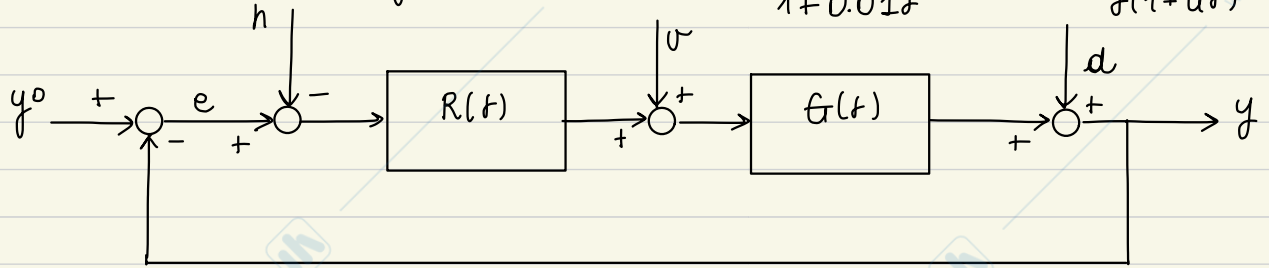


Esercizio 1

Dato lo schema di controllo in figura, in cui $R(s) = 10 \frac{(1+u)}{1+0.01s}$ e $G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s(1+u)}$.



(1) Posto $\tau=0$, verificare che:

- Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile
- $|\epsilon_{\infty}| < 0.2$ quando $y^o = 10 fca(t)$, $v(t) = \pm fca(t)$ e $n(t) = d(t) = 0$
- $\omega_c \geq 10 \text{ rad/s}$
- $\phi_m \geq 60^\circ$

(2) Tracciare l'andamento qualitativo dell'uscita quando $y^o(t) = 2 fca(t)$ e $d(t) = v(t) = 0$ e $n(t) = 0$

(3) Stabilire il valore a regime del modulo $|u_{\infty}|$ dell'ingresso per:

- $y^o(t) = \delta n(t)$
- $y^o(t) = \sin(100t)$

(4) Determinare il valore massimo del ritardo τ che garantisce l'asintotica stabilità del sistema retroazionato

(1) In primo luogo, per $\tau=0$, notiamo che:

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{10}{(1+0.01s)s} \quad (\text{notare che tra } R(s) \text{ e } G(s) \text{ si ha una cancellazione non critica})$$

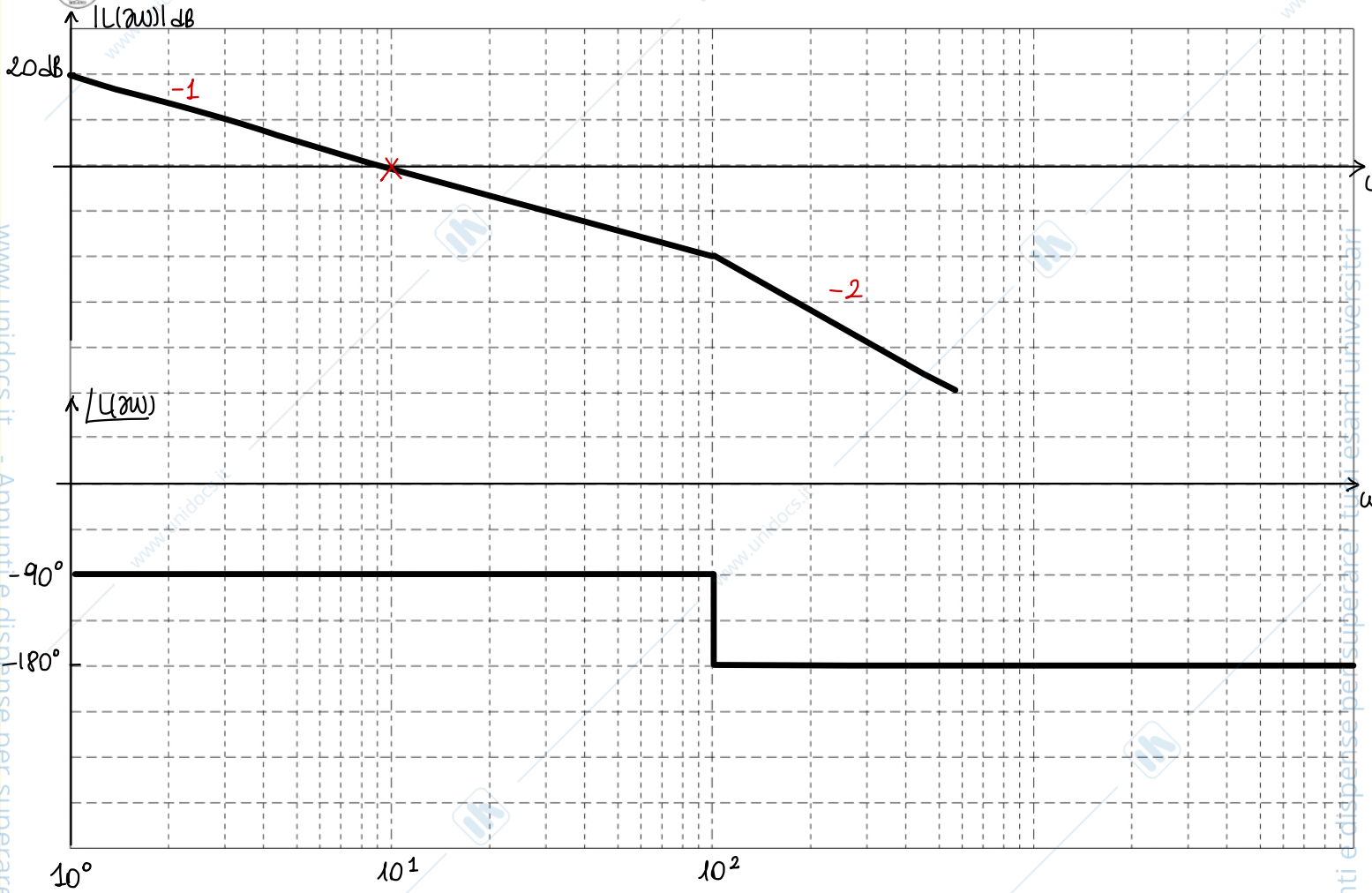
La funzione di trasferimento:

- è di tipo $g=1$ ($L(s)$ ha un polo in zero)
- ha guadagno generalizzato $\mu = G(0)s = 10$
- non ha zeri
- ha un polo in $p_1 = -100$ (stabile) $\rightarrow P=0$

(a) Per verificare la stabilità potremmo cercare direttamente i poli di $F(s)$, data la semplicità di $L(s)$, ma visto le altre richieste conviene sfruttare il criterio di Bode (se possibile).

Disegniamo i diagrammi di Bode partendo dalla pulsazione $\omega = 1 \text{ rad/s}$, in corrispondenza della quale:

$$|L(j1)| \approx 20 \log |10| - 20 \log |j1| = 20 \text{ dB}$$



Dal diagramma di Bode del modulo si nota che $|L(j\omega)|_{dB} = 0$ se $\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

→ $\omega_c = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ verificando (c)

Dato che $P=0$ ed eritte, ed è unica, la pulsazione di attraversamento ω_c , possiamo studiare la stabilità del sistema retroazionato con il criterio di Bode. In particolare, dato che $\mu > 0$, dobbiamo verificare che $\varphi_{\mu} > 0^\circ$.

$$\rightarrow \varphi_{\mu} = 180^\circ - |\varphi_c| \quad \text{con} \quad \varphi_c = \angle L(j\omega_c) = \angle 10 - \angle j\omega_c - \angle 1 + j\omega_c 0.01 = -90^\circ - \text{atg}(0.1) = \approx -90^\circ - 5.7^\circ = -95.7^\circ$$

$$\rightarrow \varphi_{\mu} = 180^\circ - 95.7^\circ = 84.3^\circ > 0 \quad \rightarrow \text{verifica (d)}$$

Il sistema retroazionato è quindi **ASINTOTICAMENTE STABILE** (verificando (a)).

Per verificare (b) dobbiamo trovare e_{ssy} e e_{ssv} , dato che applicando il principio di sovrapposizione

posizione degli effetti.

$$\bullet E_{y^0}(t) = f(t) y^0(t) = \frac{1}{1+L(t)} y^0(t) = \frac{f(1+0.01t)}{f(1+0.01t)+10} y^0(t)$$

$$\text{TVF } e_{\infty y^0} = \lim_{t \rightarrow 0} f E_{y^0}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \cancel{f} \frac{f(1+0.01t)}{f(1+0.01t)+10} \cdot \frac{10}{\cancel{f}} = 0$$

Nota che, dato che $L(t)$ è del 1° ordine, ci aspettavamo di non avere errore statico ad un riferimento di tipo 1.

$$\bullet E_v(t) = \frac{G(t)}{1+L(t)} v(t) = \frac{1}{f(1+L(t))} \cdot \frac{f(1+0.01t)}{f(1+0.01t)+10} v(t)$$

$$\text{TVF } e_{\infty v} = \lim_{t \rightarrow 0} f E_v(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \pm \frac{(1+0.01t)}{f(1+0.01t)+10} = \pm \frac{1}{10} = \pm 0.1$$

Quindi:

$$e_{\infty} = e_{\infty y^0} + e_{\infty v} = \pm 0.1$$

→ $|e_{\infty}| < 0.2$ verificando (b)

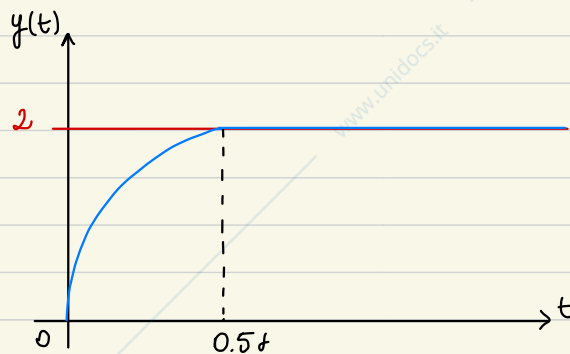
(2)

Dato che $\varphi_{cu} > 75^\circ$ allora possiamo approssimare $F(t)$ come:

$$F(t) = \frac{w_c}{f+w_c} = \frac{10}{f+10}$$

Quindi in prime approssimazione possiamo dire che:

- $y^0 = M_F z = 2$
- $T_a = \frac{5}{w_c} = 0.5 t$



(3) Dato che non è specificato nel testo, in questo caso $n(t) = d(t) = v(t) = 0$.

Sappiamo che la funzione di trasferimento che lega il riferimento all'ingresso è la funzione di sensibilità al controllo:

$$Q(t) = \frac{R(t)}{1+L(t)}$$

e che, per tale funzione vale:

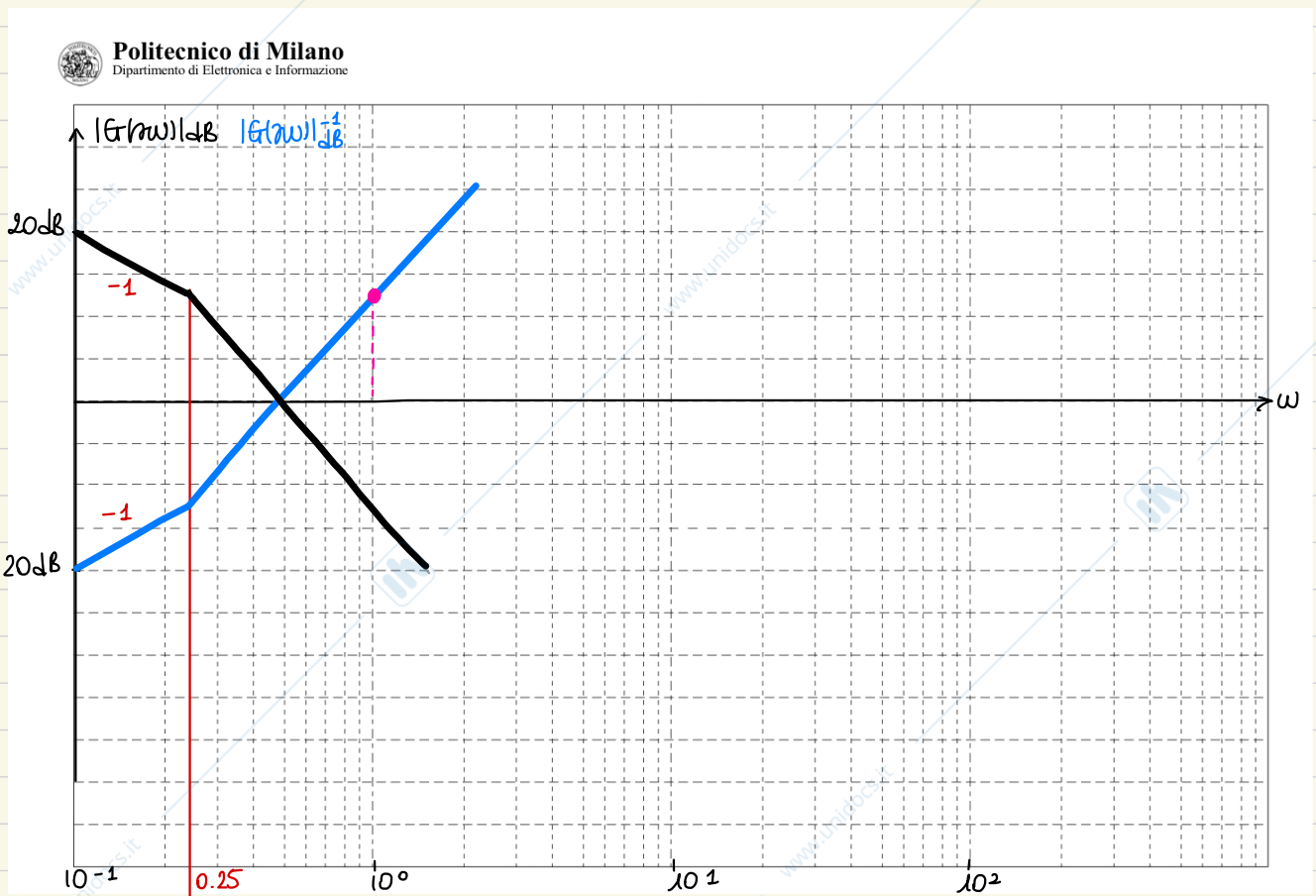
$$|Q(j\omega)| \approx \begin{cases} |G(j\omega)|^{-1} & \omega \ll w_c \\ |R(j\omega)| & \omega \gg w_c \end{cases}$$

considerato che $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$ per:

(a) $y^o(t) = \sin(t)$, la pulsazione caratteristica del riferimento è $1 \ll \omega_c$ e quindi posso sfruttare l'approssimazione $|Q(j\omega)| \approx |G(j\omega)|^{-1}$ e quindi applicare il **teorema delle risposte in frequenza**, ottenendo così: $|u_\infty| \approx |G(j\omega)|^{-1}$

Guardando il diagramma di Bode sottostante si ha $|G(j\omega)|_{dB}^{-1} \approx 12.5 \text{ dB} \rightarrow |Q(j\omega)| \approx 4.2$

$$|u_\infty| = 4.2$$



si noti che:

$$G(s) = \frac{1}{s(1+\omega_c s)} \rightarrow |G(j\omega)| = 20 \log |1| - 20 \log |j\omega| - 20 \log |1 + j\omega/\omega_c| = 20 \text{ dB}$$

(b) $y^o(t) = \sin(100t)$, la pulsazione caratteristica del riferimento è $100 \gg \omega_c$ e quindi posso approssimare $|Q(j\omega)| \approx |R(j\omega)|$ e quindi applicare il **teorema delle risposte in frequenza**, ottenendo così: $|u_\infty| \approx |R(j\omega)|$

Guardando il diagramma di Bode sottostante si nota che $|R(j\omega)|_{dB} \approx 69 \text{ dB}$

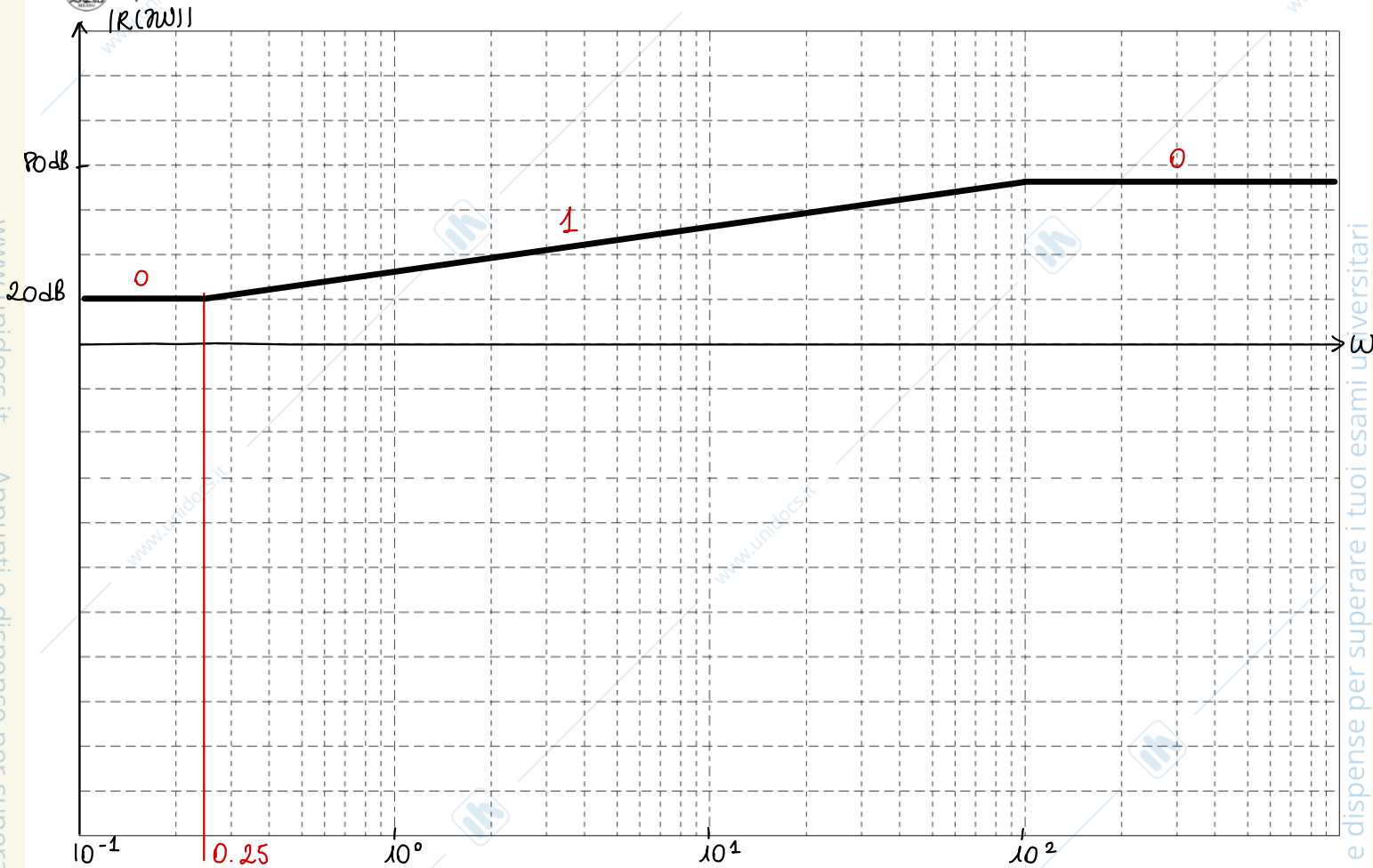
Quindi:

$$|R(j\omega)| \approx 2820 \rightarrow |u_\infty| = 2820$$

l'ingolarita' isolate
e quindi mi aspetto di
essere a -3dB dall'antintoc



Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione



(4) Il ritardo influenza solo la fase della $L(s)$ e quindi quello che dobbiamo fare, dato che ω_c , P e μ non cambiano, è calcolare il margine di fase e trovare τ tale per cui $\varphi_m > 0^\circ$.

$$\rightarrow \varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| = 180^\circ - \underbrace{|\tilde{L}(j\omega_c)|}$$

$$\text{con } \tilde{L}(j\omega_c) = L(j\omega_c)e^{-\tau j\omega_c}$$

$$\text{ci noti che } \tilde{L}(j\omega_c) = \underbrace{L(j\omega_c)}_{-95.7^\circ} - \omega_c \tau \cdot \frac{180}{\pi} = -95.7^\circ - \frac{1800}{\pi} \tau$$

dove questa quantità
è introdotta per portare tutto in radianti

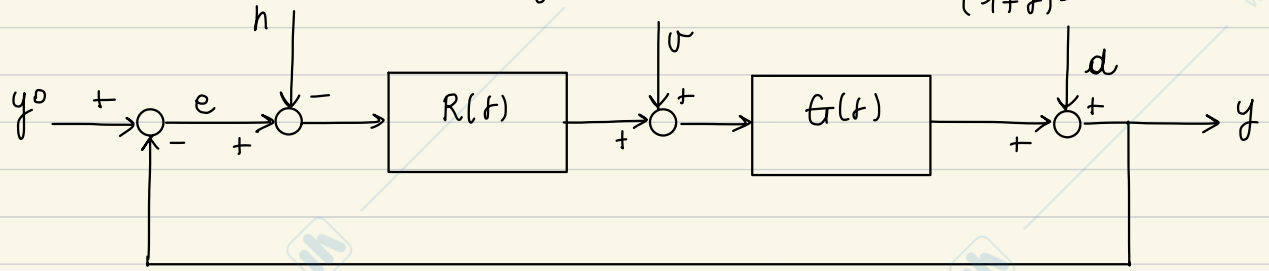
$$\text{Affinché } \varphi_m > 0^\circ \Rightarrow 95.7^\circ + \frac{1800}{\pi} \tau < 180^\circ$$

$$\rightarrow \frac{1800}{\pi} \tau < \varphi_m^L$$

$$\Rightarrow \tau < \frac{\varphi_m^L \pi}{1800} = 0.1671 \text{ s}$$

Esercizio 2

Si consideri lo schema di controllo in figura, in cui $G(s) = 3 \frac{(1-0.1s)}{(1+s)^2}$.



(1) Studiare la stabilità del sistema retroazionato quando

(a) $R(s) = 1$

(c) $R(s) = \frac{s+1}{3s(1-0.1s)}$

(b) $R(s) = \frac{s+1}{3s}$

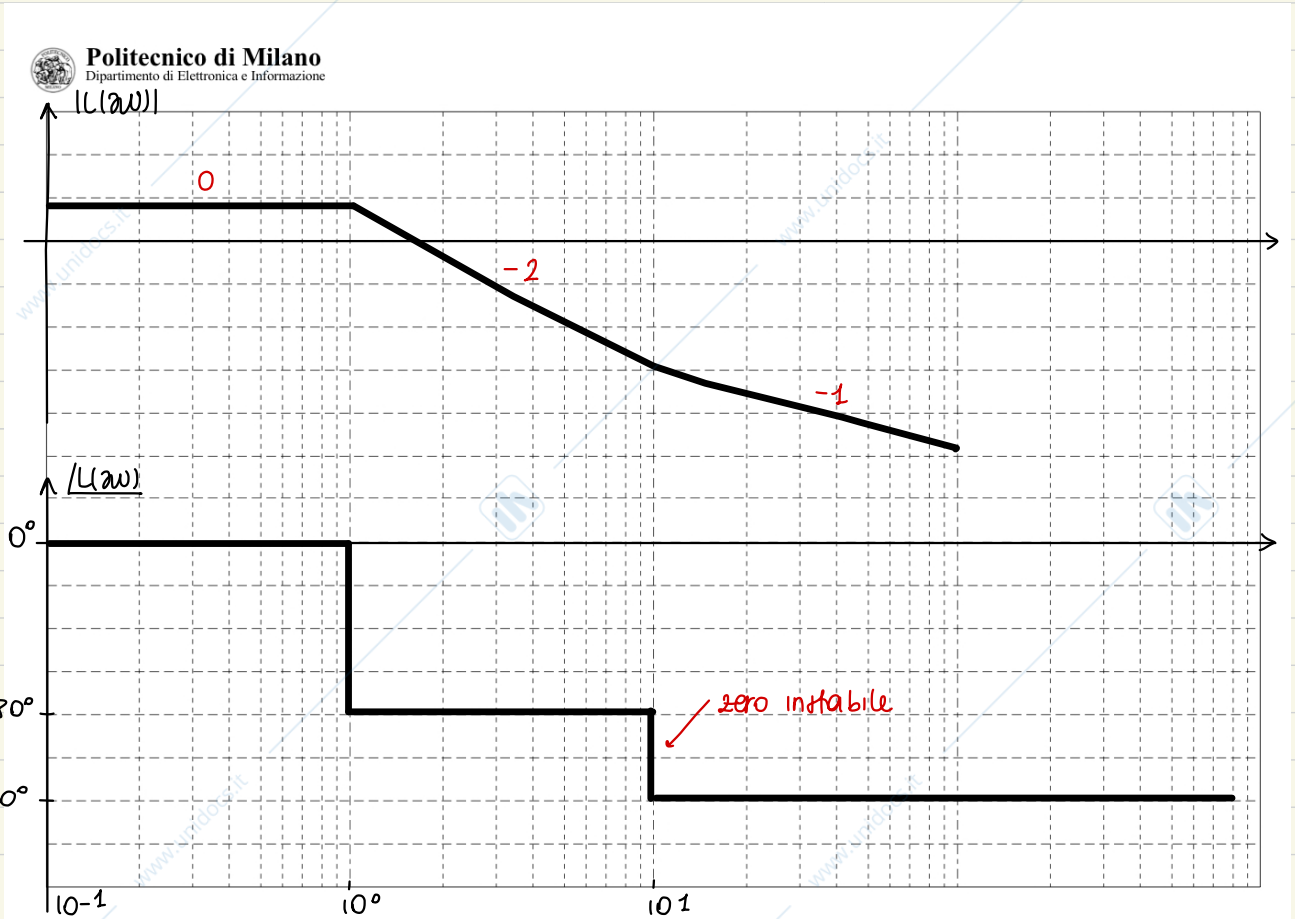
(2) Per ciascuno dei regolatori considerati al punto precedente calcolare il valore dell'errore a regime quando $y^0(t) = t \cos t$, $d(t) = \sin(0.1t)$ e $n(t) = vt = 0$.

(3) Quale regolatore, tra quelli considerati, garantisce una maggior precisione dinamica?

(1) la funzione di scelta:

(a) $U(s) = G(s)$ che è già in forma di Bode.

- è di tipo $\nu = 0$
- ha guadagno $\mu = 3$ ($\mu_{dB} \approx 9.5 dB$)
- ha uno zero in $z = 10$ (instabile)
- ha un doppio polo in $p = -1$ (stabile)



$$P=0$$

esiste ed è unica la pulsazione ω_c

} posso applicare il criterio di Bode.

In particolare, notando che le singolarità sono isolate, posso dedurre dal diagramma di Bode asintotico che $\omega_c \approx 1.5 \frac{\text{rad}}{s}$.

Dato che $\mu > 0$, devo quindi calcolare il margine di fase:

$$\varphi_{\mu} = 180^{\circ} - |\varphi_c|$$

$$\angle L(j\omega_c) = \angle G(j\omega_c) = -\text{atg}(0.1\omega_c) - 2\text{atg}(\omega_c) \approx -121.2^{\circ}$$

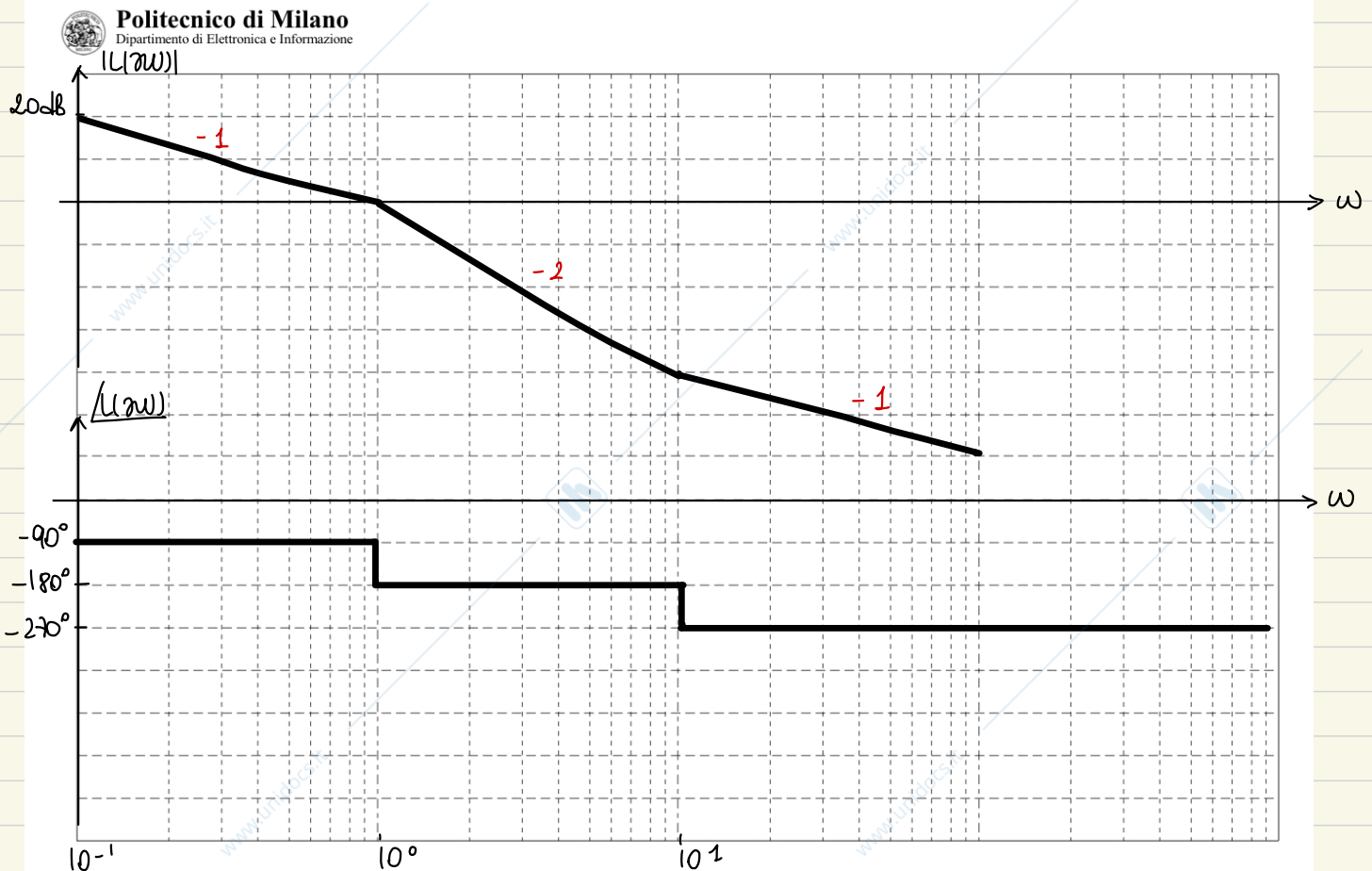
$\Rightarrow \varphi_{\mu} \approx 58.9^{\circ} > 0^{\circ} \rightarrow$ il sistema retroazionato è **ASINTOTICAMENTE STABILE**

$$(b) \quad L(s) = \frac{(1-0.1s)}{s(s+1)}$$

la funzione di trasferimento:

- è di tipo $g=1$
- ha guadagno generalizzato $\mu = L(0) \neq 0 = 1$
- ha uno zero in $z=10$ (instabile)
- ha un polo in $p=-1$ (stabile)

$$\left. \right\} |L(j\omega)|_{dB} = 20 \log |\mu| - 20 \log |j\omega| = 20 \text{ dB}$$



Anche in questo caso, $P=0$ ed esiste ed è unica la pulsazione di attraversamento dell'asse a 0dB ($\omega_c \approx 1 \text{ rad/s}$). Quindi posso applicare il criterio di Bode. In particolare, dato che $\mu > 0$, devo solo verificare che $\varphi_{\omega} > 0^\circ$

$$\rightarrow \varphi_{\omega} = 180^\circ - |\varphi_c| \quad \text{dove:} \quad \varphi_c = \angle(L(j\omega_c)) = -\text{atg}(0.1\omega_c) - 90^\circ - \text{atg}(\omega_c) \approx -140.7^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi_{\omega} \approx 180^\circ - 140.7^\circ = 39.3^\circ > 0$$

Il sistema retroazionato è quindi **ASINTOTICAMENTE STABILE**

(c)

$$U(s) = R(s)G(s) = \frac{s+1}{s+1-0.1s} \cdot \frac{s(1-0.1s)}{(s+1)^2}$$

In questo caso ho una **cancellazione critica** e posso concludere che il sistema retroazionato è **INSTABILE**.

(2) Questo punto (ed il prossimo) vengono risolti considerando solo $R(s)$ dei punti (a) e (b) (ovvero quegli $R(s)$ tali per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile).

Dato che il sistema è lineare possiamo applicare il **principio di sovrapposizione degli effetti**, e quindi:

$$e_{\infty} = l_{\infty} y^0 + e_{\infty d}(t) \quad (\text{noi per siamo interessati solo al valore del modulo})$$

Si noti che:

- $E y^0(t) = f(t) y^0(t) \rightarrow$ uso il TVF
- $E d(t) = -f(t) D(t) \rightarrow$ uso il teorema della risposta in frequenza e, per farlo, frutto l' approssimazione

$$|f(j\omega)| \approx \begin{cases} |L(j\omega)|^{-1} & \omega \ll \omega_c \\ 1 & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

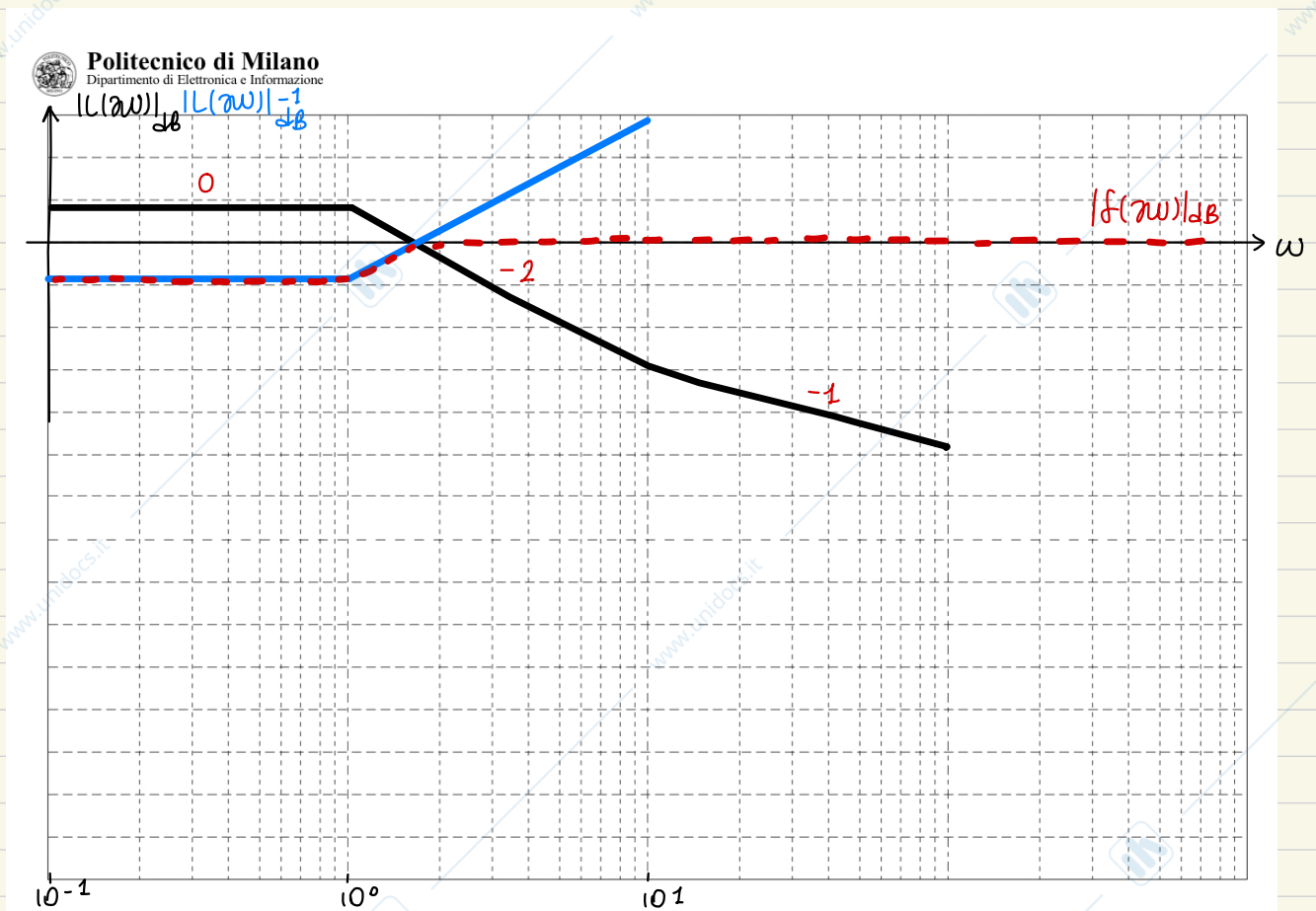
(a)

$$E y^0(t) = \frac{1}{1+L(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{(1+s)^2}{(1+s)^2 + 3(1-0.1s)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\text{TVF} \quad l_{\infty} y^0 = \lim_{s \rightarrow 0} s E y^0(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1+s)^2}{(1+s)^2 + 3(1-0.1s)} = \frac{1}{3}$$

Guardando invece $d(t)$ si nota come $0.1 \ll \omega_c$ ($\omega_c \approx 1.5 \text{ rad/s}$) e quindi si

potrà calcolare $|f(j\omega.1)| \approx |L(j\omega.1)|^{-1}$



Dal diagramma si nota come $|L(j\omega.1)|_{dB} \approx -9.5 \text{ dB} \rightarrow |L(j\omega.1)| \approx 0.34$

$$\rightarrow |e_{\infty}| = |e_{\infty y^0} + e_{\infty d(t)}| \leq |e_{\infty y^0}| + |e_{\infty d(t)}| < 0.33 + 0.34 = 0.67$$

(b)

$$E_{y^0}(t) = \frac{f(1+t)}{f(1+t) + (1-0.1t)} \cdot \frac{1}{f} = \frac{(1+t)}{f(1+t) + (1-0.1t)}$$

TVF $e_{\infty y^0} = \lim_{t \rightarrow 0} f E_{y^0}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(1+t)}{f(1+t) + (1-0.1t)} = 0$ (si poteva già dedurre dal fatto che ha $y^0(t)$ che $f(t)$ sono di tipo 1)

Anche in questo caso, guardando $d(t)$, si nota che $0.1 < \omega c$ ($\omega c = 1 \text{ rad/s}$). Quindi si deve utilizzare nuovamente l'approssimazione $|f(j\omega.1)| \approx |L(j\omega.1)|^{-1}$.

Dato che $|L(j\omega.1)|_{dB} = 20 \text{ dB}$ (l'abbiamo calcolato al punto (1)), possiamo dire direttamente che $|L(j\omega.1)|^{-1}_{dB} = -20 \text{ dB} \rightarrow |L(j\omega.1)|^{-1} = 0.1$

$$\rightarrow |e_{\infty}| = |e_{\infty d(t)}| < 0.1$$

(3)

(a)

Dato che $\varphi_u \leq 75^\circ$ allora posso approssimare $F(t)$ come:

$$F(t) \approx \frac{\omega_c^2}{f^2 + 2\xi\omega_c f + \omega_c^2} \quad \text{con} \quad \xi = \frac{\varphi_u}{100}$$

In questo caso $\omega_c = 1.5 \text{ rad/s}$ e $\xi \approx 0.6$ (dato che $\varphi_u = 58.9^\circ$). Quindi, sfruttando le proprietà ritardi con questa funzione di trasferimento abbiamo:

$$\tau_a \approx \frac{5}{\xi\omega_c} \approx 5.5 \text{ s}$$

$$f\% = 100 e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 9.5\%$$

(b)

Dato che $\varphi_u \leq 75^\circ$ ($\varphi_u \approx 60^\circ$) anche in questo caso posso sfruttare la stessa approssimazione precedente con:

$$\xi \approx 0.4 \quad \text{e} \quad \omega_c = 1$$

$$\rightarrow \tau_a \approx \frac{5}{\xi\omega_c} \approx 12.5 \text{ s}$$

$$\rightarrow f\% = 100 e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \approx 25.4\%$$

\Rightarrow Data la maggior sovrallungazione percentuale e il tempo di arrestamento maggiori ottenuti nel caso (b) rispetto al caso (a), dinamicamente la configurazione (a) è migliore.