giovedì 2 aprile 2020 13:24

$$f(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} F(s)$$

- $\exists$ una corrispond. BIUNIVOCA tra $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^{-1}$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \triangleq \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\omega}^{\alpha + j\omega} e^{st} F(s)\, ds$$

---

2 RISULTATI teorici che consentono di calcolare $f(t)$
- in $t=0$ — CONDIZ. INIZIALE
- per $t \to +\infty$ — VALORE DI REGIME

① TEOREMA del VALOR INIZIALE (TVI)

Ipotesi $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$F(s)$ - FUNZ RAZIONALE

. con grado relativo $\boxed{r \geq 1}$ — # POLI - # ZERI

TESI $\boxed{f(0) = \lim_{s \to \infty} s F(s)}$ (*)

TESI

$$\boxed{f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)} \quad (*)$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ s \to \infty \end{cases}$$

ESEMPIO

$$F(s) = \frac{s+4}{3s^2+11s+10} \qquad f(0)\ ?$$

2 POLI
1 ZERO

$$\boxed{r = 2-1 = 1} \ \checkmark$$

$$f(0) \overset{TVI}{=} \lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2+4s}{3s^2+11s+10} = \frac{1}{3}$$

N.B. Usando il TVI + DERIVATA nel dom del tempo

$$\Downarrow$$

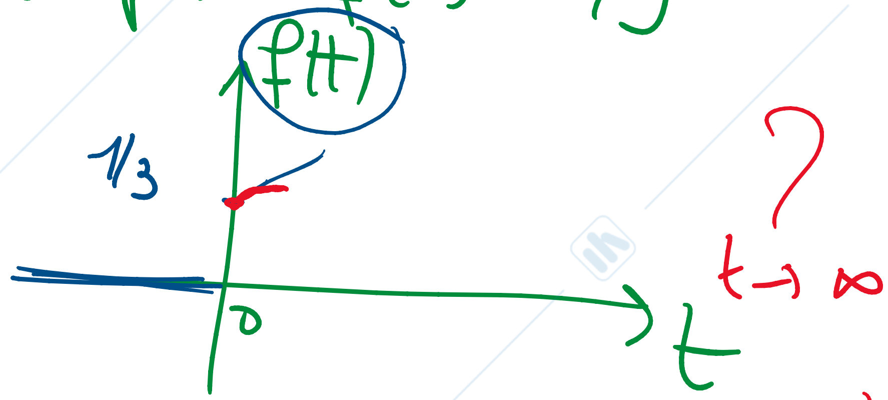
$$\boxed{f(0)}, \ \dot f(0) \ \ldots$$

$$\mathcal{L}[\dot f(t)] = sF(s) - f(0) = \tilde F(s)$$

devo verificare che TVI sia applicabile a $\tilde F(s)$

$$\dot f(0) \overset{TVI}{=} \lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}[\dot f(t)] = \lim_{s\to\infty} s\left[sF(s) - f(0)\right]$$

NEL NOSTRO esempio $\dot{f}(0) = 1/9$



(2) TEOREMA DEL VALOR FINALE (TVF)

Ipotesi: $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$F(s)$
- FUNZ. RAZIONALE
- AVERE POLI tutti con $\mathrm{Re}(p_i) < 0$ o NULLI in $s=0$

IPOTESI garantisce che $\lim_{t \to +\infty} f(t)$ esiste finito

Tesi:

$\begin{cases} t \to \infty \\ s = 0 \end{cases}$

$$\boxed{f_\infty = \lim_{s \to 0} s F(s)}$$

$$f_\infty = \lim_{t \to +\infty} f(t)$$

TORNIAMO all'esempio $F(s) = \dfrac{s+4}{3s^2+11s+10}$

f_∞? $F(s)$ RAZIONALE ✓

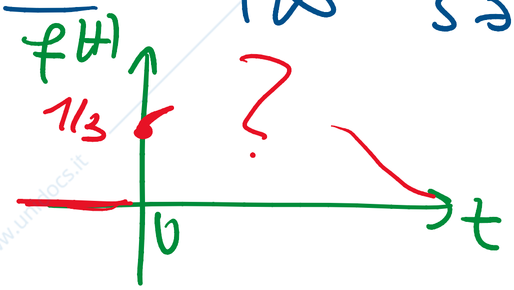
coeff. DEN sono concordi e non nulli

V

$\Updownarrow$

RADICI (POLI) sono tutti $Re < 0$

TVF $\quad f_\infty = \lim_{s \to 0} s F(s) = \lim_{s \to 0} \dfrac{s^2 + 4s}{3s^2 + 11s + 6} = 0$



N.B. $\quad f(t) = \cos(\omega t),\ t \geq 0$

$= \cos(\omega t)\,\text{sca}(t)$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

TVI $\quad \left\{ \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ \dot f(0) = 0 \\ \ddot f(0) = -\omega^2 \end{array} \right\} \quad \dfrac{d}{dt} f(t)$

$\downarrow$

TVF $\quad F(s) = \dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$ $\quad$ RAZIONALE V

POLI? $\quad s_{1,2} = \pm j\omega$

$s+\omega$ ... $_{1,2}$

Poli tutti Re < 0 o NULLI

NO

2 POLI COMPL. CON. con Re(poli) = 0

TVF non è applicabile, ma del resto f(t) NON ammette limite per $t \to +\infty$!!!

ESEMPIO DI CALCOLO dell'ANTITRASFORMATA per valutazione del movim. dell'uscita di un sistema LTI

$$\dot{x} = -x + u$$
$$y = x$$

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ u(t) = sca(t) \\ \quad = 1, \; t \geq 0 \end{cases}$$

y(t)?

C.I. NULLE + ingresso generico

$$y(t) = y_F(t)$$

FORMULA di LAGR.

$$y(t) = \dots e^{At} \dots \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

LAGR.

$$x(t) = \cancel{e^{At} x_0} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t e^{-(t-\tau)} \times 1 \, d\tau =$$

$$= e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau = e^{-t} \left[e^{\tau} \right]_0^t = e^{-t} (e^{t} - 1)$$

$$\boxed{x_F(t) = 1 - e^{-t}, \quad t \geq 0}$$

MODO $e^{-t}, \ t \geq 0$

$$y_F(t) = x_F(t) = 1 - e^{-t}, \quad t \geq 0$$

USIAMO adesso le TRASF. di LAPLACE:

$$\mathcal{L} \begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ u(t) = sca(t) \end{cases}$$

$\mathcal{L}[\dot{x}]$

$$sX(s) - \cancel{x(0)} = -X(s) + U(s)$$

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$$

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$$

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[sca(t)] = \frac{1}{s}$$

$$sX(s) + X(s) = U(s)$$

$$Y(s) = X(s) = (s+1)Y(s) = U(s)$$

MOVIM. FORZATO dell'uscita nel dominio delle trasf.

$$\boxed{Y(s) = \frac{1}{s(s+1)}} \quad \boxed{y(t) = 1 - e^{-t}, \; t \geq 0}$$

VERIFICARE $\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y(t)$

CALCOLO dell'ANTITRASF.

$$Y(s) = \frac{\boxed{1}}{s(s+1)} = \boxed{\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}} = \frac{\boxed{A(s+1) + Bs}}{s(s+1)}$$

METODO DI HEAVISIDE

PRINCIPIO di IDENTITÀ dei POLINOMI

coeff. termine 1° grado

APPLICO id. dei polinomi a numeratore:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -A = -1 \\ A = 1 \end{cases} \iff$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y(t) = \text{sca}(t) - e^{-t}\text{sca}(t)$$

$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y(t) = \text{sca}(t) - e^{-t}\text{sca}(t)$

$= \boxed{1 - e^{-t}}, \; t \geq 0$

<u>VERO</u>

$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y(t)$!! $r = 2$

2 POLI $s = 0$, $s = -1$

NESSUN ZERO

$Y(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$

VERIFICA CON TVI e TVF

<u>TVI</u> $Y(s)$ è RAZ ✓

✓ ha $r \geq 1$? 2 POLI, 0 ZERI $\rightarrow r = 2 - 0 = 2$

$\hookrightarrow y(0) = \lim_{s \to \infty} s\,Y(s) = \lim_{s \to \infty} \dfrac{s}{s(s+1)} = 0$ $\quad \approx \frac{s}{s^2} = \frac{1}{s} \to 0$

$\dot{y}(0) = \lim_{s \to \infty} s\mathcal{L}[\dot{y}(t)] = \lim_{s \to \infty} s\,[s\,Y(s) - \cancel{y(0)}]$ $\quad 0$

$= \lim_{s \to \infty} s^2 Y(s) = \lim_{s \to \infty} \dfrac{s^2}{s(s+1)} = 1$

$s\,Y(s) = \dfrac{\cancel{s}}{\cancel{s}(s+1)}$ $\quad r = 1$ ✓

$y(t) = 1 - e^{-t}$ $\quad y(0) = 1 - 1 = 0$ ✓

$\dot{y}(0) = e^{-t}\Big|_{t=0} = 1$ ✓

<u>TVF</u> $Y(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$ RAZ ✓

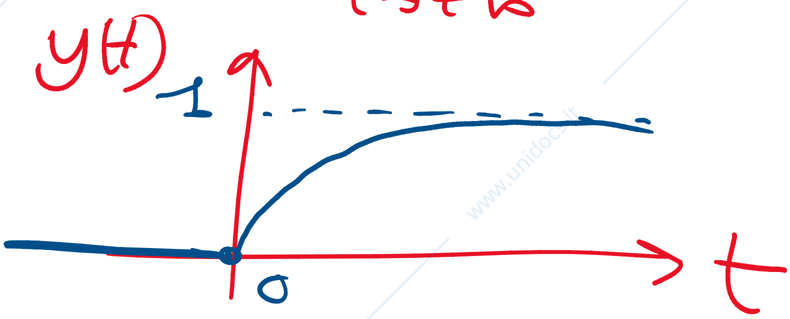
POLI $\boxed{s = 0}$, $s = -1$

$s=-1$

ok! Re < 0 o NULLI

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s(s+1)} = 1$$

$$y(t) = 1 - e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1 \quad \checkmark$$



SISTEMI DINAMICI LTI nel DOMINIO della TRASFORMATA

NOTA TRASFORMATA DI UN VETTORE

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[x_1(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[x_n(t)] \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[\dot{x}_1(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[\dot{x}_n(t)] \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} sX_1(s) - x_1(0) \\ \vdots \\ sX_n(s) - x_n(0) \end{bmatrix}}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Dato un sistema dinamico LTI

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

vogliamo esprimerlo nel dom. della trasf

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$X(s) = \underbrace{(sI-A)^{-1}x(0)}_{\text{MOV. LIBERO}} + \underbrace{(sI-A)^{-1}BU(s)}_{\text{MOV. FORZATO}}$$

$X(s)$: movim dello STATO nel dom. delle trasf

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = x(t)$$

$(sI - A)$ è $\boxed{\text{"GENERICAMENTE"}}$ INVERTIBILE

$(sI-A)^{-1}$ esiste sempre tranne che per $s = \{\lambda_i(A)\}$

per $S = \{ \lambda_i(A) \}$

Calcolo $Y(s) = C X(s) + D U(s)$

Sostituendo $X(s)$ come in (□) :

$$(*) \quad Y(s) = \underbrace{C(sI-A)^{-1} x(0)}_{Y_L(s)} + \underbrace{C(sI-A)^{-1} B U(s) + D U(s)}_{Y_F(s)}$$

$Y(s)$: MOV. dell'uscita nel dom. della trasf.

Ponendo $x(0) = 0$ C.I. NULLE, (*) diventa

MOV. FORZATO dell'uscita

$$Y(s) = \underbrace{\left[C(sI-A)^{-1} B + D \right]}_{\text{FUNZIONE DI TRASFERIMENTO } G(s)} U(s)$$

La FdT dipende solo dal sistema (A, B, C, D)

$$Y(s) = G(s) U(s) \iff \boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)}$$

La F.d.T $G(s)$ è il RAPPORTO fra la trasf di Laplace dell'uscita

la trasf di laplace dell'uscita
e quella dell'ingresso CON C.I. NULLE

(L) laplace dell'uscita
RAPPORTO TRA la trasf. di U FORZATA del sistema
e dell'ingresso

$$U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$