può applicare il crit. di Nyq. contando i giri che il diagr. di $G(j\omega)$ compie attorno al punto $(+1,0)$. Dalla figura al punto a) si vede che

$N = -1 \neq P$ → Sist. in AN. CH. INSTABILE

2.5 Considerando il sistema di cui al punto precedente con il regolatore a), si dica, motivando la risposta, quanto vale l'ampiezza di regime dell'uscita $y(t)$ quando $y^o = 1 - 2\sin(0.01t) + 5\sin(100t)$.
y_1^o y_2^o y_3^o
3 punti

Nel caso del reg. a) $L(s) = G(s)$ → dai diagr. di Bode tracciati al punto 2.2 si ha $\omega_c \simeq 0{,}1$ rad/s e $\varphi_m \simeq 90°$

La fdt tra y^o e y è $F(s) \simeq \frac{L(s)}{1+L(s)} \underset{\uparrow}{\simeq} \frac{\mu_L/1+\mu_L}{\frac{1}{\omega_c}s+1}$

$\varphi_m > 75°$
Tipo di $L(s) = 0$

Uso principio di sovr. degli effetti e considero $y_\infty = y_{1\infty} + y_{2\infty} + y_{3\infty}$

$y_1^o = 1$ → sist. AS. STABILE di tipo 0 → $y_{1\infty} = 1 \times F(0) = \frac{\mu_L}{1+\mu_L} = \frac{10}{11}$

Per y_2^o e y_3^o usiamo il TH. della risp. in FREQ. (applicabile perché il sistema con TdT $F(s)$ è As. STABILE

$$y_{\infty 2} = -2\,|F(j0{,}01)| \cong -2 \times 1 = -2$$

$0{,}01 < \omega_c$

$$y_{\infty 3} = 5\,|F(j100)| \cong 5\,\underbrace{|L(j100)|}_{-17\,dB} = 5 \times \frac{0{,}1}{\sqrt{2}} \cong 0{,}35$$

$100 > \omega_c$

3. Si consideri il sistema lineare e tempo invariante a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni

$$x_1(k+1) = -2x_2(k) + u(k)$$
$$x_2(k+1) = 2x_1(k)$$
$$y(k) = 2x_1(k) - u(k)$$

3.1. Si calcolino stati e uscita di equilibrio associati a $u(k) = \overline{u} = 1$. **1 punto**

$$\begin{cases} \overline{x}_1 = -2\overline{x}_2 + \overline{u} = -2\overline{x}_2 + 1 \\ \overline{x}_2 = 2\overline{x}_1 \end{cases}$$
$$\overline{y} = 2\overline{x}_1 - \overline{u} = 2\overline{x}_1 - 1$$

$$\begin{cases} \overline{x}_1 = -2(2\overline{x}_1) + 1 \\ \overline{x}_2 = 2\overline{x}_1 \\ \overline{y} = 2\overline{x}_1 - 1 \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} \overline{x}_1 = 1/5 \\ \overline{x}_2 = 2/5 \\ \overline{y} = -3/5 \end{cases}}$$

3.2. Si studi la stabilità del sistema. **2 punti**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 = -2 \iff \lambda = \pm i\sqrt{2} \quad |\lambda| = 2$$

$\Rightarrow \exists i : |\lambda_i| > 1 \Rightarrow$ SISTEMA INSTABILE

3.3. Si calcolino i primi 4 campioni del movimento dello stato e dell'uscita del sistema associati a condizioni iniziali $x(0) = [0,\ 0]^T$ e all'ingresso $u(k) = \text{imp}^*(k)$, $k \geq 0$. **2 punti**

Iteriamo le eq. di stato, considerando che $\text{imp}^*(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$

$x(0) = [0, 0]^T$

$y(0) = 2x_1(0) - u(0) = -1$

$x_1(1) = -2x_2(0) + u(0) = 1$

$x_2(1) = 2x_1(0) = 0$

$y(1) = 2x_1(1) - u(1) = 2$

$x_1(2) = -2x_2(1) + u(1) = 0$

$x_2(2) = 2x_1(1) = 1$

$y(2) = 2x_1(2) - u(2) = 0$

$x_1(3) = -2x_1(2) + u(2) = -2$

$x_2(3) = 2x_1(2) = 0$

$y(3) = 2x_1(3) - u(3) = -4$

k	x_1	x_2	y
0	0	0	-1
1	1	0	2
2	0	1	0
3	-2	0	-4

4. Si definisca il concetto di margine di fase, precisandone il significato nell'ambito dello studio dei sistemi di controllo in retroazione. **5 punti**

Vedi libro/appunti

Punti fondamentali:
- def. SISTEMA IN ESAME
- Ipotesi su $L(s)$
- Definizione formale di φ_m
- Relazione tra valore di φ_m e AS. STAB. del sistema in AN. CHIUSO
- Significato di φ_m come massimo ritardo puro aggiuntivo tollerabile da un sist. in A.C. AS. STABILE col margine di fase φ_m prima di perdere l'AS. STAB.

5. Si enunci il teorema della risposta in frequenza. **5 punti**

Vedi libro/Appunti

6. Con riferimento alle equazioni Matlab sotto riportate, si dica, motivando la risposta, qual e' il valore delle variabili z, p ed x. **1 punto**

```
num=[1 1]; den=[2 1];
g=tf(num,den);
z=zero(g);
p=pole(g);
x=dcgain(g);
```

$$g = \frac{s+1}{2s+1}$$

$z \rightarrow$ zero di g $= -1$

$p \rightarrow$ polo di g $= -1/2$

$x = G(0) = 1$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari