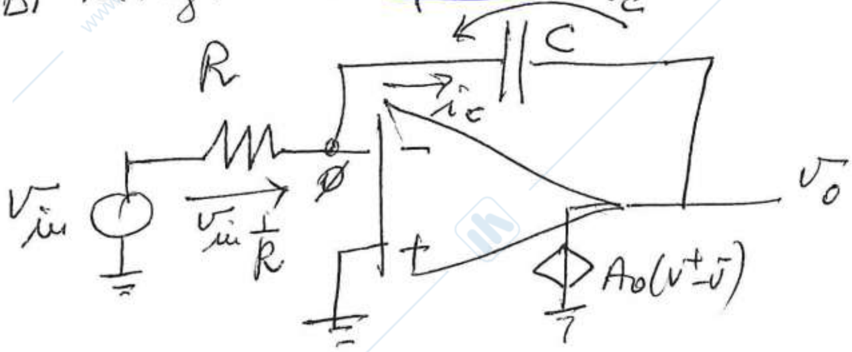
# INTEGRATORE INVERTENTE

Integratore "puro"




guadagno ideale
$A_0 \to \infty$
$(v^+ - v^-) \to \phi$

Nel dominio del tempo:

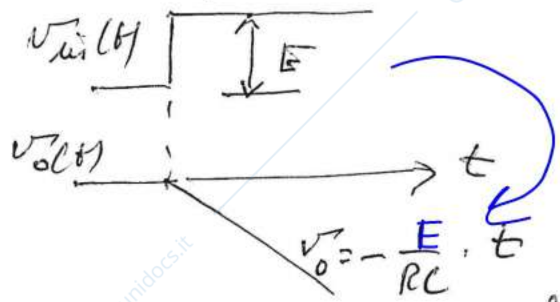
$$i_C = v_{in}\frac{1}{R} = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$\hookrightarrow v_C(t) - v_C(0) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C\,dt = \boxed{\frac{1}{RC}\int_0^t v_{in}(t)\,dt}$$

$$\hookrightarrow \boxed{v_0(t)} = -v_C(t) = -v_C(0) - \frac{1}{RC}\int_0^t v_{in}\,dt$$

cond. iniziale su C $(t=0)$ C.I.

Ad esempio:



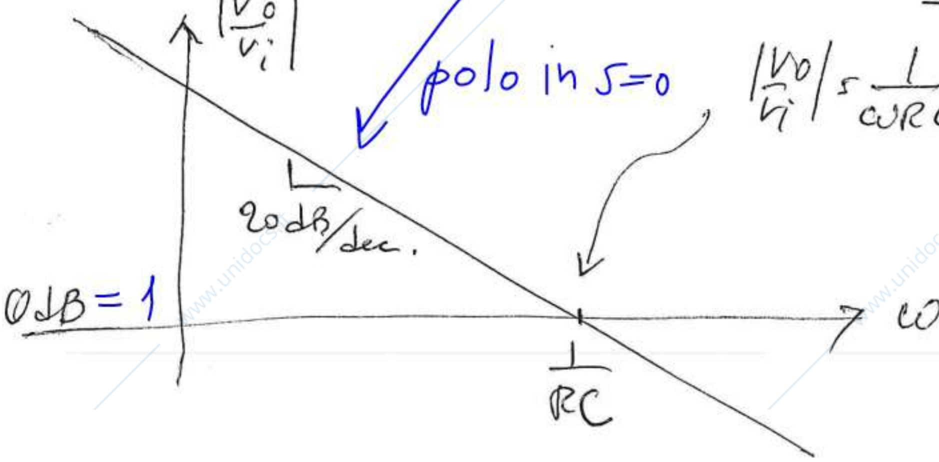

$\int sca(t)dt = ramp(t)$

Nel dominio della frequenza: è una classica configurazione invertente $\left(Z_1 = R,\ Z_2 = \frac{1}{sC}\right)$:

$$\frac{V_0}{V_{in}}(s) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{1}{sCR} \doteq \frac{1}{s} \rightarrow \text{integratore puro}$$

polo in $s=0$

$$\left|\frac{V_0}{V_i}\right| = \frac{1}{\omega RC} = 1 \rightarrow \boxed{\omega = \frac{1}{RC}}$$

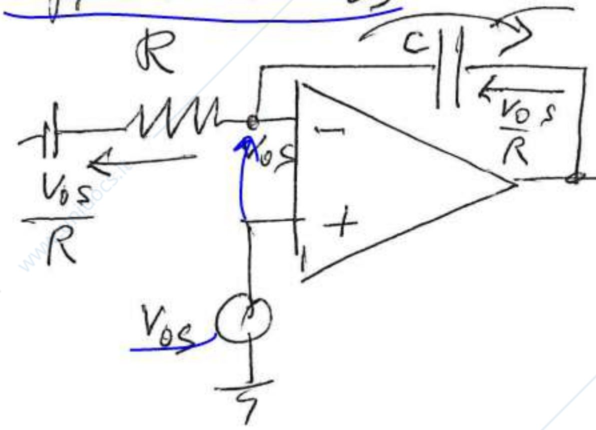



A bassa freq.
$\omega \to 0$ $C \to$ C.A.
↳ mettiamo una res. in parallelo

pag. 3

La risposta in frequenza di un integratore puro ($\div \frac{1}{s}$) ovviamente diverge per $\omega \to 0$.
Basterebbe quindi una piccola componente DC nel segnale di ingresso $v_{in}$ per far saturare $v_o$ alle tensioni di alimentazione.

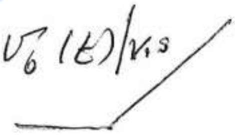
## Effetti di $V_{OS}$



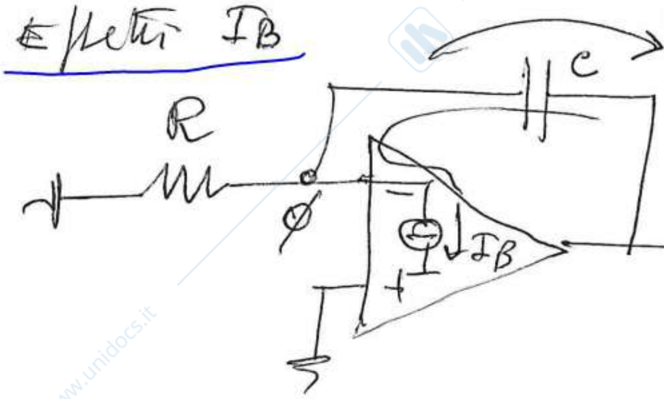

$$v_C = \cancel{v_{C0}} + \frac{1}{C}\int\left(\frac{V_{OS}}{R}\right)dt \quad (v_{C0}=0)$$

$$v_O = V_{OS} + \frac{1}{RC}\underbrace{\boxed{\int V_{OS}\,dt}}_{= V_{OS}\cdot t}$$

$v_O(t)|_{V_{OS}}$

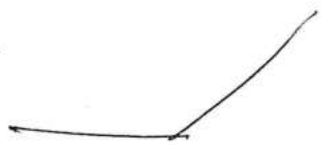


## Effetti $I_B$



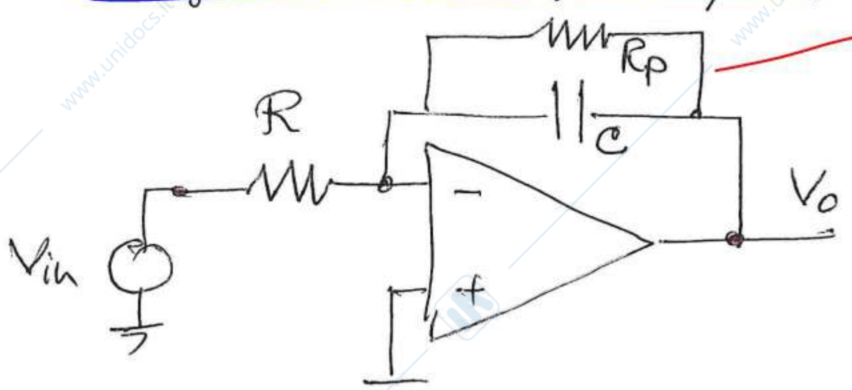

$$v_C = \cancel{v_{C0}} + \frac{1}{C}\underbrace{\int I_B\,dt}_{I_B\cdot t} \quad (v_{C0}=0)$$

$$v_o = \frac{1}{C} I_B \cdot t$$



$\Rightarrow$ Si cerca di ridurre il guadagno in DC dell'integratore, in modo da limitare l'effetto di $v_{in}|_{DC}$, $V_{OS}$, $I_B$ —

## Integratore "modificato"/"approssimato"




$$Z_p = R_p // \frac{1}{sC} = \frac{R_p}{1+sR_pC}$$

in questo modo se $\omega \to 0$, la resistenza su quel ramo non diverge ($C \to$ C.A, ma poi c'è R) in //

Si vede subito che, per $\omega = 0$, C è aperta e $R_p$ limita il valore dell'impedenza $Z_p$ (che altrimenti diventa $\infty$!)

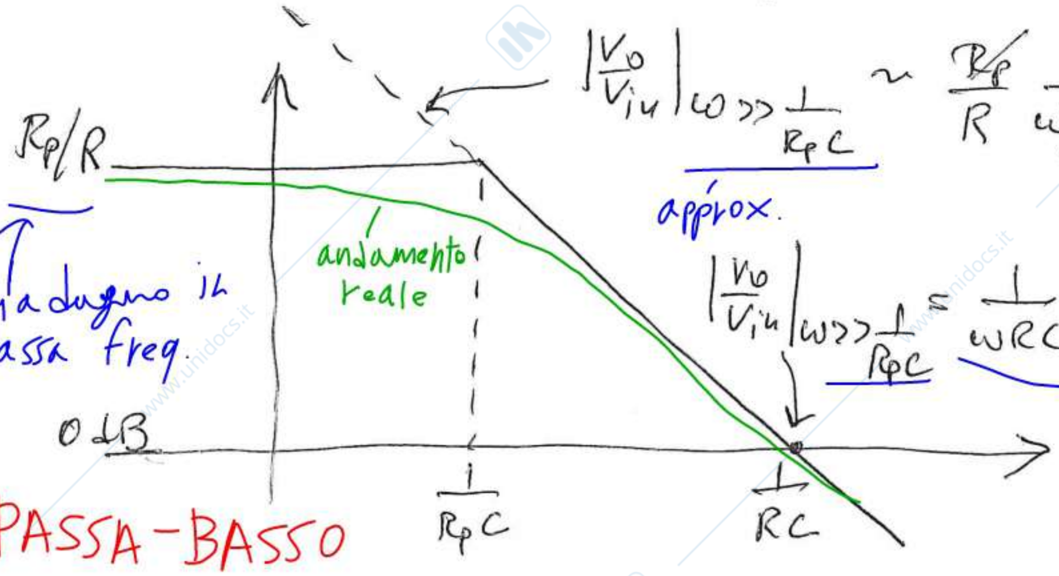
$$Z_p = R_p // \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{R_p} + sC} = \frac{R_p}{1+sR_pC}$$

→ Calcolo G(s) (dominio della frequenza):

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = -\frac{Z_p}{R} = -\frac{R_p}{1+sR_pC}\frac{1}{R} = -\frac{R_p}{R}\frac{1}{1+sR_pC}$$

$$\left|\frac{V_o}{V_{in}}\right|_{\omega \gg \frac{1}{R_pC}} \simeq \frac{R_p}{R}\frac{1}{\omega R_p C} = \boxed{\frac{1}{\omega RC}}$$

approx. — integratore "puro"




PASSA-BASSO

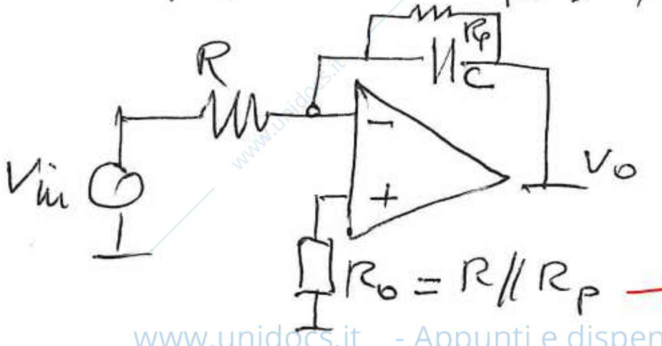
$$\left|\frac{V_o}{V_{in}}\right|_{\omega \gg \frac{1}{R_pC}} = \frac{1}{\omega RC} = 1 \rightarrow \boxed{\omega = \frac{1}{RC}}$$

inizia a dominare l'impedenza del condensatore nel parallelo

- Integrazione limitata per $\omega > \frac{1}{R_pC}$

- $V_o|_{V_{os}} = V_{os}\left(1+\frac{R_p}{R}\right)$, $V_o|_{I_B} = R_p I_B$ (opportuno inserire una $R_p$ nel ramo non invertente per fare la compensazione).

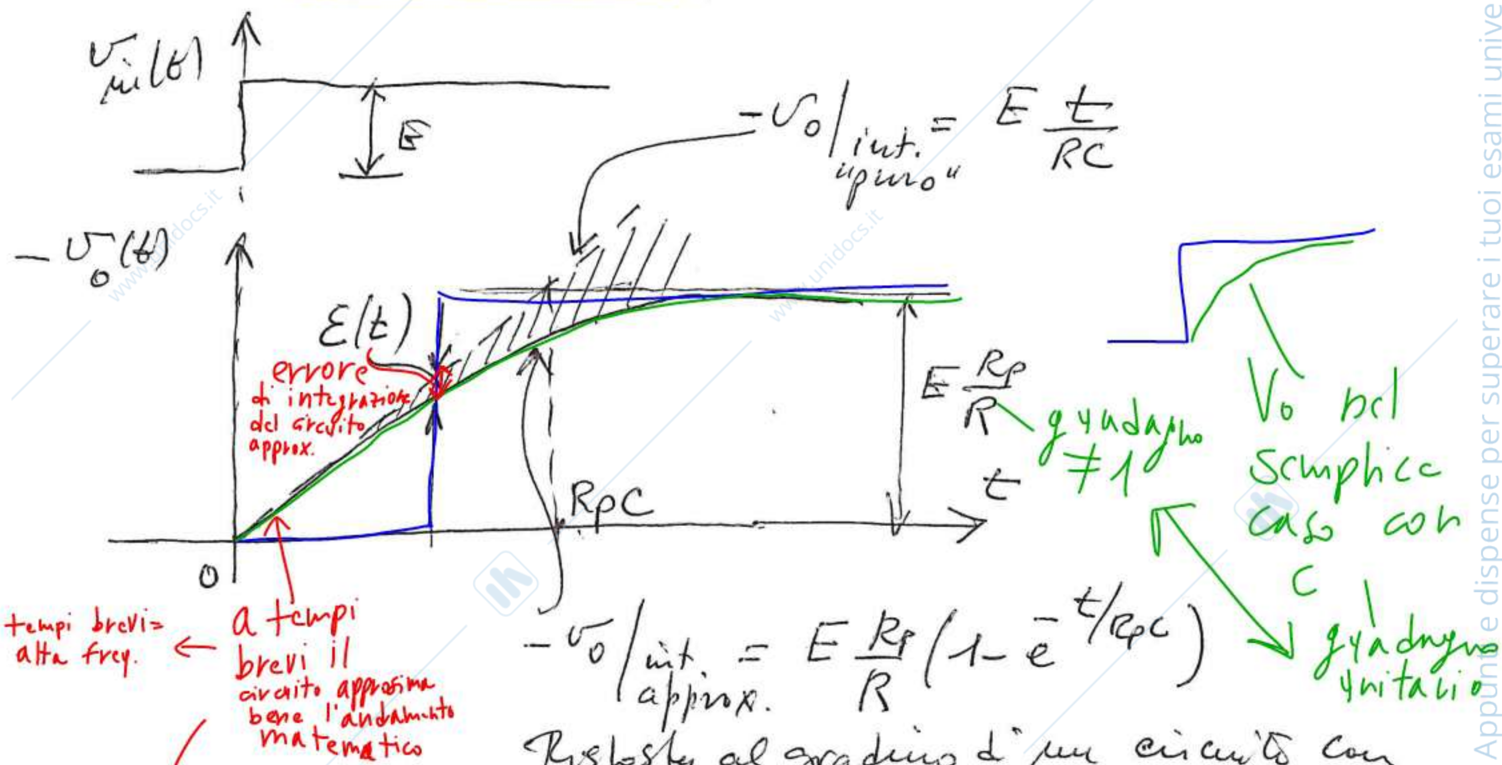
In DC (polarizz.) $C \to$ C.A




$R_0 = R // R_p$ → Compensa l'effetto delle correnti di bias $I_B$ riducendone l'effetto in uscita

- Come scelgo la frequenza del polo $\frac{1}{R_pC}$? $R_p$?
  ↳ in base ~~alla~~ al segnale da integrare e in modo che $V_{os}$, $I_B$ non "pesino" troppo.

- Risposta al gradino — NEL DOMINIO DEL TEMPO




$$-v_o\Big|_{\substack{int.\\ approx.}} = E\frac{R_p}{R}\left(1-e^{-t/R_pC}\right)$$

Risposta al gradino di un circuito con FdT passa basso con polo $\frac{1}{R_pC}$ e guadagno in DC $= \frac{R_p}{R}$ (analogo ad un circuito RC)

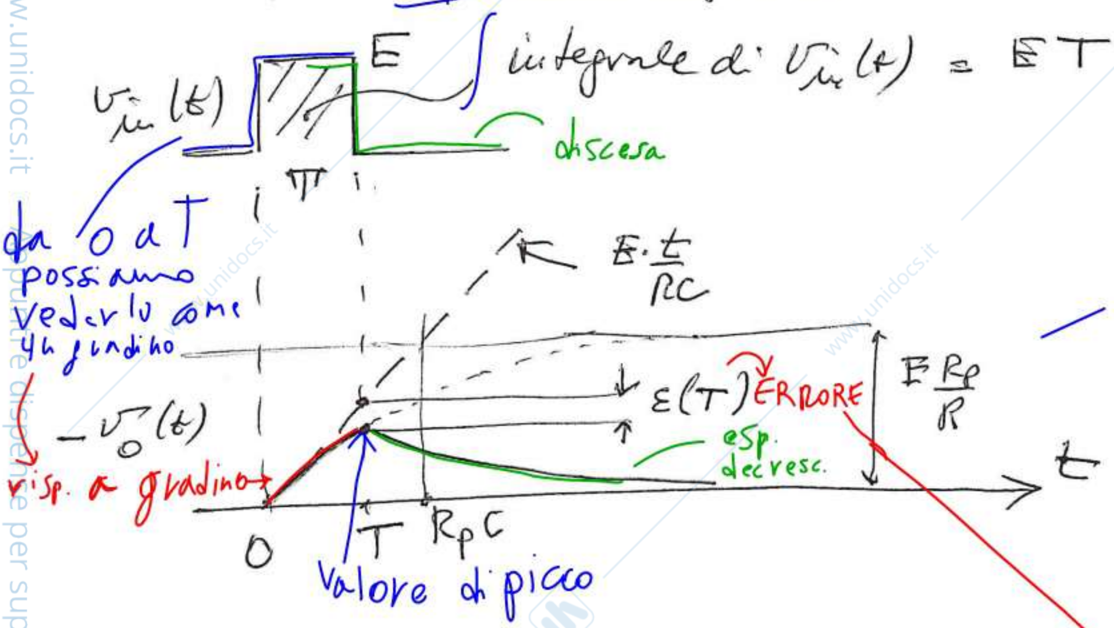
$\mathcal{E}(t)$ = errore che l'integratore approssimato compie rispetto al caso "puro".

- Si vede che per tempi brevi (rispetto a $R_pC$), l'errore è piccolo. È la conferma di quanto abbiamo già visto nel grafico di Bode, cioè che l'integratore è quello attesa per $\omega > \frac{1}{R_pC}$
- Quindi aumentando $R_p$, nella risposta al gradino aumenta la costante di tempo $R_pC$ e quindi l'intervallo temporale in cui l'errore di integrazione è basso.

oppure posso dire, specularmente, che per $R_p$ crescente aumenta l'intervallo di frequenze corrispondente all'integrazione pura.

Es.

Applichiamo ad un caso comune: integrazione di un impulso rettangolare.




$$v_o(T)\Big|_{\substack{\text{int.}\\ \text{ideale}}} = -E\frac{T}{RC}$$

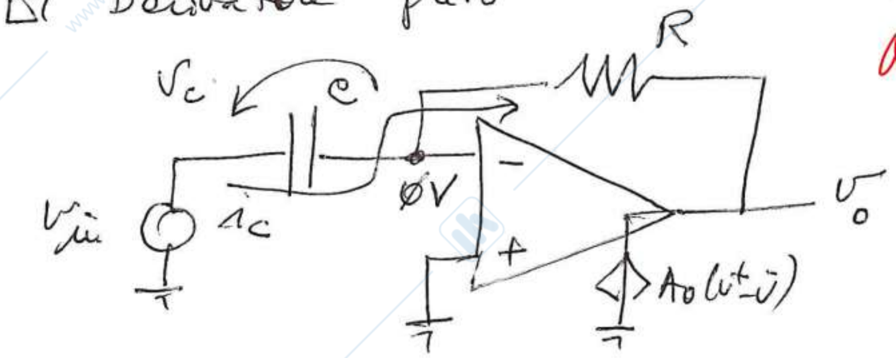
$$v_o(T)\Big|_{\substack{\text{int.}\\ \text{approx.}}} = -E\frac{R_p}{R}\left(1-e^{-T/R_pC}\right).$$

$$\varepsilon(T) = E\frac{T}{RC} - E\frac{R_p}{R}\left(1-e^{-T/R_pC}\right)$$ errore di integrazione dovuto a $R_p$ finita.

# DERIVATORE INVERTENTE

→ problema speculare all'integratore

☑ Derivatore "puro"




guadagno ideale ($A_0 \to \infty$)

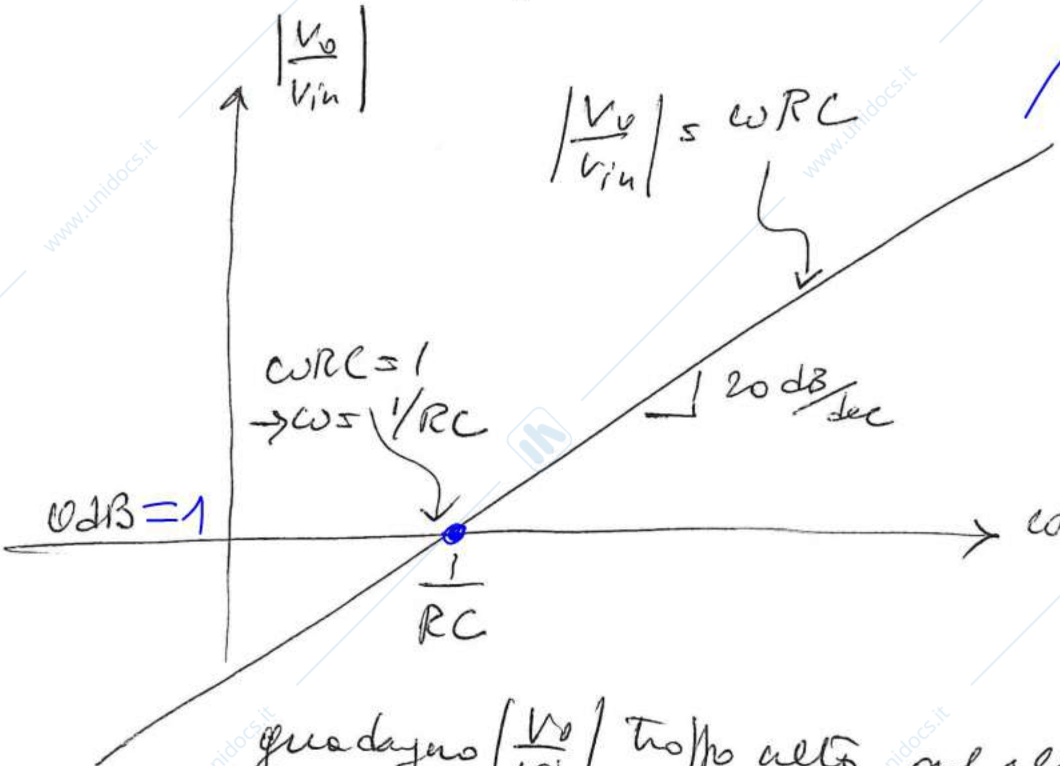
Nel dominio del tempo:

$$i_c = C \frac{dV_c}{dt} = C \frac{dV_{in}}{dt}$$

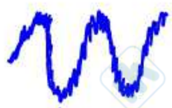
↳ $V_o = -R i_c = -RC \dfrac{dV_{in}}{dt}$ derivatore "puro"

Nel dominio della frequenza; $s = j\omega$

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R}{1/sC} = -sRC \quad (\propto s)$$




diverge con $\omega$



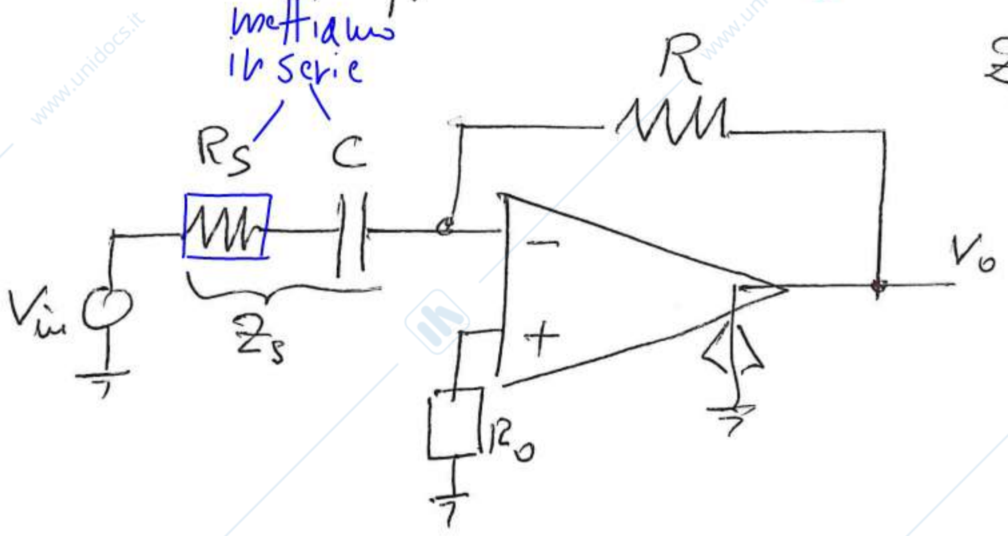
guadagno alto
↳ esalterà anche le componenti di rumore che si estendono ad alta freq.

guadagno $\left|\frac{V_o}{V_{in}}\right|$ troppo alto ad alte freq. → rende non adatto il derivatore

→ amplifica disturbi/rumore ad alte frequenze oltre la banda di freq. di interesse del segnale

→ Riduciamo guadagno ad alta frequenza

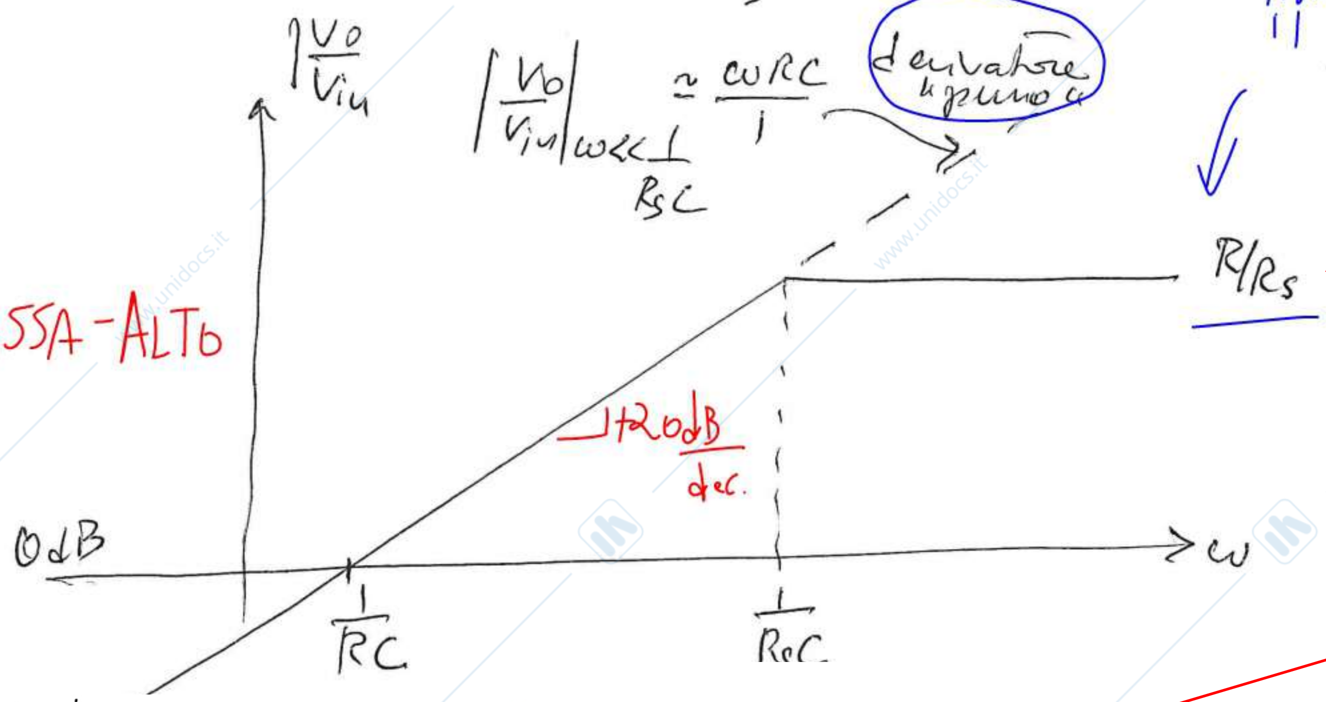
# Derivatore "approssimato" → con guadagno non divergente




$$Z_s = R_s + \frac{1}{sC} = \frac{1+sR_sC}{sC}$$

Per $\omega \to \infty$ ora $Z_s$ non scende sotto $R_s$ (mentre $|Z_c| = \frac{1}{\omega C} \to 0$) e ciò limita il guadagno ad alte frequenza.

$$\frac{V_0}{V_{in}}(s) = -\frac{R}{Z_s} = -\frac{sRC}{1+sR_sC}$$



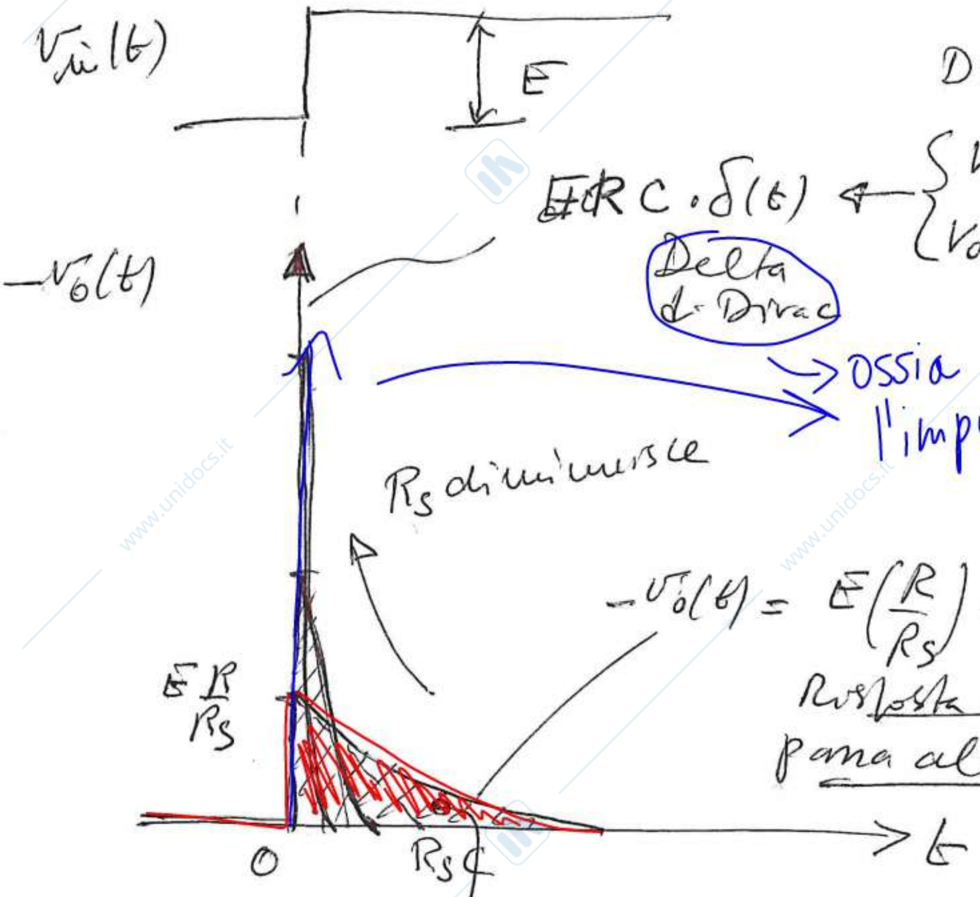

$\omega \geq \frac{1}{R_sC}$ → trasc.

↳ $\left|G\left(j\cdot\frac{1}{R_sC}\right)\right|_{dB} = \underbrace{20\log|RC|}_{|\mu|} \underbrace{- 20\log\left(\frac{1}{R_sC}\right)}_{g} - 20\log\left(\left|\sqrt{1+\omega^2T^2}\right|\right)$ , $\omega = \frac{1}{R_sC} = \frac{1}{|T|}$

↳ $\left|G\left(j\cdot\frac{1}{R_sC}\right)\right|_{dB} = 20\log\left(\frac{R\cdot\frac{1}{R_s}}{1}\right) = \left|\frac{R}{R_s}\right|_{dB}$

La derivazione è limitata alle frequenze $< \frac{1}{R_sC}$

# ☑ Risposta ad un gradino




Derivazione "pura"

$$\left\{\begin{array}{l} V_{in}(s) = \frac{E}{s} \\ V_o(s) = -\frac{E}{\cancel{s}} \cdot \cancel{s}RC = -ERC \end{array}\right. \rightarrow ERC \cdot \delta(t)$$

Delta di Dirac

ossia l'impulso

$$-V_o(t) = E\left(\frac{R}{R_s}\right) e^{-t/R_sC}$$

Risposta al gradino di un passa alto, polo $\omega = \frac{1}{R_sC}$, e guadagno ad AF pari a $R/R_s$.

Area sottesa dall'uscita $V_o(t)$

$$E\,\frac{R}{\cancel{R_s}} \times \underbrace{\cancel{R_s}C}_{\text{COST. DI TEMPO}} = \boxed{ERC}$$

tende a $ERC\,\delta(t)$ se $R_s$ tende a 0.

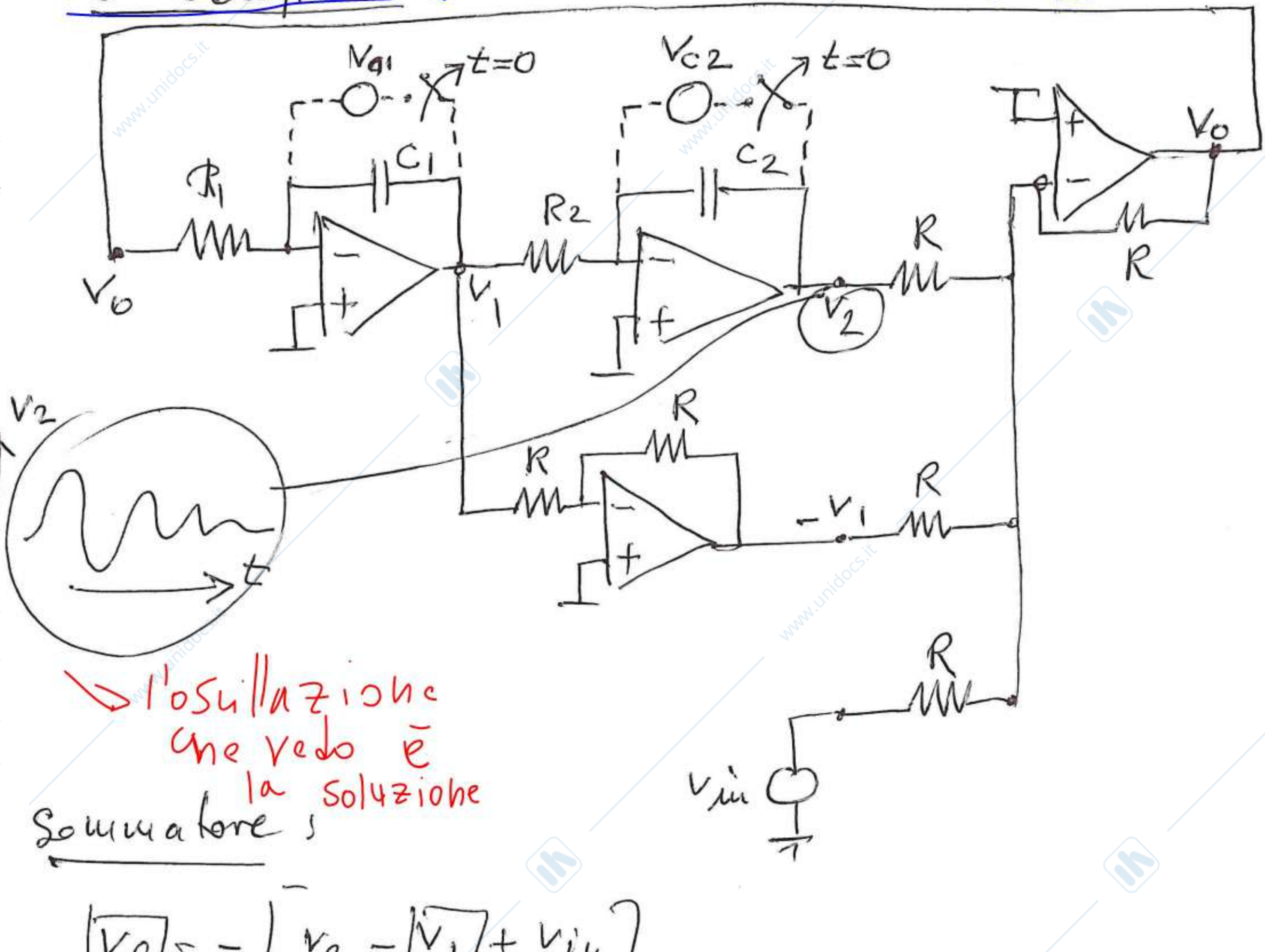
Man mano che $R_s$ diminuisce (al limite) l'esponenziale tende all'impulso (delta di Dirac)

# CALCOLATORE ANALOGICO

Costruisco un circuito basato sull'eq. diff. che voglio risolvere

Un circuito è descritto da un'equazione differenziale.
Volendo risolvere un'equazione differenziale, realizzo un circuito descritto proprio dall'equazione d'interesse.
Accendendo il circuito, ottengo "sperimentalmente" la soluzione dell'equazione differenziale.

Ad esempio: ← CIRCUITO X RISOLVERE UN'EQ. DEL II ORDINE




l'oscillazione che vedo è la soluzione

Sommatore:

$$\boxed{V_0} = -\left[V_2 - \boxed{V_1} + V_{in}\right]$$

$\to V_0 = -\tau_1 \frac{dV_1}{dt}$ $\qquad \to V_1 = -\tau_2 \frac{dV_2}{dt}$

$$-\tau_1 \frac{d}{dt}\left(-\tau_2 \frac{dV_2}{dt}\right) = -\left[V_2 + \tau_2 \frac{dV_2}{dt} + V_{in}\right]$$

$$\tau_1 \tau_2 \ddot{V}_2 = -\left[V_2 + \tau_2 \dot{V}_2 + V_{in}\right]$$ EQ. DIFF. 2° ORDINE