POLITECNICO DI MILANO

FONDAMENTI DI AUTOMATICA
(Ingegneria Gestionale)
Prof.ssa Mara Tanelli

Anno Accademico 2015/16

Appello del 01/03/2016

COGNOME..

NOME ....

MATRICOLA ....

FIRMA ....

- **Consegnare esclusivamente il presente fascicolo.**
- Utilizzare, per la minuta, i fogli bianchi forniti in aggiunta a questo fascicolo.
- Non si possono consultare libri, appunti, dispense, ecc.
- Si raccomandano chiarezza, precisione e concisione nelle risposte.

FONDAMENTI DI AUTOMATICA - Ingegneria Gestionale **Prof.ssa Mara Tanelli**
Appello del 1 Marzo 2016

1. Si consideri il sistema dinamico non lineare e tempo invariante descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}_1(t) = -5x_2(t) + (\alpha - 1)x_2(t)u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = 2(x_1(t) - \alpha)^2 - 4x_2^2(t) + u^2(t)$$
$$y(t) = x_1^2(t) + x_1(t)x_2(t),$$

con α parametro reale.

1

1.1 Si determinino stati e uscite di equilibrio associati all'ingresso $u(t) = \overline{u} = 0$, $t \geq 0$ in funzione di α.

EQUILIBRI:

$$\begin{cases} 0 = -5\overline{x}_2 + (\alpha-1)\overline{x}_2\overline{u} \\ 0 = 2(\overline{x}_1 - \alpha)^2 - 4\overline{x}_2^2 + \overline{u}^2 \end{cases}$$

$\boxed{\overline{u}=0}$

$$\begin{cases} 0 = -5\overline{x}_2 \rightarrow \overline{x}_2 = 0 \\ \overline{x}_1 = \alpha \end{cases}$$

$$\overline{y} = \overline{x}_1^2 + \overline{x}_1\overline{x}_2 = \alpha^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (\overline{x}_1, \overline{x}_2) = (\alpha, 0) \\ \overline{y} = \alpha^2 \end{array}}$$

2

1.2 Si scrivano le equazioni del sistema linearizzato attorno ai punti di equilibrio determinati al punto 1.1.

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -5\delta x_2 + (\alpha-1)\overline{u}\,\delta x_2 + (\alpha-1)\overline{x}_2\,\delta u \\ \delta\dot{x}_2 = 2 \times 2(\overline{x}_1 - \alpha)\,\delta x_1 - 8\overline{x}_2\,\delta x_2 + 2\overline{u}\,\delta u \end{cases}$$

$$\delta y = 2\overline{x}_1\,\delta x_1 + \overline{x}_2\,\delta x_1 + \overline{x}_1\,\delta x_2$$

All'equilibrio si ha:

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta\dot{x}_1 = -5\delta x_2 \\ \delta\dot{x}_2 = 0 \\ \delta y = 2\alpha\,\delta x_1 + \alpha\,\delta x_2 \end{array}}$$

2

1.3 Si calcoli il movimento libero di stato e uscita del sistema linearizzato determinato al punto 1.2 associato alle condizioni iniziali $(\delta x_{10}, \delta x_{20}) = (1, 1)$.

Risolvo la 2ª eq: $\delta \dot{x}_2 = 0 \rightarrow \boxed{\delta x_2(t) = e^{0t}\delta x_{20} = 1}$

I ª eq $\delta \dot{x}_1 = -5\delta x_2 \rightarrow \delta x_1(t) = \delta x_{10} + \int_0^t e^{0(t-\tau)}(-5)d\tau$

$= \delta x_{10} - 5t = \boxed{1 - 5t, \, t \geq 0}$

$\delta y = 2\alpha\,\delta x_1 + \alpha\,\delta x_2 = 2\alpha + \alpha(1-5t) = \boxed{3\alpha - 5t, \, t \geq 0}$

Si noti che è mov. libero di $\delta x_2(t) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} \infty$!

3

1.4 Si studi la stabilità del sistema linearizzato determinato al punto 1.2 in funzione del parametro α e, se è possibile, si determinino le proprietà di stabilità dei movimenti di equilibrio del sistema non lineare di partenza.

$$A_{LIN} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \forall \alpha$$

Questa matrice ha un autovalore in $\lambda = 0$ doppio NON REGOLARE

$$Av = \lambda v \rightarrow \begin{cases} -5v_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{qualsiasi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\exists$ 1 solo autovettore lin. indip. associato a $\lambda = 0$

$\downarrow$

SISTEMA LINEARIZZATO INSTABILE (coerente con punto 1.3 !)

Poiché A_{LIN} : $Re(\lambda_i(A)) \leq 0 \; \forall i$ e $\exists i : Re(\lambda_i(A_{LIN})) = 0$

NON si può concludere nulla sulla stab. del mov. di eq. del sistema NON LIN.

2. Si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = 10\frac{0.01s + 1}{10s + 1}$$

di un sistema lineare tempo invariante senza autovalori nascosti.

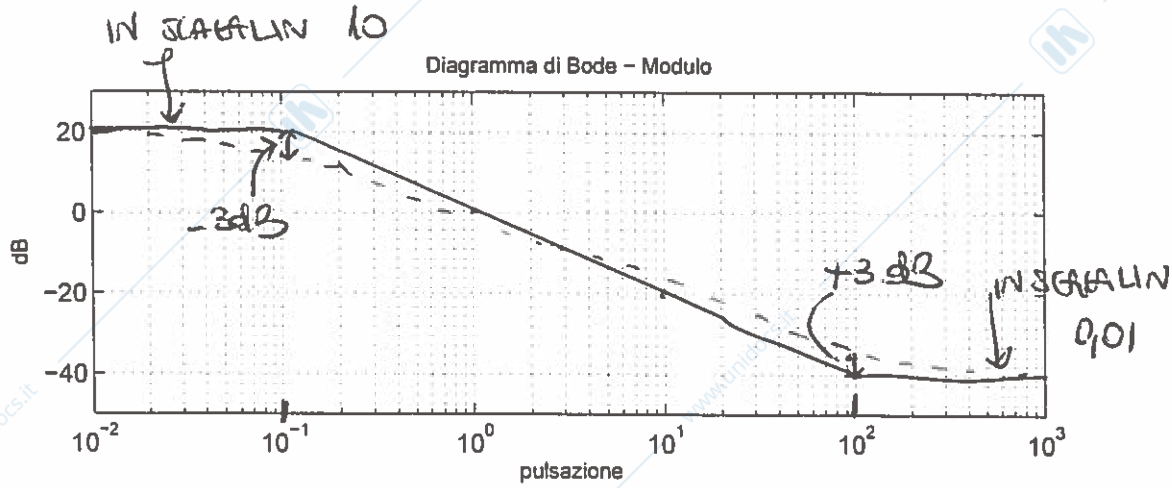
2 2.1 Calcolare guadagno, tipo, poli e zeri di $G(s)$ e studiare la stabilità del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$.

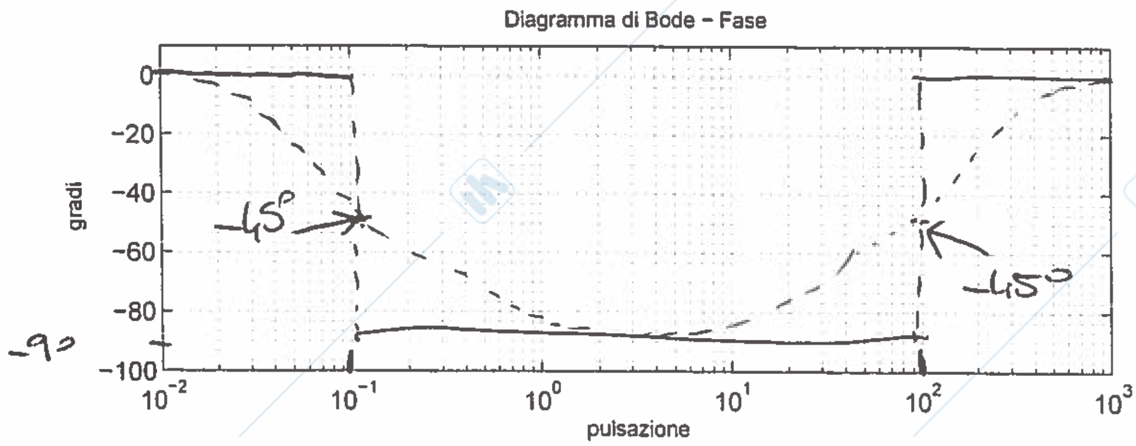
TIPO $g = 0$; $\mu = G(0) = 10$ $z = -\frac{1}{1/100} = -100$

$p = -\frac{1}{10} = -0{,}1$

G(s) ha 1 polo e NON vi sono ai NASCOSTI → poiché il polo è a Re<0 il sistema con FdT G(s) è AS. STABILE

2 2.2 Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$





1

2.3 Tracciare qualitativamente il diagramma polare della risposta in frequenza associata a $G(s)$.

In $\omega = 0$
parto da $G(0) = 10$
con fase 0°

In $\omega \to +\infty$
tendo a 0,01
con fase 0

3

2.4 Dire, giustificando la risposta, quanto vale l'uscita $y(t)$ di regime del sistema lineare tempo invariante con funzione di trasferimento $G(s)$ associata all'ingresso $u(t) = 2+5\sin(0.1\,t)+10\sin(100\,t)$.

$u_1 \quad u_2 \quad u_3$

$y_{1\infty}$: Sist. AS. ST. di tipo $g=0$

$$\boxed{y_{1\infty} = 2 \times G(0) = 20}$$

$y_{2\infty}$ e $y_{3\infty}$ si studiano col th. della risp. in fase, applicabile perché il sistema è AS. STABILE.

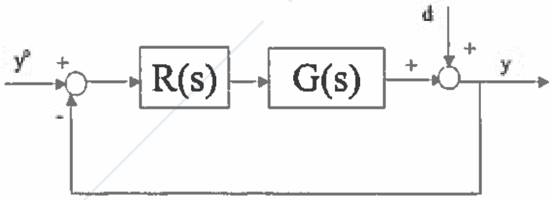
In generale,

se $u(t) = A\sin(\bar{\omega}t)$, $y_\infty = A\,|G(j\bar{\omega})|\,\sin(\bar{\omega}t + \angle G(j\bar{\omega}))$

Quindi (leggendo modulo e fase dai diagr. di Bode ESATTI), si ha

$$\boxed{\begin{aligned} y_{2\infty} &= 5 \times \frac{10}{\sqrt{2}} \sin(0{,}1t - \pi/4) \\ y_{3\infty} &= 10 \times 0{,}01 \times \sqrt{2} \sin(100t - \pi/4) \end{aligned}}$$

3. Si consideri il sistema di controllo in figura

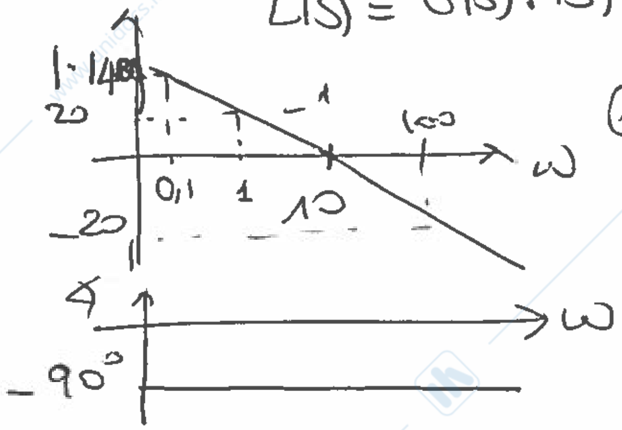


dove $G(s) = \frac{0.01s+1}{10s+1}$ e $R(s) = \frac{10}{s}\frac{10s+1}{0.01s+1}$.

5

3.1 Verificare se il sistema in anello chiuso soddisfa i seguenti requisiti: 1) il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile; 2) l'errore a transitorio esaurito a fronte di $y^o(t) = \pm \mathrm{sca}(t)$ è nullo; 3) il modulo dell'errore a transitorio esaurito a fronte di $d(t) = \sin(\omega t), \omega \in [0.1, 1]$rad/s è $|e_\infty| \leq 0.1$; 4) la pulsazione critica del sistema in anello chiuso è $\omega_c \geq 8$ rad/s e 5) il margine di fase è $\varphi_m \geq 70°$.

$$L(s) = G(s)R(s) = \frac{10}{s}$$



① Si ha $P=0$ e $|\angle L(j\omega)| < 180°$ $\forall \omega$

↓

per corollario della ricerca FASE il sist. in AN. CHIUSO è AS. ST.

② Vero: $L(s)$ è di tipo 1 così come il segnale $y^o(t)$

③ $d \to |e|$: $S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$ $\qquad |S(j\omega)| \simeq \begin{cases} 1/|L(j\omega)| & \omega < \omega_c \\ 1 & \omega > \omega_c \end{cases}$

poiché $\omega_c = 10\ \frac{rad}{s}$, per $\omega \in [0,1, 1]$ il $|L(j\omega)|$ varia tra 40 e 20 dB, ovvero tra 100 e 10

Pertanto il $|S(j\omega)| \leq \frac{1}{10}$ per $\omega \in [0,1, 1]$

④ ⑤ Dai diagrammi di Bode si vede che

$\omega_c \simeq 10$ rad/s

$\varphi_m = 180° - |\varphi_c| \simeq 90° > 70°$

3

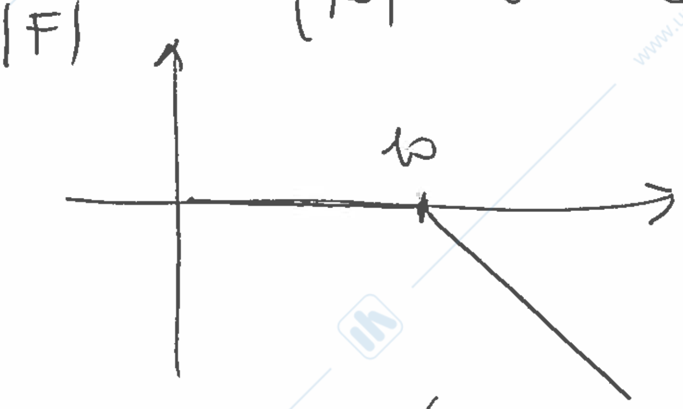
3.2 Con riferimento al sistema di controllo progettato al punto precedente dire, giustificando la risposta, quanto vale l'ampiezza dell'uscita $y(t)$ di regime associata all'ingresso $y^o(t) = 1 + 4\sin(0.1t) - 10\sin(100\,t)$ con $d(t) = 0$.

y^o_1 $+ y^o_2$

y^o_3

Fdt tra y^o e y è $F(s) = \dfrac{L(s)}{1+L(s)}$

$$|F(j\omega)| \simeq \begin{cases} 1 & \omega < \omega_c \\ |L| & \omega > \omega_c \end{cases}$$



Teorema risp. in freq. applicabile perché ω dist. in AN. anello è AS. ST.

Quindi $y_{1_\infty} = 1$ ($e_\infty = 0$ per y^o a scalino, quindi $y_{1\infty} = y^o$)

$y_{2\infty} = 4 \cdot |F(j0{,}1)| \simeq 4 \times 1 = 4$

$y_{3\infty} = 10 \times |F(j100)| \cong 10 \times |L(j100)| = 10 \times 0{,}1 = 1$

4

4. Con riferimento alla classe dei sistemi dinamici lineari, tempo invarianti e a tempo discreto, descritti dalle equazioni

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

si definisca il concetto di stato di equilibrio. Si determinino poi le espressioni dello stato e dell'uscita di equilibrio associati all'ingresso costante $\overline{u}$ e si mostri sotto quali condizioni essi esistono e sono unici.

Vedi libro/appunti

4

5. Si definisca il concetto di margine di guadagno, precisandone il significato nell'ambito dello studio dei sistemi di controllo in retroazione.

Vedi libro/appunti

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari