giovedì 28 maggio 2020 13:24

SISTEMI A TEMPO DISCRETO

$t \in \mathbb{R}$ TEMPO CONTINUO

$k \in \mathbb{N}$ " DISCRETO

$x(k) \quad u(k) \quad y(k)$

T.C. EQ DIFFERENZIALI

T.D EQ. ALLE DIFFERENZE

RAPPRESENTAZIONE DI STATO

$$x(k+1) = \varphi(x(k), u(k), k) \quad \text{EQ STATO}$$

$$y(k) = \gamma(x(k), u(k), k) \quad \text{TRASF. USCITA}$$

NOTO $x(0) = x_0$ e $u(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow$ CALCOLO $\left.\begin{matrix} x(k) \\ y(k) \end{matrix}\right\}$ MOVIMENTI STATO e USCITA

MOVIMENTO DI EQUILIBRIO → SISTEMI TEMPO INVARIANTI

Condiz. di equilibrio (T. CONT. $\underbrace{\dot{x}(t) = 0}$)

T. DISCRETO Fissato un ingresso costante

$$u(k) = \bar{u}, \ \forall k \geq 0$$

cerco un movim. dello stato COSTANTE

Cerco un movim. dello stato COSTANTE

$x(k+1) = x(k) = \bar{x} \quad \forall\, k \geq 0$

↳ lo calcolo imponendo

$$\boxed{\begin{aligned} \boxed{\bar{x}} &= \varphi(\bar{x}, \bar{u}) \\ \bar{y} &= \gamma(\bar{x}, \bar{u}) \end{aligned}}$$

equazioni di equilibrio

Sistemi LTI

$$\boxed{\begin{aligned} &x(k+1) - x(k) = 0 \\ &\downarrow \\ &\boxed{x(k+1) = x(k) = \bar{x}} \end{aligned}}$$

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$
$y(k) = Cx(k) + Du(k)$ ↲

EQUILIBRIO per un sistema LTI

Fisso $u(k) = \bar{u}$ COSTANTE

$\boxed{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$

$\Updownarrow$

$(I-A)\bar{x} = B\bar{u} \iff \boxed{\bar{x} = \underline{(I-A)^{-1}} B\bar{u}}$ STATO di EQ.

$\boxed{\underline{\text{T.cont.}}\ \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}}$ A TEMPO DISCRETO

Se $(I-A)$ NON È INVERT. posso avere 0 o ∞ stati di equil.

$\bar{x}$ $\exists!$ sse $(I-A)$ è INVERTIBILE

Sostituendo $\bar{x}$ e $\bar{u}$ nella trasf. di uscita si trova

$$\bar{y} = \underbrace{\left[C(I-A)^{-1}B + D\right]}_{\text{GUADAGNO STATICO}}\bar{u}$$

LINEARIZZAZIONE

Sistema NON LIN e TEMPO INVARIANTE

$$x(k+1) = \varphi(x(k), u(k))$$
$$y(k) = \gamma(x(k), u(k))$$

Suppongo che per $u(k) = \bar{u}$ COSTANTE il sistema ammette uno stato di ep.

$\begin{cases} \bar{x} \text{ costante} \\ \bar{y} \text{ costante} \end{cases}$ e una uscita di ep.

$$\bar{x} = \varphi(\bar{x}, \bar{u})$$
$$\bar{y} = \gamma(\bar{x}, \bar{u})$$

$$\begin{cases} \delta x(k) = x(k) - \bar{x} \\ \delta u(k) = u(k) - \bar{u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta u(k) = u(k) - \bar{u} \\ \delta y(k) = y(k) - \bar{y} \end{cases}$$

SISTEMA LINEARIZZATO

$$\boxed{\begin{aligned} \delta x(k+1) &= A_{LIN}\,\delta x(k) + B_{LIN}\,\delta u(k) \\ \delta y &= C_{LIN}\,\delta x(k) + D_{LIN}\,\delta u(k) \end{aligned}}$$

$$A_{LIN} = \left.\frac{\partial \varphi(x,u)}{\partial x}\right|_{eq.} \qquad C_{LIN} = \left.\frac{\partial \gamma(x,u)}{\partial x}\right|_{eq}$$

$$B_{LIN} = \left.\frac{\partial \varphi(x,u)}{\partial u}\right|_{eq.} \qquad D_{LIN} = \left.\frac{\partial \gamma(x,u)}{\partial u}\right|_{eq}$$

STUDIO del MOVIMENTO di un sistema LTI a TEMPO DISCRETO

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

1. MOV. LIBERO $\rightarrow$ C.I. $x(0) = x_0$ e $u(k) = 0$
2. MOV. FORZATO $\rightarrow$ C.I. $x(0) = 0$ $u(k) \neq 0$

① MOV. LIBERO

$k+1$

$k=0$ $\quad x(1) = Ax(0) = Ax_0$

$k=1$ $\quad x(2) = Ax(1) = A^2 x_0$

$\quad x(3) = Ax(2) = A^3 x_0$

$k=2 \quad x(3) = A\,x(2) = A^3 x_0$

MOV. LIBERO DELLO STATO

$x_L(k+1) = A^{k+1} x_0$

$$\boxed{x_L(k) = A^k x_0}$$

(T.C. $x_L(t) = e^{At} x_0$)

$A^k \leftrightarrow e^{At}$

MOV. LIBERO USCITA

$$\boxed{y_L(k) = C A^k x_0}$$

② MOV. FORZATO $\boxed{x(0)=0}$; $u(k) \neq 0$

$$x_F(1) = A\,x_F(0) + Bu(0) = Bu(0)$$

$$x_F(2) = A\,x_F(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1)$$

$$x_F(3) = A\,x_F(2) + Bu(2) = A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)$$

$$x_F(k) = A^{k-1}Bu(0) + A^{k-2}Bu(1) + \dots + Bu(k-1)$$

MOV. FORZATO

$k-1 \qquad 0$

MOV. FORZATO $+ \dots + Bu(k-1)$

$$\boxed{x_F(k) = \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-1-h} B u(h)}$$

$$\boxed{y_F(k) = \underbrace{\sum_{h=0}^{k-1} C A^{k-1-h} B u(h)} + \underbrace{D u(k)}}$$

$\boxed{y(k) = Cx(k) + Du(k)}$

$$\left(\text{T.C.} \quad x_F(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau \right.$$

Come a tempo continuo, per il PSE vale che

$$X(k) = X_L(k) + X_F(k)$$
$$y(k) = y_L(k) + y_F(k)$$

STABILITÀ PER SISTEMI LTI e T.D.

Per i sistemi LTI, la STABILITÀ è una proprietà del SISTEMA, non del singolo movimento di equilibrio.

Movimento di equilibrio.

La stab. DIPENDE dal SOLO MOVIMENTO LIBERO

$$\boxed{x_L(k) = A^k x_0}$$

Perché $x_L(k) \to 0$, $k \to +\infty$, $\forall x_0$ mi

serve che $A^k \to 0$, $k \to +\infty$

$e^{At} x_0 = x_L$

$x_L(t) = e^{at} x_0 \to 0$
$Re(a) < 0$

Se A fosse uno scalare $a^k \to 0$, $k \to +\infty$

sse $|a| < 1$

se $|a| > 1$ a^k diverge per $k \to +\infty$

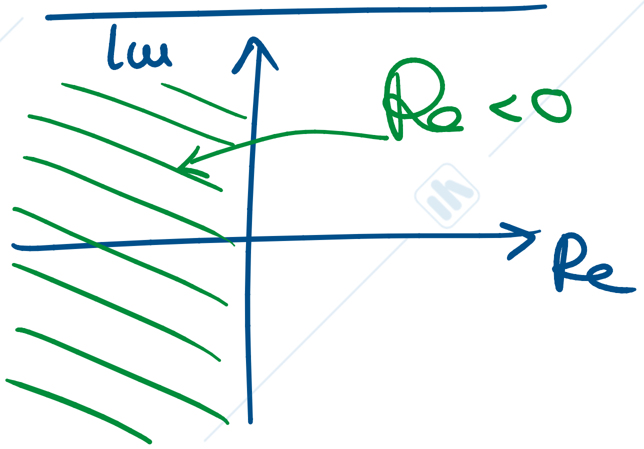
$|a| = 1 \to a^k$ LIMITATO

In generale, un sistema LTI a T.D. è AS. STABILE sse

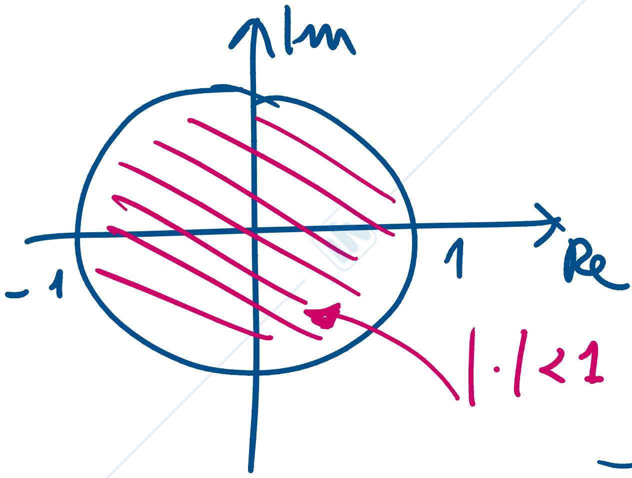
$$|\lambda_i(A)| < 1, \forall i$$

TEMPO DISCRETO

TEMPO CONTINUO



TEMPO DISCRETO



Anche per sistemi a T.D. possiamo enunciare il CRITERIO degli AUTOVALORI

Dato un sistema DINAMICO a T.D.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

ha le seguenti proprietà di stabilità:

① E' ASINTOT. STABILE sse

$$|\lambda_i(A)| < 1, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

② E' INSTABILE sse

a) $\exists i : |\lambda_i(A)| > 1$ o

b) $\exists i : |\lambda_i(A)| = 1$ e λ_i NON

b) $\exists i : |\lambda_i(A)| = 1$ e λ_i NON è REGOLARE

③ <u>E' SEMPLIC. STABILE</u> Sse.

$$\forall i : |\lambda_i(A)| = 1,\ \lambda_i \text{ è REGOLARE}$$

Dall'analisi degli autovalori della matrice A del sistema linearizzato si può in qualche caso, concludere circa la proprietà di stabilità del movim. di equilibrio del sistema NON LINEARE di partenza:

① <u>CONDIZ. SUFFICIENTE</u> perchè il mov. di ep. del sistema N.L. sia AS. STABILE è $|\lambda_i(A_{LIN})| < 1,\ \forall i$

② <u>CONDIZ. SUFFICIENTE</u> perchè il mov. di equilibrio del sistema N.L. sia INSTABILE è $\exists i : |\lambda_i(A_{LIN})| > 1$

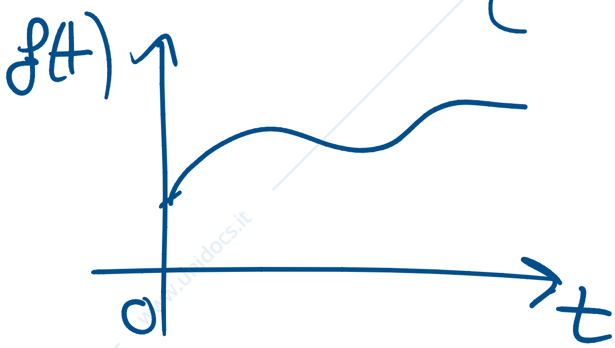
Se $|\lambda_i(A_{lin})| \le 1 \ \forall i$ ma

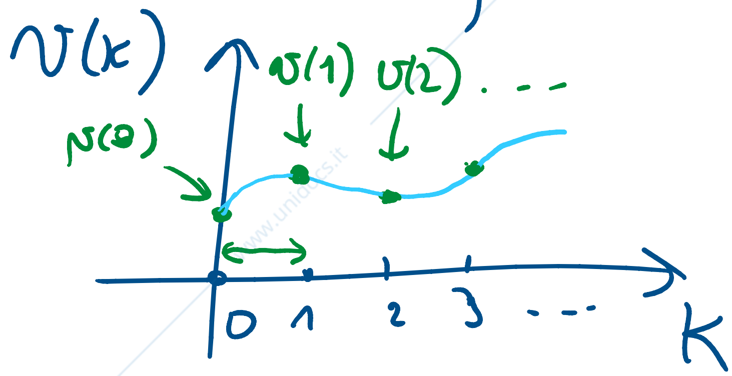
$\exists i : |\lambda_i(A_{lin})| = 1$ allora

dall'analisi del sistema LINEARIZZATO non posso dire nulla sulla proprietà di stabilità del mov. di ep. del sistema non LINEARE.

TRASFORMATA ZETA

SEGNALE $v(k) : \{v(0), v(1), v(2) \dots\}$





$z \in \mathbb{C}$

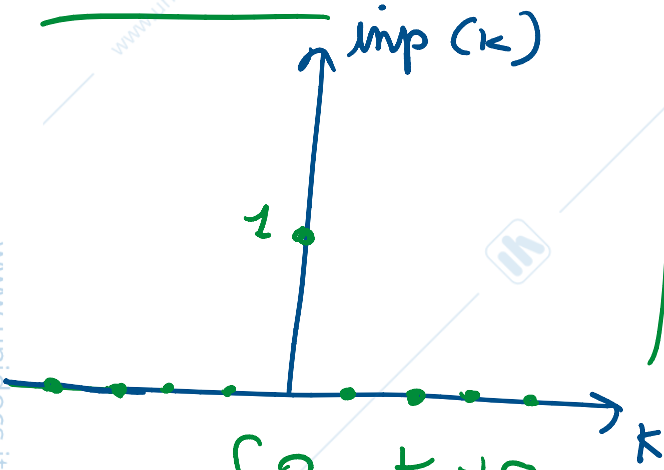
TRASF. Z $\quad \mathcal{Z}[v(k)] = V(z)$, $\quad v(k) = 0 \quad k < 0$

$$\boxed{V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) z^{-k}} = v(0) + v(1)z^{-1} + v(2)z^{-2} + \dots$$

IMPULSO

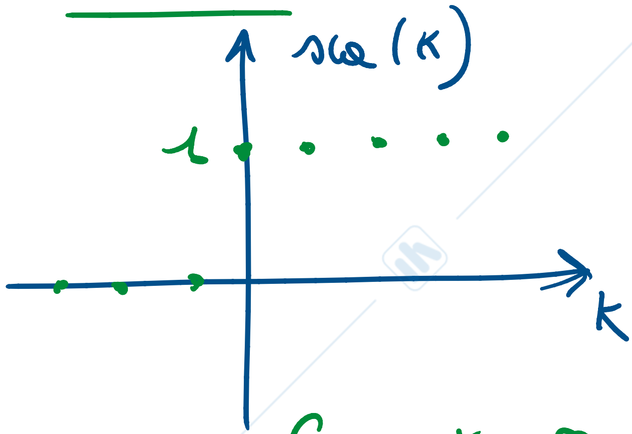
SCALINO

IMPULSO



$$imp(k)=\begin{cases}0 & k\neq 0\\ 1 & k=0\end{cases}$$

SCALINO



$$sca(k)=\begin{cases}0 & k<0\\ 1 & k\geq 0\end{cases}$$