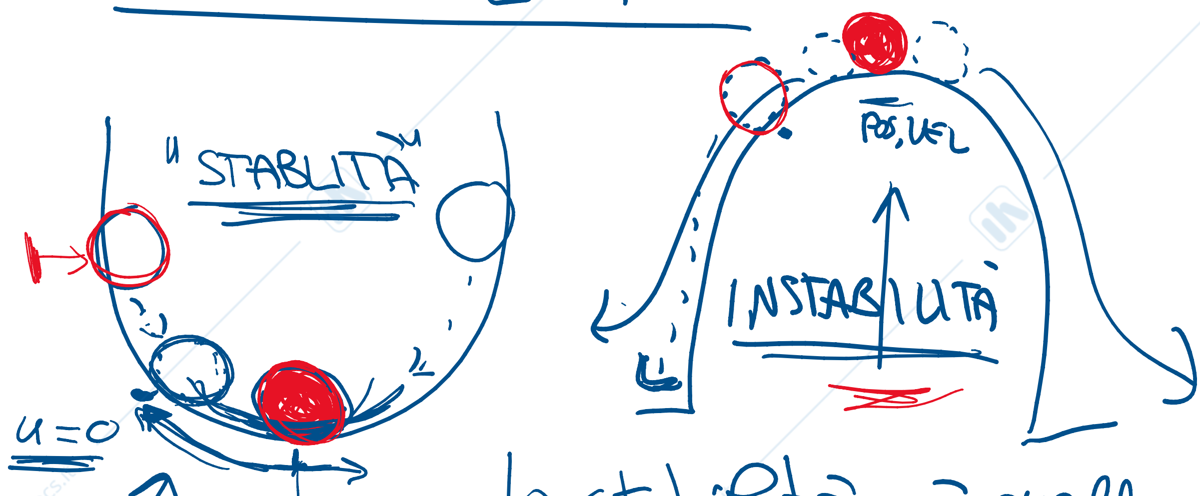
lunedì 23 marzo 2020 10:21

STABILITÀ

$\boxed{u=0}$

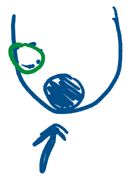


MOVIMENTO dello STATO del SISTEMA

La stabilità è quella proprietà per cui un "SISTEMA" a fronte di una PERTURBAZ. del suo stato, tende a "DIMENTICARE" questa perturbazione e a tornare nella condizione INIZIALE

STABILITÀ del MOVIMENTO
STABILITÀ ALLA LYAPUNOV

CONCETTO



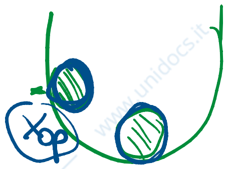
Sistemi NON LINEARE, TEMPO INVARIANTI — NL TI

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

→ INGRESSO : $\boxed{u(t) = u^*(t) \quad t \geq 0}$ FUNZIONE INGRESSO NOTA

→ CHIAMIAMO C.I. $x(0) = x_{0m}$ $\xrightarrow{u^*(t)}$ $x(t) = x_m(t)$ $\boxed{u^*(t)=0}$

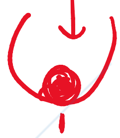
MOVIMENTO



C.I. $\underbrace{x(0) = x_{0m}}$ ⟶ $\underbrace{x(t) = x_m(t)}$ $\boxed{u(t)=0}$

C.I. NOMINALE

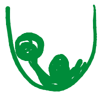
MOVIMENTO dello stato NOMINALE

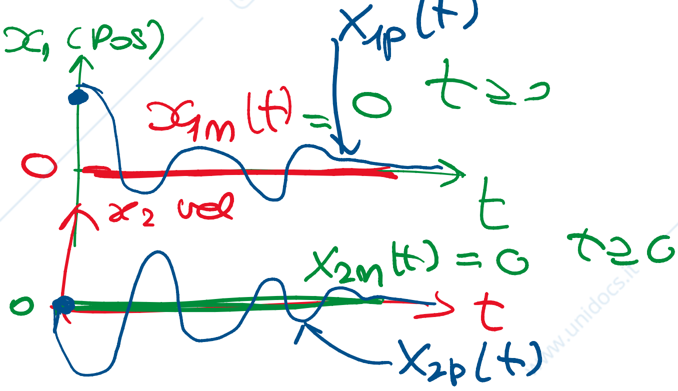


C.I. $\underbrace{x(0) = x_{0p}}$ $\quad u^*(t) \longrightarrow \underbrace{x(t) = x_p(t)}$

C.I. PERTURBATA

MOVIM. dello stato PERTURBATO





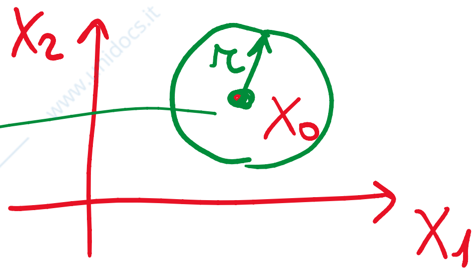
Nozione di ENTITÀ della PERTURBAZIONE

NORMA EUCLIDEA di un VETTORE

LUNGHEZZA del VETTORE $\quad \|x\| = \sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + \dots + x_n(t)^2}$

↳ n COMPONENTI

INTORNO CIRCOLARE di raggio r centrato in x_0 $\quad B_r(x_0)$



STABILITÀ del MOVIMENTO

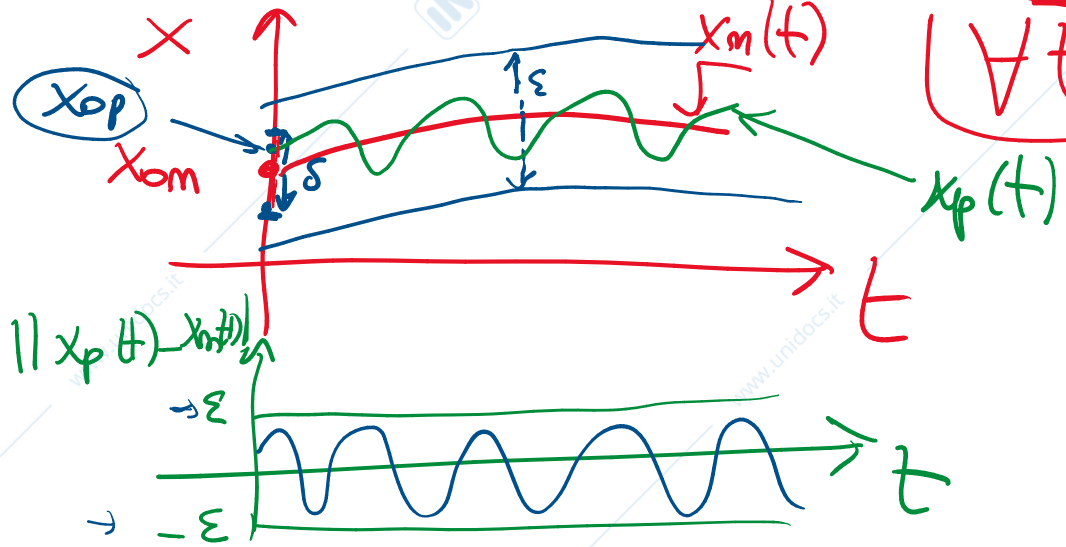
Il movimento di un sistema NL e TI si dice STABILE se

$\forall \varepsilon > 0 \; \boxed{\exists \, \delta > 0}$ tale che:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che:

$$\|x_{0p} - x_{0m}\| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \|x_p(t) - x_m(t)\| < \varepsilon$$

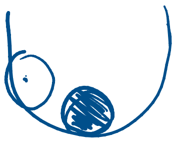
$\forall t \geq 0$



Il movimento è "asintoticamente stabile" se

1) è stabile
2) è convergente

↳ se $\|x_{0p} - x_{0m}\| < \delta \Longrightarrow \lim_{t \to +\infty} \|x_p(t) - x_m(t)\| = 0$

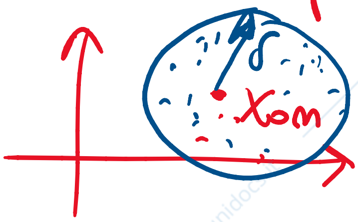


$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} x_p(t) = x_m(t)}$$

NOTA La prop. di STABILITÀ ci chiede che la condizione

$$\| x_p(t) - x_m(t) \| < \varepsilon, \ \forall t \geq 0$$

sia verificato $\forall \ x_{0p} : \| x_{0p} - x_{0m} \| < \delta$



Un MOVIMENTO si dice INSTABILE se non è STABILE

↓

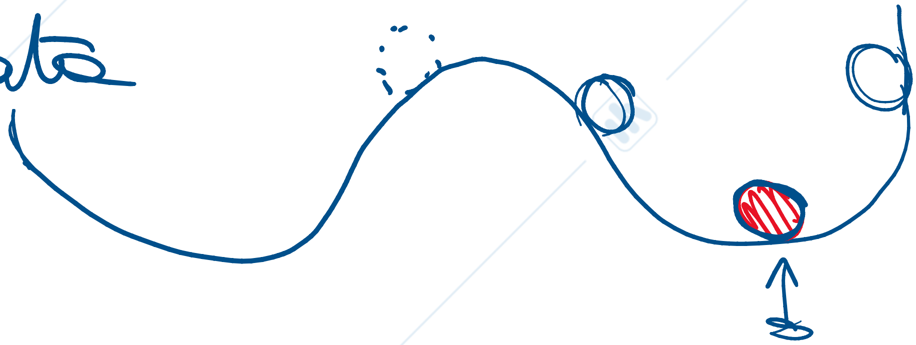
VUOL DIRE: $\exists$ ALMENO 1 CONDIZ. INIZIALE PERTURBATA

$$x_{0p} \in \mathcal{B}_\delta(x_{0m}) :$$

$x_p(t)$ e $x_m(t)$ si DISCOSTANO TRA LORO di una quantità $\geq \varepsilon$

La STABILITÀ è una proprietà LOCALE cioè vale in generale

LOCALE, cioè vale in generale per perturbazioni di entità limitata



Le propr. di STABILITÀ VALGONO INALTERATE se come movimento NOMINALE considero un MOVIM. di EQUILIBRIO

MOVIM. di EQUIL. $u^*(t) = \bar{u}$ COSTANTE, $t \geq 0$

$[x_n(t) = \bar{x}$ COSTANTE

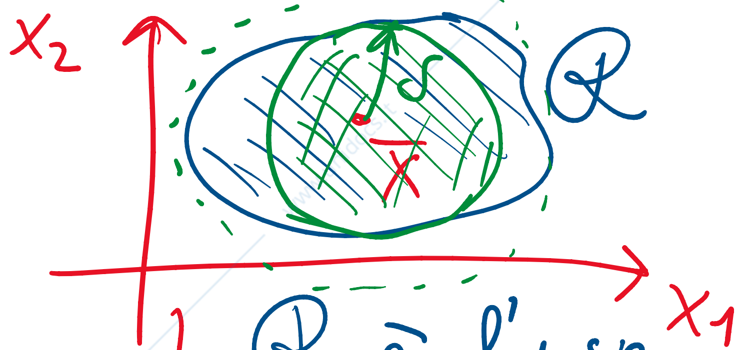
In questo caso PARLIAMO di

STATO di EQUILIBRIO / MOVIM.
- STABILE
- AS. STABILE
- INSTABILE

La proprietà di STABILITÀ di UN EQUILIBRIO è UNA PROPRIETÀ LOCALE, che vale per perturbaz. della C.I in un intorno di raggio δ della C.I. NOMINALE

Per quantificare δ si usa il concetto di **REGIONE DI ATTRAZIONE** associata agli STATI di EQ. ASINTOTICAM. STABILI

$\bar{x}$: EQ. AS. STABILE



$$\mathcal{R} = \left\{ x_0 \;\middle|\; x_p(t) \xrightarrow{t \to +\infty} \bar{x} \right\}$$

$\mathcal{R}$ è l'insieme delle C.I. da cui si genera un movim. perturbato che $\xrightarrow[t \to +\infty]{}$ allo stato di eq. AS. STABILE

MISURA DEL MASSIMO VALORE di δ

ESEMPIO

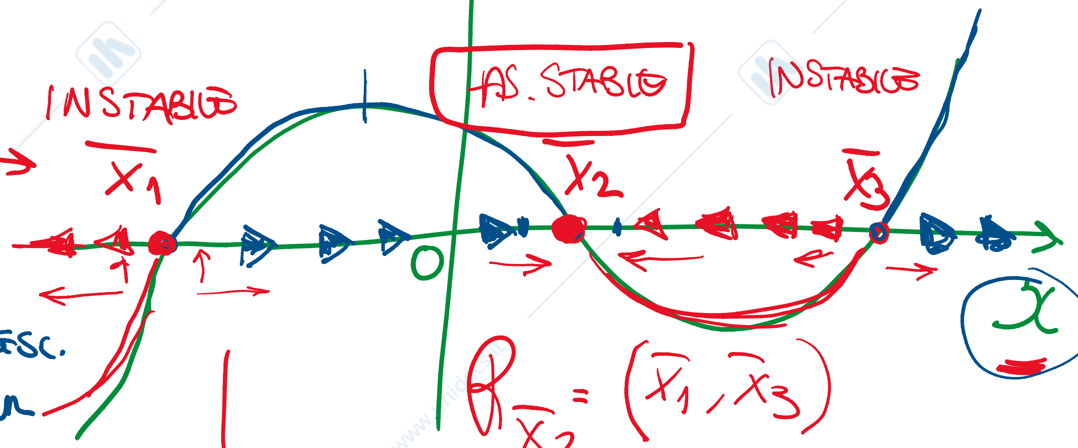
ESEMPIO

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$u(t) = \bar{u} \quad \text{COSTANTE}$$

$$\dot{x} = f(x, \boxed{\bar{u}})$$

SCALARE

$$0 = f(\bar{x}, \bar{u})$$



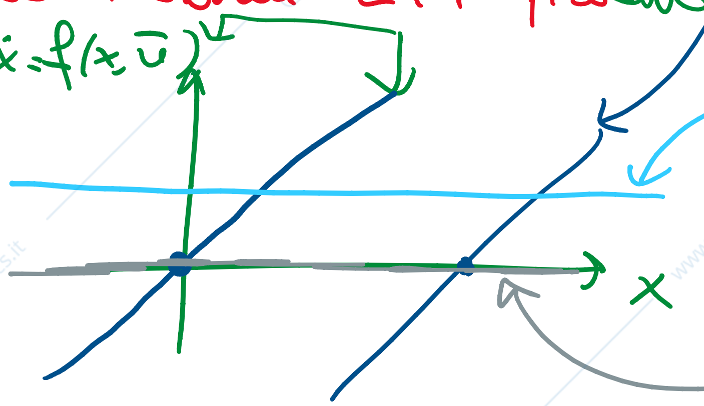
$\dot{x} > 0 \to x$ CRESC.

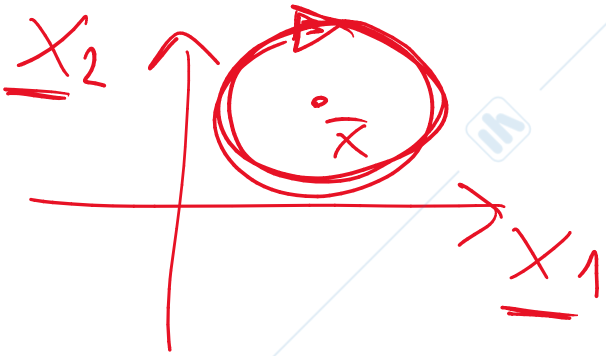
$\dot{x} < 0 \to x$ DECR.

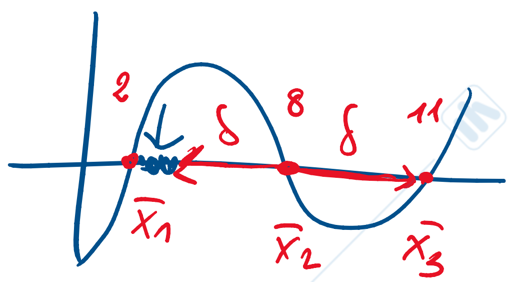
$$\mathcal{R}_{\bar{x}_2} = (\bar{x}_1, \bar{x}_3)$$

NOTA Un sistema NL e TI può ammettere più stati di EQ. ASSOCIATI allo stesso ingr. costante

Nel caso di sistemi LTI fissato $\bar{u}$ <
- 1! EQ
- 0 EQ
- ∞ eq







$$\mathcal{R}_{\bar{x}_2} = (2, 11)$$

$$\delta = 3^-$$

STABILITÀ DEI SISTEMI LTI

STABILITÀ per sistemi LTI

$$(0)\ \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

STABILITÀ ?

$x(0) = x_{0n} \xrightarrow{u^*(t)} x_n(t)$

$x(0) = x_{0p} \xrightarrow{u^*(t)} x_p(t)$

$x_n(t)$ e $x_p(t)$ sono movimenti del sistema (0) $\Rightarrow$ le loro derivate r. al tempo devono soddisfare l'eq. di stato

$$① \quad \dot{x}_n(t) = Ax_n(t) + Bu^*(t)$$

$$② \quad \dot{x}_p(t) = Ax_p(t) + Bu^*(t)$$

$$② - ① = \dot{x}_p(t) - \dot{x}_n(t) = A(x_p(t) - x_n(t)) + \cancel{Bu^*(t) - Bu^*(t)}$$

$$x_p(t) - x_n(t) = \delta x$$

$x_p(T) - x_m(T) = \delta x$

② − ① = $\boxed{\delta \dot{x} = A \delta x}$ (□)

Per studiare la differenza $(x_p(t) - x_m(t))$ basta risolvere (□)

(□) eq. di stato di un sistema LTI senza ingresso

NOTE a) Per i sistemi LTI la stabilità NON dipende dall'ingresso

b) la soluzione di (□) è

$$\underbrace{\delta x(t)}_{x_p(t) - x_m(t)} = \underbrace{e^{At}}_{\substack{t \to +\infty \\ \downarrow \\ 0}} \underbrace{\delta x_0}_{x_{0p} - x_{0m}}$$

$x_p(t) - x_m(t) \xrightarrow{t \to +\infty} 0$?

$x_{0p} - x_{0m} \neq 0$

$x_{0p} \neq x_{0m}$

Per sistemi LTI la proprietà di

Per sistemi LTI la proprietà di stabilità è una proprietà del SISTEMA e non più del singolo movimento (come nel caso dei sistemi NL e TI)

dall'eq. (□) si vede che tale propr. dipende solo dalla matrice A (che determina e^{At})

Sempre dall'eq (□) si vede che per sistemi LTI la stab. dipende dal solo MOVIMENTO LIBERO