FONDAMENTI DI AUTOMATICA I - Ingegneria Elettrica **Prof.ssa Mara Tanelli**
Appello del 20 settembre 2010

1. Si consideri il sistema dinamico non lineare con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1(t) = 5\alpha^3 x_1^3(t) + 5x_2(t)u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -4x_2(t) + 4u(t)$$
$$y(t) = x_2(t),$$

con α parametro reale.

1.1 Determinare stato $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ e uscita $\bar{y}$ di equilibrio associati all'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 1$, $t \geq 0$.

Azzerando le derivate e sostituendo $u=\bar{u}$ si ha:

$$\begin{cases} 5\alpha^3\bar{x}_1^3 + 5\bar{x}_2\bar{u} = 0 \\ 4\bar{x}_2 = 4\bar{u} \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = -\frac{1}{\alpha}, \boxed{\alpha \neq 0} \\ \bar{x}_2 = 1 \end{cases}$$

$$\bar{y} = \bar{x}_2 = 1$$

$$\boxed{(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (-\tfrac{1}{\alpha}, 1) \quad \bar{y} = 1} \ \alpha \neq 0$$

1.2 Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio determinato al punto precedente.

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = 15\alpha^3 x_1^2\Big|_{eq}\delta x_1 + 5\bar{u}\Big|_{eq}\delta x_2 + 5\bar{x}_2\Big|_{eq}\delta u \\ \delta\dot{x}_2 = -4\delta x_2 + 4\delta u \end{cases}$$

$$\delta y = \delta x_2$$

All'equilibrio si ha

$$\boxed{\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = 15\alpha\,\delta x_1 + 5\delta x_2 + 5\delta u \\ \delta\dot{x}_2 = -4\delta x_2 + 4\delta u \end{cases} \quad \delta y = \delta x_2}$$

1.3 Studiare la stabilità del sistema linearizzato al variare di α e valutare, se possibile, la stabilità del movimento di equilibrio del sistema non lineare.

La matrice A del sistema linearizzato è

$$A = \begin{bmatrix} 15\alpha & 5 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$ i cui autovalori sono

$\lambda_1 = 15\alpha$

$\lambda_2 = -4$

Se $\alpha < 0$ si ha $Re(\lambda i) < 0, \forall i$ che è CNS per l'as. stabilità del sistema linearizzato $\Rightarrow$ Movim. di equilibrio del sistema NON LIN. è AS. ST.

Se $\alpha > 0$ $\exists i : Re(\lambda i) > 0$ che è CS per l'INSTABILITÀ del sistema LINEARIZZATO e CS anche per l'INSTABILITÀ del movimento di eq. del sistema NON LIN.

Il caso $\alpha = 0$ NON è ammissibile visti i risultati del punto 1.1.

2. Si consideri la seguente funzione di trasferimento di un sistema lineare e tempo invariante di ordine tre

$$G(s) = \frac{s + 100}{(s + 1)(s^2 + 8s + 100)}.$$

2.1 Determinare tipo, guadagno, poli e zeri di $G(s)$.

TIPO $= 0$

GUADAGNO 1

ZERI $z = -100$

POLI $p_1 = -1$ $p_2, p_3 = -4 \pm i\, 9,15$

2.2 Determinare la costante di tempo dominante del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$.

$$T_{DOM} = \frac{1}{|Re(polo_{DOM})|} = 1$$

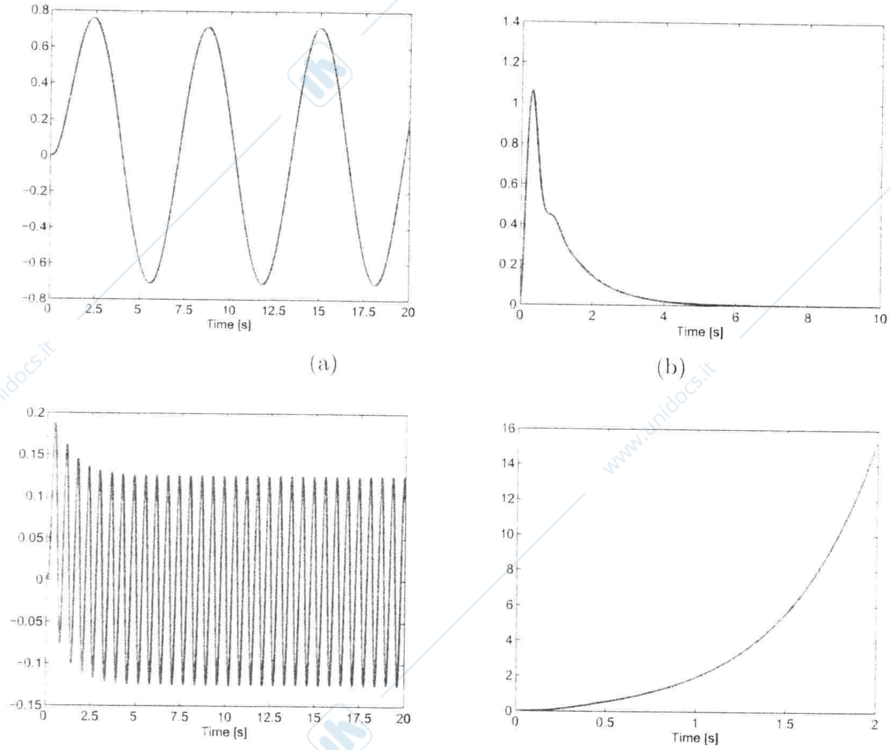
2.3 Associare a ciascuno dei grafici sotto riportati, motivando la risposta, la riposta forzata del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ ai seguenti ingressi:

a) $u(t) = \mathrm{imp}(t)$

b) $u(t) = e^{2t}$

c) $u(t) = \sin(t)$

d) $u(t) = \sin(10\,t)$.



(a) (b) (c) (d)

- $u(t) = \mathrm{imp}(t) \Rightarrow$ grafico b perché per il TVF, applicabile perché poli di $Y(s) = G(s)U(s)$ sono a $Re<0$ o NULLI si ha $y_\infty = 0$
- $u(t) = e^{2t} \Rightarrow$ grafico d: la risposta forzata diverge. Poiché il sistema con f.d.t. $G(s)$ è AS. STABILE ciò accade solo se l'ingresso è divergente.
- $u(t) = \sin(t)$; ~~...~~ } il Teorema della risp. in freq., applicabile perché il sistema con
- $u(t) = \sin(10)t$ } fdt $G(s)$ è AS. STABILE, garantisce

che a regime $y(t)$ è una sinusoide di = pulsazione dell'ingresso.

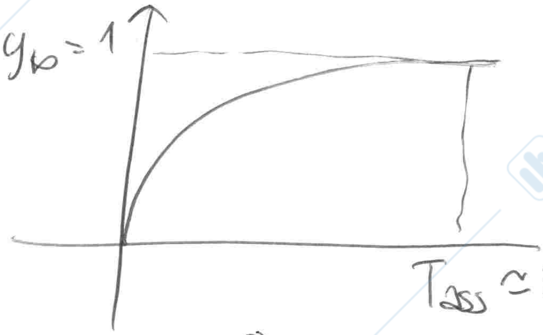
Il periodo è $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \begin{cases} \sin(t) \to \text{grafico a)} \\ \sin(10t) \to \text{grafico c)} \end{cases}$

2.4 Si calcoli ora l'approssimazione a poli dominanti di $G(s)$, e, per essa, si tracci il grafico dell'andamento qualitativo della risposta a $u(t) = \text{sca}(t)$, precisandone valore iniziale e finale, valore iniziale della derivata prima e tempo di assestamento.

$T_{ass} \simeq 5\tau_{dom} = 5\,s$

$$G_a(s) = \frac{1}{s+1}$$

$y_\infty = 1$



$T_{ass} \simeq 5\,s$

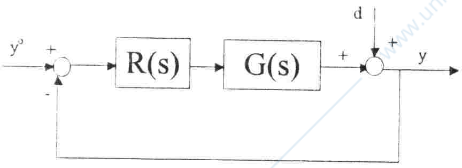
TVI: $y(0) = \lim_{s\to\infty} s\,G_a(s)\frac{1}{s} = 0$

TVF (applicabile perché poli di $G_a(s)\frac{1}{s}$ tutti con Re<0 o nulli)

$\lim_{s\to 0} s\,G_a(s)\frac{1}{s} = 1$

TVI per la derivata $\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\left[sY(s) - \cancel{y(0)}^{\,0}\right] = 1$

3. Si consideri il sistema di controllo in figura



con $G(s) = \frac{-5}{(s+1)(0.5s+1)}e^{-s\tau}$.

3.1 Posto $\tau = 0$ progettare un regolatore $R(s)$ tale che: 1) l'errore a transitorio esaurito a fronte di $y^o(t) = 130\,\text{sca}(t)$ e $d(t) = -55\,\text{sca}(t)$ sia nullo; 2) la pulsazione critica del sistema in anello chiuso sia $\omega_c \geq 0.5$ rad/s; 3) il margine di fase sia $\varphi_m \geq 45°$.

Per soddisfare il punto 1) occorre un regolatore di tipo 1 $\Rightarrow$ $R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$ Fisso $\mu_R = 1$

Per soddisfare i vincoli 2) e 3) ~~occorre~~ è opportuno avere $L(s)$ con guadagno positivo. Se $L(s) = \frac{0,5}{s}$ ho $\omega_c = 0,5$ e $\varphi_m = 90°$

$$\Rightarrow R(s) = \frac{-\frac{1}{10}(s+1)(0,5s+1)}{s\,\underbrace{(0,001s+1)}_{\text{Polo in HF per rendere realizzabile il regolatore}}}$$

3.2 Con riferimento al sistema di controllo progettato al punto precedente dire, giustificando la risposta, qual è il massimo valore del ritardo τ:
1) compatibile con il rispetto del requisito sul margine di fase;
2) compatibile con l'asintotica stabilità del sistema in anello chiuso.

1) Ho $\varphi_m = 90°$ quindi $45°$ di eccedenza rispetto al vincolo.
Pertanto si ha $\omega_c \tau_{MAX} \frac{180°}{\pi} = 45° \iff \boxed{\tau_{MAX} \cong 1,5\cancel{7}\ s}$

2) Visto che $L(s)$ rispetta le ~~ipotesi~~ condizioni di applicabilità del criterio di Bode, e $\mu_L > 0$, ho AS. STABILITÀ $\iff \varphi_m > 0$
Quindi $\omega_c \tau_{MAX} \frac{180°}{\pi} = 90° \iff \boxed{\tau_{MAX} \cong 3,1\cancel{4}\ s}$

4. Con riferimento alla classe dei sistemi dinamici lineari e tempo invarianti a tempo continuo, si definisca con precisione il concetto di margine di fase, precisandone il ruolo nell'ambito della sintesi dei sistemi di controllo.

Vedi LIBRO / APPUNTI

5. Con riferimento alla classe dei sistemi dinamici lineari e tempo invarianti a tempo continuo, si enunci con precisione il teorema della risposta in frequenza.

Vedi LIBRO / APPUNTI