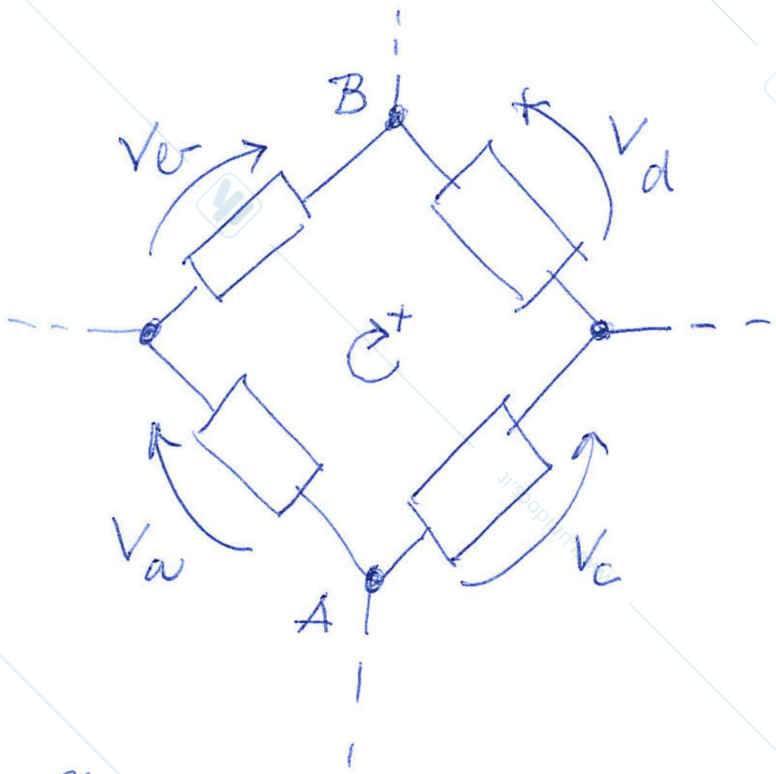
Richiami circuiti lineari
Analisi circuiti con R, C

Fondamenti di Elettronica

A.Castoldi

v1.0

LKT



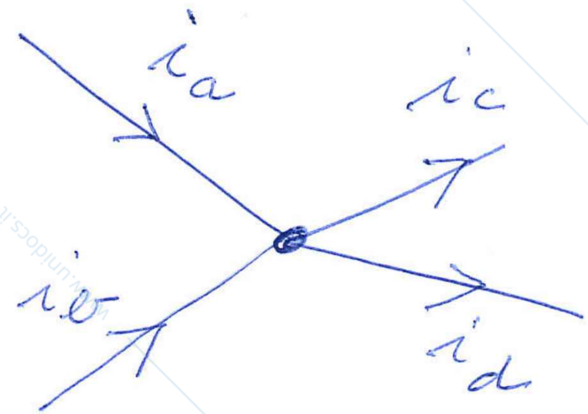
$$\sum_{1}^{n}{}_{k} V_k = \emptyset$$

$\rightarrow V_a + V_b - V_d - V_c = \emptyset$

$\rightarrow \underbrace{(V_a + V_b)}_{\text{D.D.P. TRA } A \text{ e } B} = (V_c + V_d)$

$\Rightarrow$ LA D.D.P. TRA 2 NODI NON DIPENDE DAL CAMMINO FATTO PER RAGGIUNGERLI

LKC



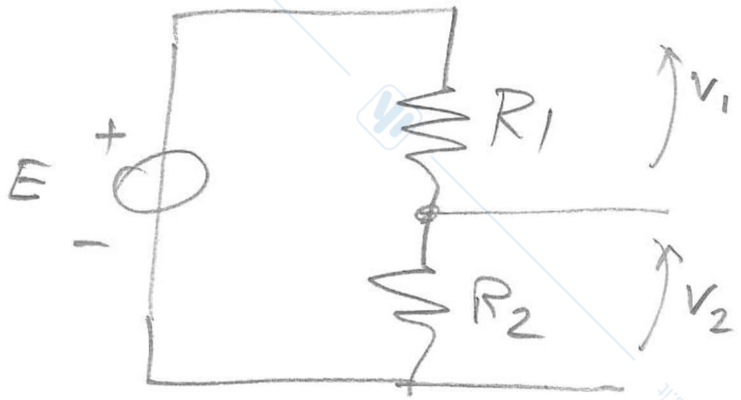
$$\sum_{1}^{n}{}_{k} i_k = \emptyset$$

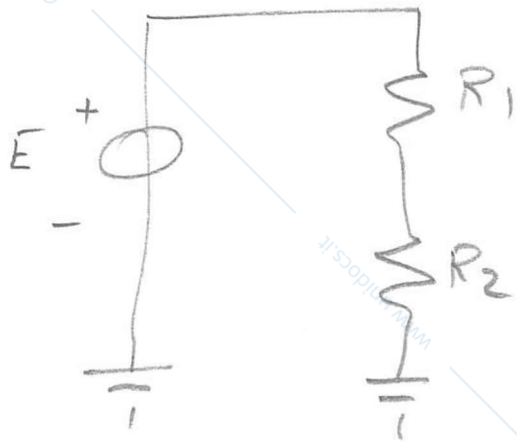
$\rightarrow i_a + i_b - i_c - i_d = \emptyset$

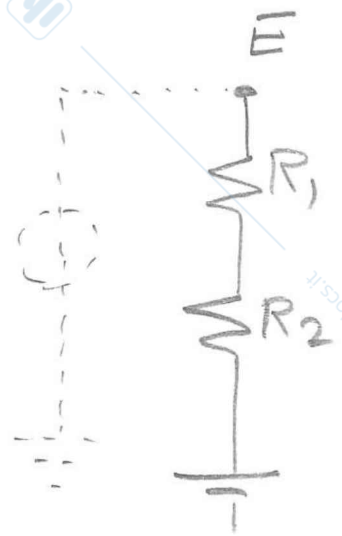
$\rightarrow \underbrace{(i_a + i_b)}_{\text{CORR. ENTRANTE}} = \underbrace{(i_c + i_d)}_{\text{USCENTE}}$

$\Rightarrow$ CONSERVAZIONE DELLA CARICA

PARTITORE DI TENSIONE







$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E$$

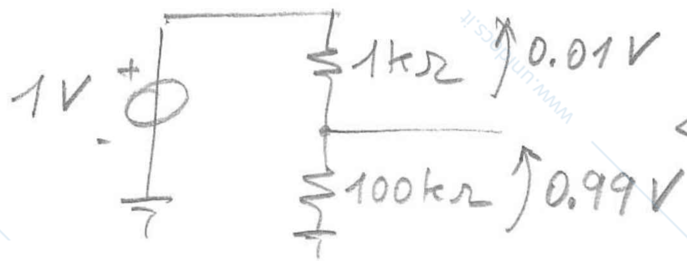
$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

$$\rightarrow \left\| \frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1}{R_2} \right.$$

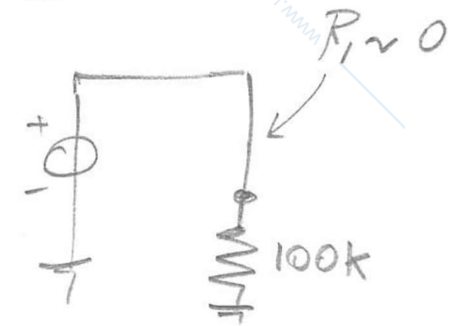
Casi particolari

$R_1 = R_2 \rightarrow V_1 = V_2 = E/2$

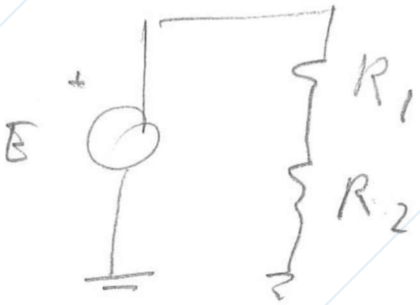
$$R_1 << R_2 \rightarrow \begin{cases} V_1 \simeq \frac{R_1}{R_2} E \simeq 0 \\ V_2 \simeq E \end{cases}$$



$\longleftrightarrow$



$R_1 \ll R_2$



ad es. $1\,k\Omega$

$100\,k\Omega$

$x = \frac{R_1}{R_2} \ll 1$

$$V_1 = E\frac{R_1}{R_1+R_2} = E\frac{R_1/R_2}{R_1/R_2+1} = E\frac{x}{1+x}\Big|_{x\ll 1} \to Ex \to 0$$

$$V_2 = E\frac{R_2}{R_1+R_2} = E\frac{1}{1+R_1/R_2} = E\frac{1}{1+x}\Big|_{x\ll 1} \to E$$

più precisamente:

$$V_2 = E\frac{1}{1+x} = E\Big[1+\underbrace{\Big[-\frac{1}{(1+x)^2}\Big]_{x=0}}_{(-1)}\cdot x + \underbrace{\Big[-\frac{-2}{(1+x)^3}\Big]_{x=0}}_{(+2)}\cdot\frac{x^2}{2}+\dots\Big]$$

$$= E\big[1 - x \,\big|\, + x^2 \dots\big]$$

1° ord.

$$V_2 \simeq E(1-x)$$

$$\varepsilon\% = \left|\frac{E-V_2}{E}\right| \simeq \frac{E - E(1-x)}{E} = \frac{Ex}{E} = x = \frac{R_1}{R_2}$$

$V_1 \sim \varepsilon = \varepsilon\%\,1V = \frac{1}{100}\cdot 1V = 0.01V$

$V_2 \sim 1V - \varepsilon = 0.99V$

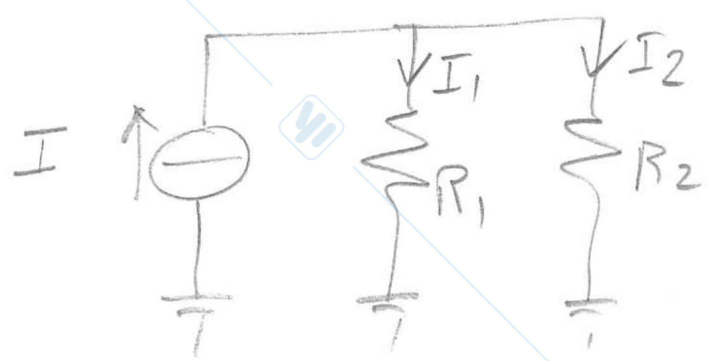
$\Delta = 0{,}0001V$

in realtà: $V_2 = 1V\cdot\frac{100}{101} = 0.9901V$

$V_1 = 0.099V$

$E\cdot x^2 = 1V\left(\frac{1}{100}\right)^2 = 0{,}0001V$!

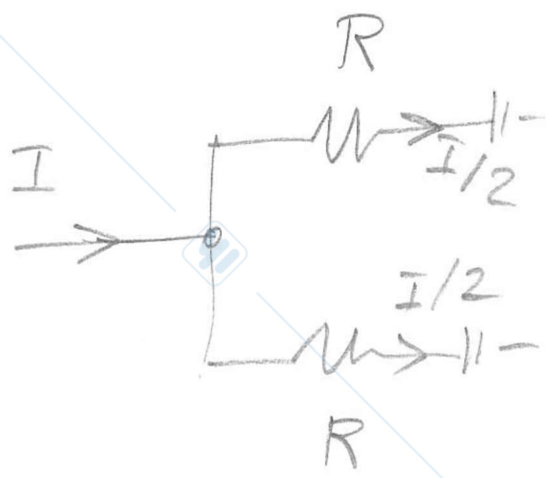
PARTITORE DI CORRENTE

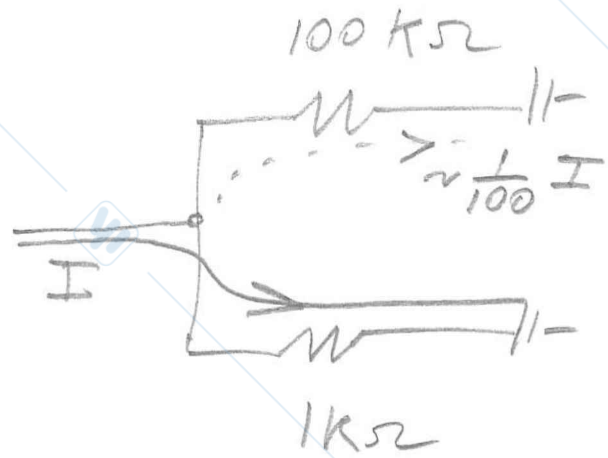


$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{G_1}{G_2}$$

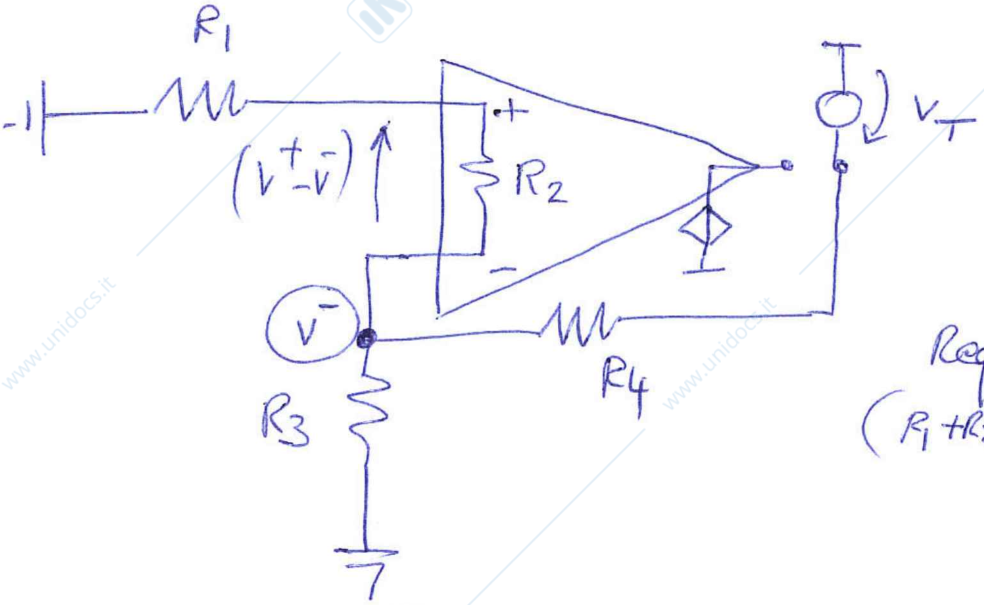


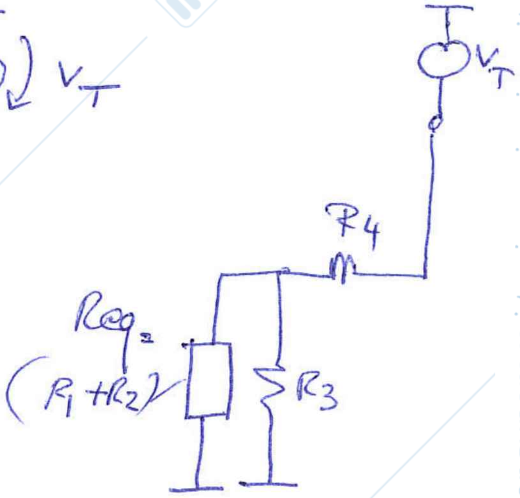


NO PARTITORE DI TENSIONE

↳ DEVE ESSERCI LA STESSA CORRENTE NEI 2 RAMI!

- CALCOLO DEL GUADAGNO D'ANELLO:





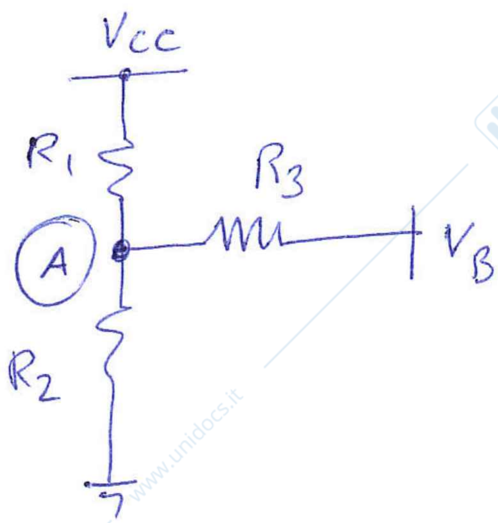
$$v^- = V_T \frac{R_3}{R_3+R_4}$$ NO

$$(v^+ - v^-) = v^- \frac{R_2}{R_1+R_2} = V_T \frac{R_3}{R_3+R_4} \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$v^- = V_T \frac{R_3 /\!/ R_{eq}}{R_3 /\!/ R_{eq} + R_4}$$ $\boxed{\text{Sì}}$

$$(v^+ - v^-) = v^- \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

- ALTRO CASO

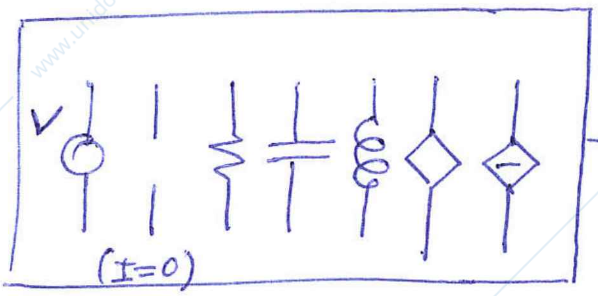


$$V_A \neq V_{CC} \frac{R_2}{R_1+R_2}$$!

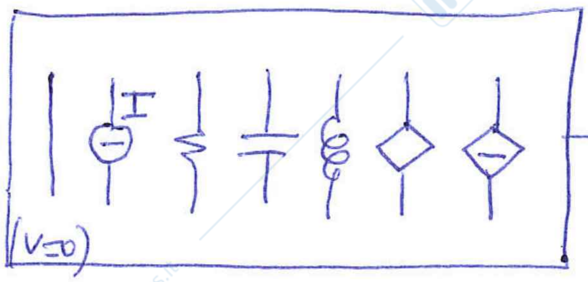
CIRCUITO LINEARE

QUANDO LA PRESENZA CONTEMPORANEA DI 2 CAUSE, C_1 E C_2, CHE SEPARATAMENTE DAREBBERO LUOGO A 2 EFFETTI, E_1 E E_2, HA COME EFFETTO (E_1+E_2), CIOE' LA SOVRAPPOSIZIONE DI E_1 E E_2.

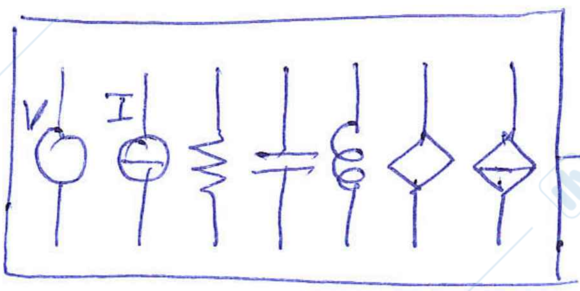
$\Rightarrow$ PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI



$\rightarrow V_0\big|_V$



$\rightarrow V_0\big|_I$



$\rightarrow V_0\big|_{V,I} = V_0\big|_V + V_0\big|_I$

↯ IN GENERALE UN SISTEMA LINEARE (AD ES. UN CIRCUITO) E' DESCRITTO DA UN' EQ. (INTEGRO-) DIFFERENZIALE LINEARE:

UNA TENSIONE O CORRENTE DEL CIRCUITO

$$\frac{d^n}{dt^n}(x) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(x) + \ldots + a_{n-1}(x) + a_0 = f(t)$$

LA "FORZANTE" OVVERO IL GENERATORE DI "INGRESSO"

$$L[x(t)] = f(t)$$

ALLORA, L'OPERATORE L E' LINEARE E POSSIAMO SCRIVERE:

$$L[x_1] = f_1$$

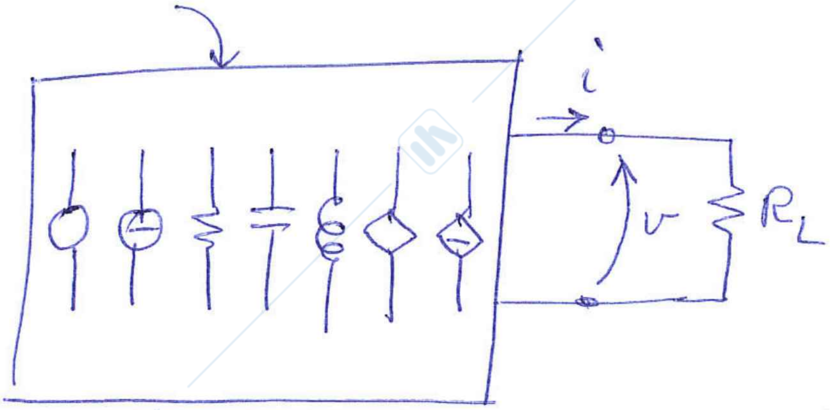
$$L[x_2] = f_2$$

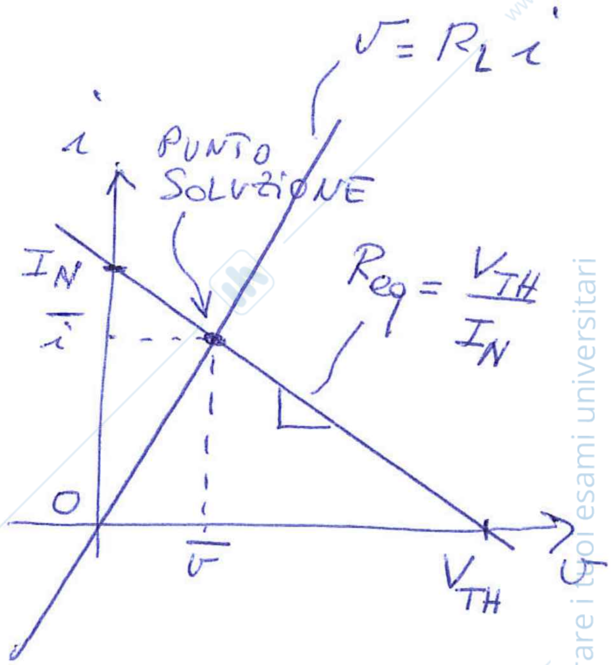
$$L[x] = \lambda f_1 + \mu f_2$$

$$\boxed{x = \lambda x_1 + \mu x_2}$$

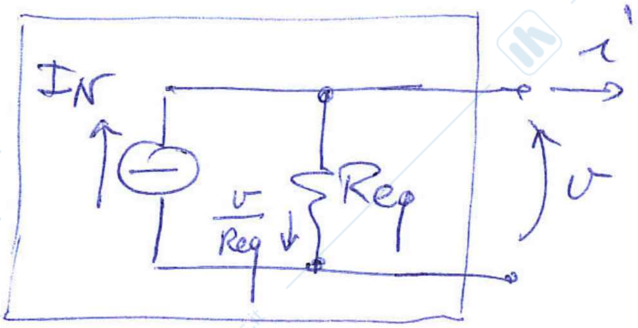
TEOREMA THEVENIN - NORTON

RETE LINEARE

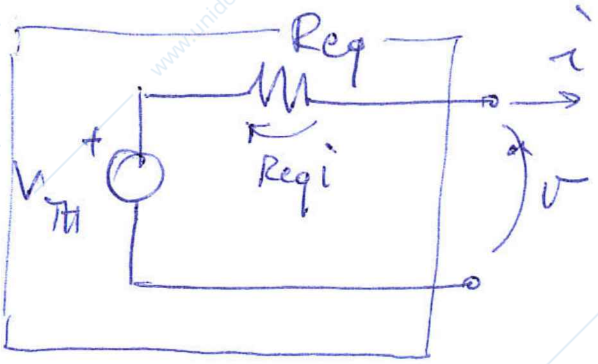




LA RETE LINEARE E' EQUIVALENTE (AI FINI DEL CALCOLO DELLE GRANDEZZE $\bar{v}, \bar{i}$ AI MORSETTI INDICATI) AI CIRCUITI:



$$i = I_N - \frac{v}{R_{eq}} \quad (1) \quad (\text{EQ. NORTON})$$
(LKC)



$$v = V_{TH} - R_{eq}\, i \quad (2) \quad (\text{EQ. THEVENIN})$$
(LKT)

ENTRAMBI DANNO IL MEDESIMO GRAFICO LINEARE NEL PIANO (i, v). LA CORRENTE I_N HA IL SIGNIFICATO DI CORRENTE DI CORTO CIRCUITO ($i|_{v=0} = I_N$), LA TENSIONE V_{TH} E' QUELLA CHE ASSUME v QUANDO I MORSETTI SONO APERTI ($v|_{i=0} = V_{TH}$).

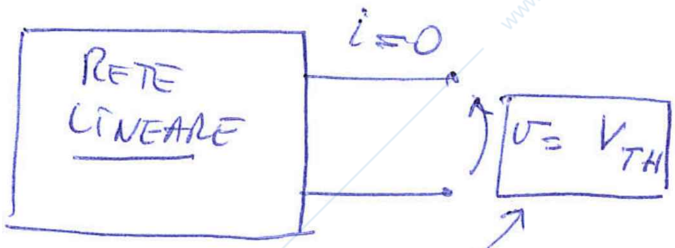
SI VERIFICA FACILMENTE L'UGUAGLIANZA DELLE (1) E (2):

$$i = I_N - \frac{v}{R_{eq}} \rightarrow R_{eq}\, i = \underbrace{\boxed{R_{eq} I_N}}_{= V_{TH}} - v$$

$$\rightarrow v = V_{TH} - R_{eq}\, i$$

☐ PER DETERMINARE OPERATIVAMENTE V_{TH}, I_N, R_{eq}:

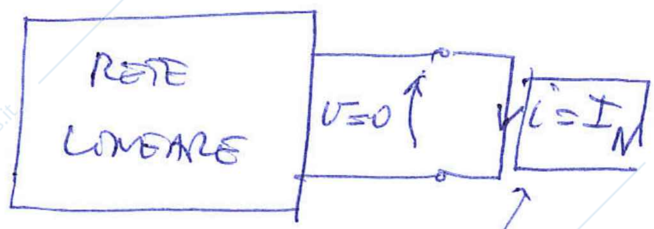
- V_{TH}



tensione "a vuoto"

[metto a sistema con $R_L = \infty$, ovvero campiono il valore di tensione a $i = 0$.]

- I_N

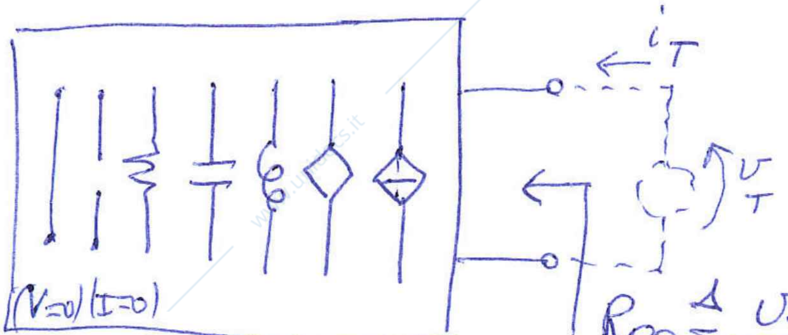


Corrente di "corto circuito"

[metto a sistema con $R_L = 0$, cioè campiono il valore di corrente a $v = 0$]

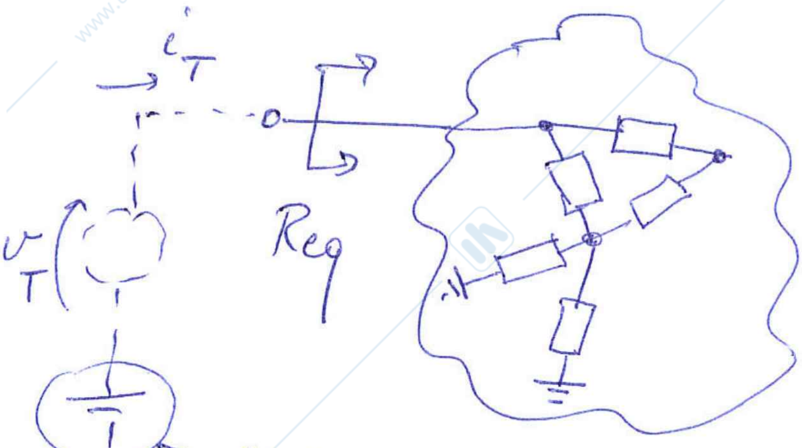
- $R_{eq} = \frac{V_{TH}}{I_N}$ → SI PUÒ CALCOLARE DA V_{TH} e I_N OPPURE DIRETTAMENTE

SPENGO I GEN. INDIP. DELLA RETE LINEARE IN ESAME E CALCOLO LA RES. EQ. "VISTA" AI MORSETTI

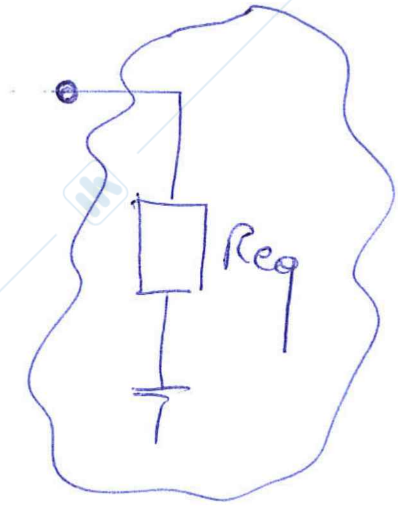


$$R_{eq} \triangleq \frac{v_T}{i_T}$$

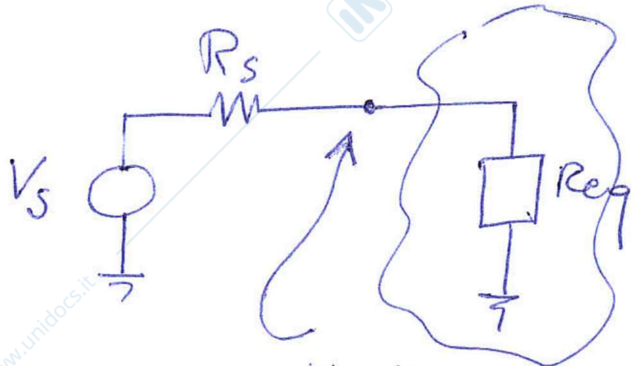
II IMPEDENZA/RESISTENZA EQUIVALENTE DI UN "NODO"?



RISPETTO A MASSA

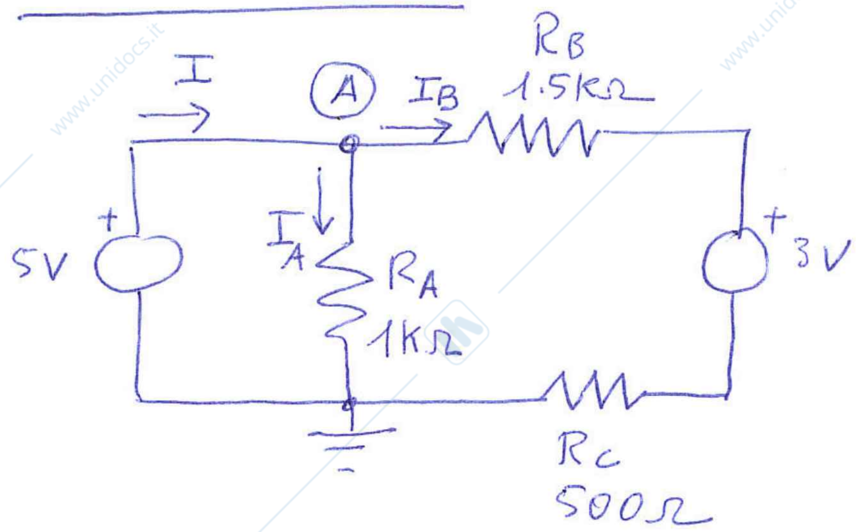


Req MI INDICA LA FRAZIONE DI TENSIONE O CORRENTE CHE PUÒ ESSERE TRASFERITA A QUELLA SOTTORETE DA UN GENERATORE REALE.



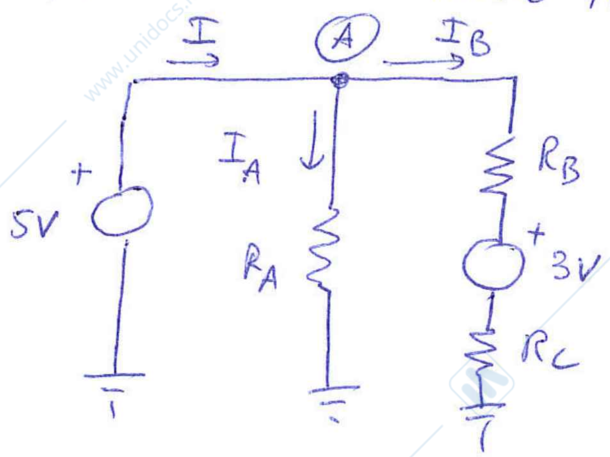
$$V = V_S \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_S}$$

ESERCIZIO #1

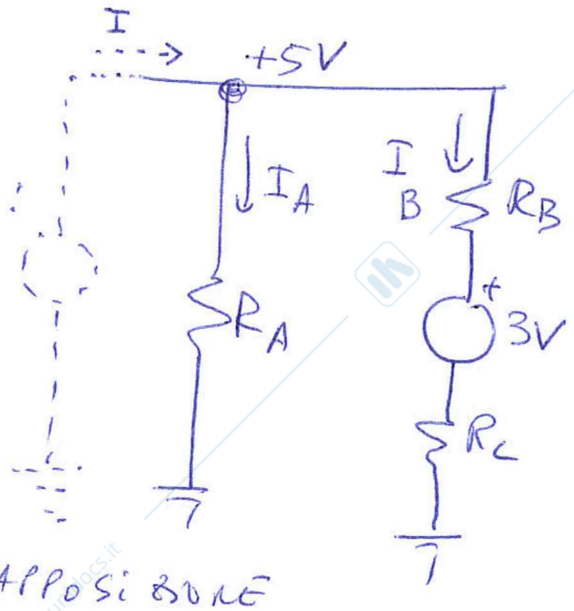


- Determinare le correnti: I, I_A, I_B

• Posso ridisegnare il circuito anche così:

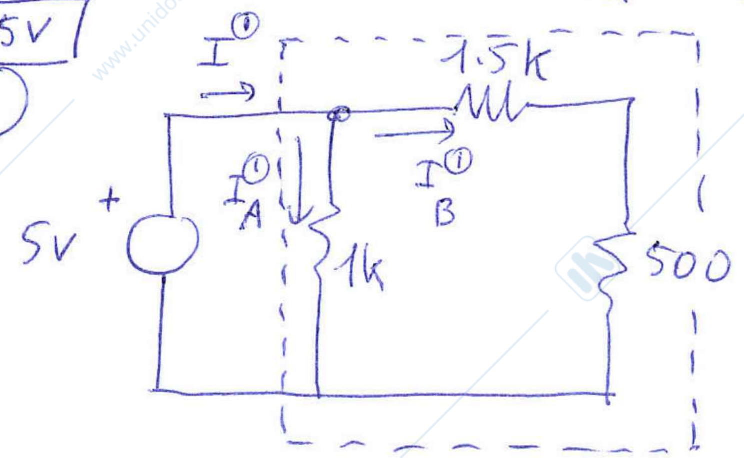


oppure:

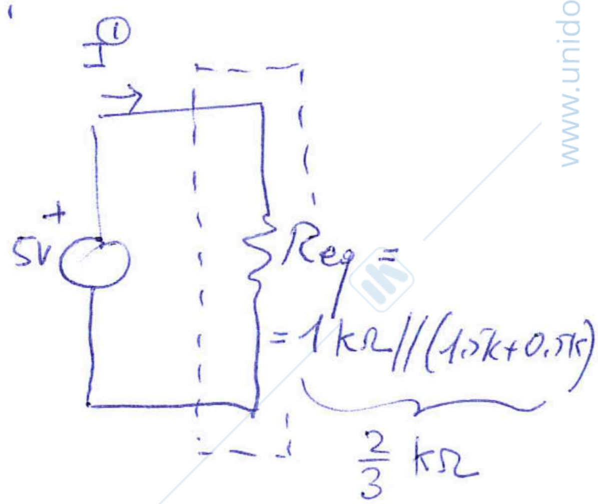


• Rete lineare → Pr. di sovrapposizione degli effetti:

$\boxed{5V}$ 1

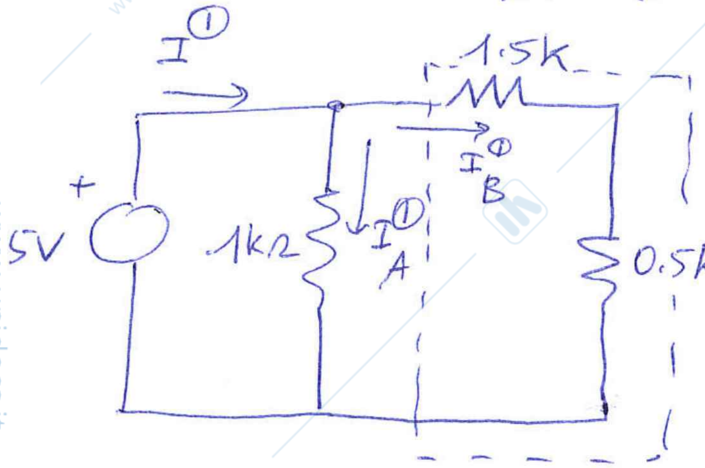


⟹

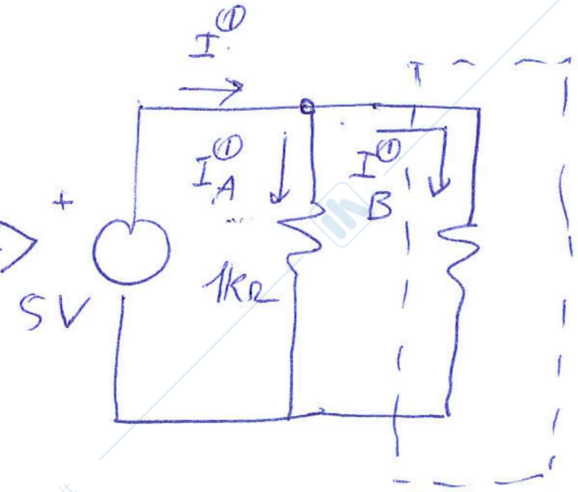


$$I^{(1)} = \frac{5V}{2/3\,k\Omega} = 7.5\,mA$$

TROVATA $I^{(1)}$, POSSO TORNARE ALLO SCHEMA ORIGINALE PER TROVARE $I_A^{(1)}, I_B^{(1)}$:



$\Rightarrow$



$$I_A^{(1)} = I^{(1)} \frac{(1.5k+0.5k)}{(1.5k+0.5k)+1k} = \frac{2}{3} I^{(1)} = \underline{5mA}$$

$R_{eq} = 1.5k + 0.5k = 2k\Omega$

(PARTITORE DI CORRENTE)

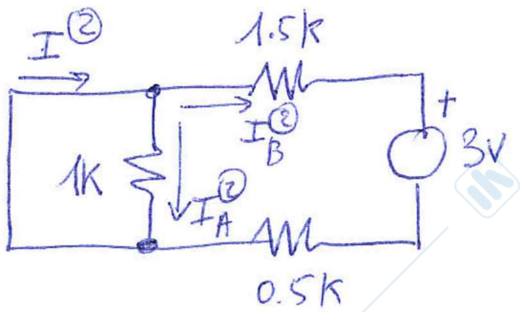
$$I_B^{(1)} = I^{(1)} - I_A^{(1)} = I^{(1)} - \frac{2}{3} I^{(1)} = \frac{1}{3} I^{(1)} \rightarrow \underline{2.5\ mA}$$ (LKC al nodo A)

oppure:

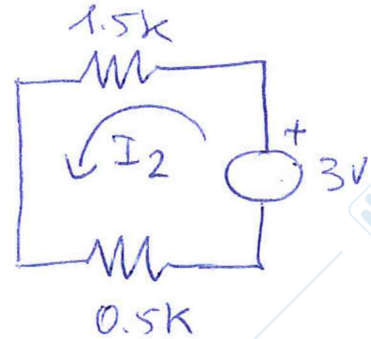
$$= I^{(1)} \frac{1k}{1k + (1.5k+0.5k)} = \frac{1}{3} I^{(1)}$$ (PARTITORE DI CORRENTE)

$\boxed{3V}$

(2)



$\Rightarrow$



$$I_2 = \frac{3V}{(1.5k+0.5k)} = 1.5\ mA$$

$\Downarrow$

$I^{(2)} = -I_2$ (PARTIZIONE DI CORRENTE A FAVORE DEL CORTOCIRC.)

$I_A^{(2)} = \emptyset$ (" " ")

$I_B^{(2)} = I^{(2)} - I_2$ (LKC)

$\boxed{\text{P.S.}}$ MANTENERE LE MEDESIME CONVENZIONI (I, V)!

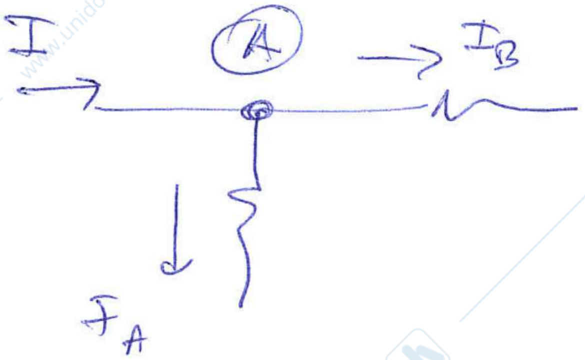
- SOVRAPPONIAMO GLI EFFETTI:

$$I = I^{①} + I^{②} = 7.5\,mA + (-1.5\,mA) = \underline{\underline{6\,mA}}$$

$$I_A = I_A^{①} + I_A^{②} = 5\,mA + \emptyset = \underline{\underline{5\,mA}}$$

$$I_B = I_B^{①} + I_B^{②} = 2.5\,mA + (-1.5\,mA) = \underline{\underline{1\,mA}}$$

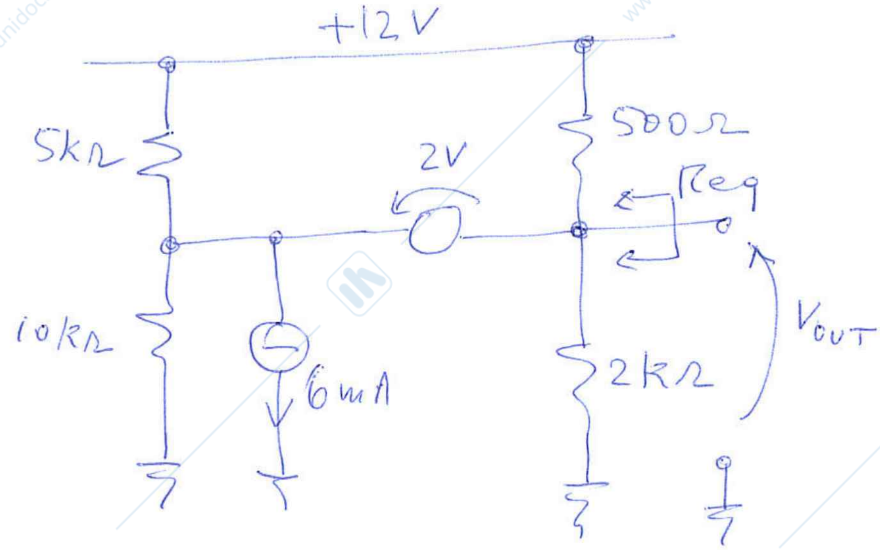
- CONTROLLO LCK AL NODO A:



$$I = I_A + I_B \quad (LKC)$$

$$6\,mA = 5\,mA + 1\,mA \quad \checkmark \text{ OK}$$

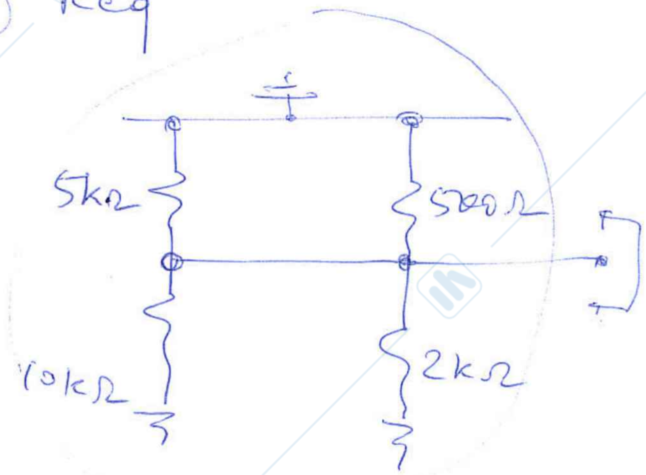
ESERCIZIO #2



Determinare:

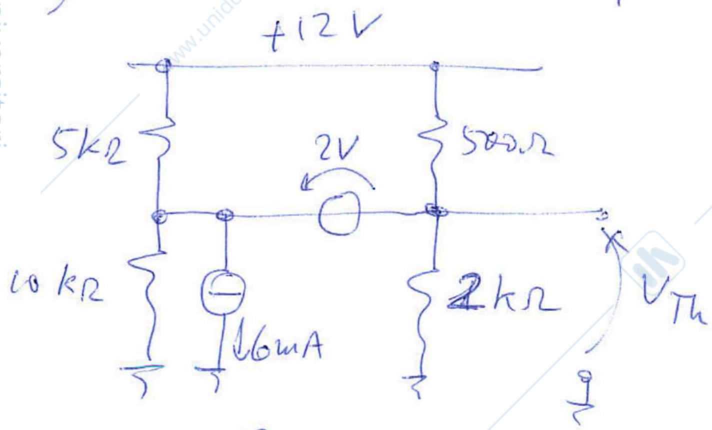
1) R_{eq}
2) V_{OUT}
3) V_{OUT}, quando connetto $R_L = 1k\Omega$ verso massa in uscita.

1) R_{eq}



$$R_{eq} = 2k\Omega // 500\Omega // 10k\Omega // 5k\Omega = \underline{\underline{357\,\Omega}}$$

2) Trovo il circuito eq. Thevenin "visto" dall'uscita:



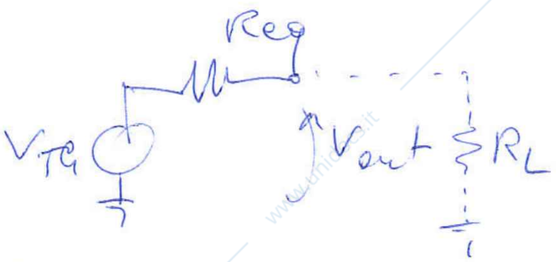
$$V_{Th}\big|_1 = 12V \times \frac{2k//10k}{(2k//10k)+(5k//500)} =$$

$$= 12V \times \frac{1.67k}{2.12k} = \underline{9.45V}$$

$$V_{Th}\big|_2 = -6mA \times R_{eq} = \underline{-2.14V}$$

$$V_{Th}\big|_3 = (-2V)\,\frac{2k//500}{(2k//500)+(10k//5k)} =$$

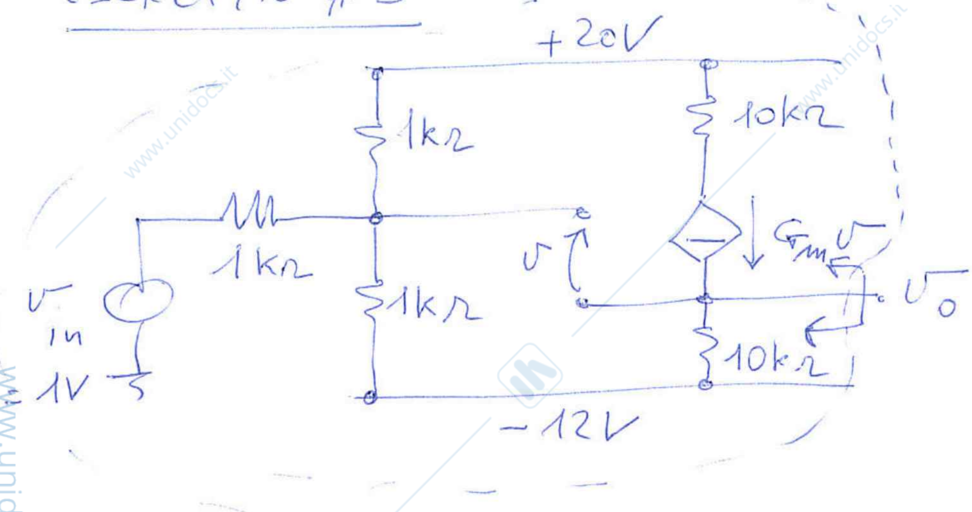
$$= -\frac{0.4k}{3.73k}\cdot(2V) = \underline{-0.21V}$$



$$\Rightarrow \underline{V_{Th} = +7.1V = V_{out}}$$

3) $$V_{out} = V_{Th}\,\frac{R_L}{R_L+R_{eq}} = 7.1V \times \frac{1k}{1k+357} = \underline{\underline{5.23V}}$$

ESERCIZIO # 3

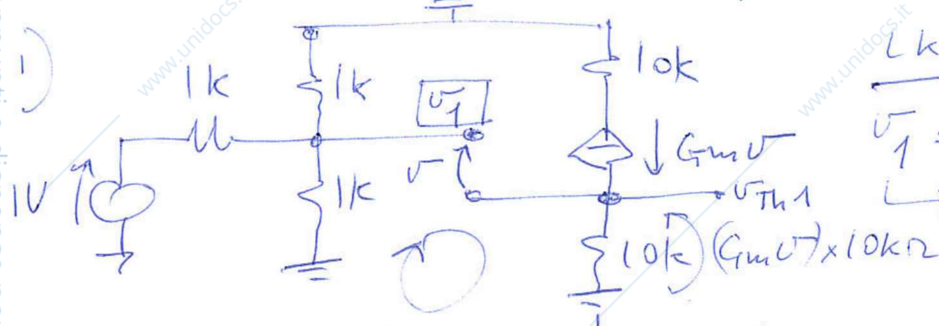


$G_m = 0.1\ \Omega^{-1}$

Determinare il circuito eq. Thevenin "visto" dall'uscita.

↳ CALCOLO V_{Th} (uso sovrapp. e LKT)

1)



LKT:

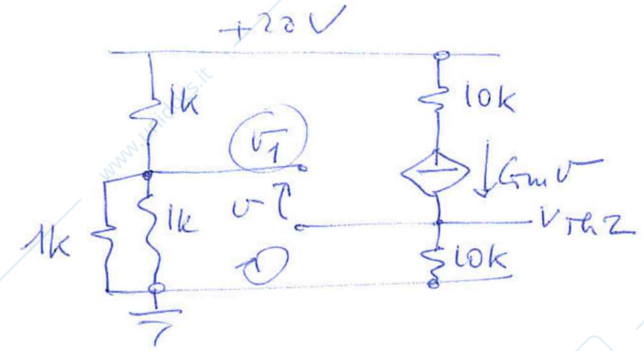
$v_1 = (G_m v) \times 10k\Omega + v$

$\hookrightarrow v = \dfrac{v_1}{1 + G_m \times 10k\Omega} = \dfrac{0.33V}{1 + \underbrace{0.1\Omega^{-1} \times 10^4\Omega}_{10^3}} \simeq 0.33 \times 10^{-3} V$

$v_1 = 1V \cdot \dfrac{1k // 1k}{1k//1k + 1k} = 1V \cdot \dfrac{0.5k}{1.5k} \simeq 0.33V$

$\hookrightarrow \boxed{V_{Th}|_1} = G_m v \times 10k\Omega = \underbrace{0.1\Omega^{-1} \times 10^4\Omega}_{10^3} \times v = \boxed{0.33V}$

2)



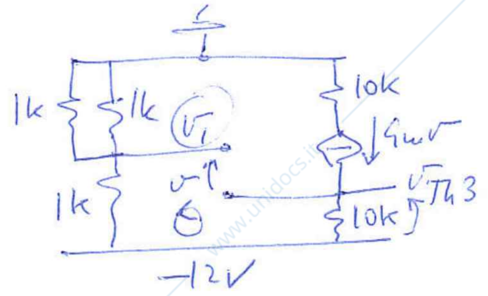
$v_1 = 20V \times \dfrac{1k//1k}{1k//1k + 1k} = 20V \times \dfrac{0.5}{1.5} \simeq 0.67V$

LKT: $v_1 = (G_m v)10k\Omega + v = v(1 + G_m 10k)$

$\hookrightarrow v = \dfrac{v_1}{1 + G_m 10k} = \dfrac{0.67V}{1 + \underbrace{0.1\Omega^{-1} \times 10^4\Omega}_{10^3}} = 0.67 \times 10^{-3} V$

$\hookrightarrow \boxed{V_{Th}|2} = G_m v \times 10k\Omega = G_m 10k\Omega \times \dfrac{v_1}{1 + G_m 10k\Omega} \simeq v_1 = \boxed{+6.67V}$

3)



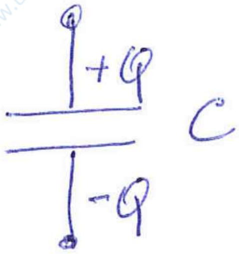
$v_1 = (-12)\dfrac{1k//1k}{1k//1k + 1k} = (-12)\dfrac{0.5}{1.5} = -4V$

LKT: $\underbrace{[v_1 - (-12V)]}_{8V} = (G_m v)10k\Omega + v$

$\hookrightarrow v = \dfrac{\overset{8V}{(v_1 + 12V)}}{1 + G_m 10k\Omega} = \dfrac{8V}{1 + \underbrace{10^{-1}\Omega^{-1} \cdot 10^4\Omega}_{10^3}} \sim 8V$

$\hookrightarrow \boxed{V_{Th}|3} = G_m v\, 10k\Omega - 12V = G_m 10k\Omega \times \dfrac{8V}{1 + G_m 10k\Omega} - 12V \simeq 8V - 12V = \boxed{-4V}$

CONDENSATORE



$$q = \boxed{C}\, v$$

CAPACITÀ (CARICA "IMMAGAZZINATA", oppure FLUSSO DI $\vec{E}$, PER UNITÀ DI TENSIONE)

$$\downarrow \frac{d}{dt}$$

$$\boxed{i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt}}$$

RELAZIONE COSTITUTIVA I – V

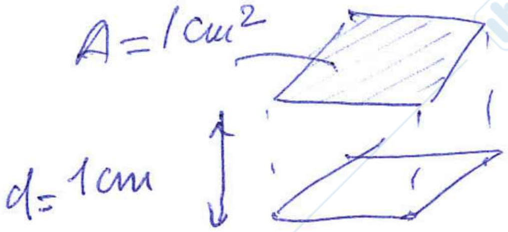
• CONDENSATORE FACCE PIANE PARALLELE

$$C = A\,\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{d} \quad [F]$$

A [cm²], ε_0 [F/cm], d [cm]

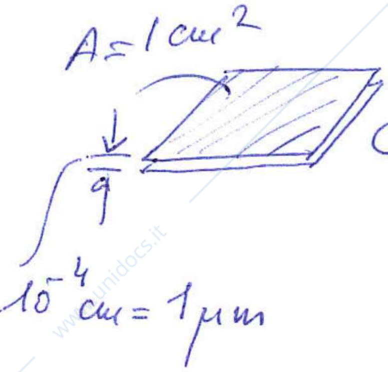
$\boxed{\varepsilon_0}$ COSTANTE DIELETTRICA NEL VUOTO

8.85×10^{-14} F/cm



C = 88.5 fF

$(\varepsilon_r \sim 1)$



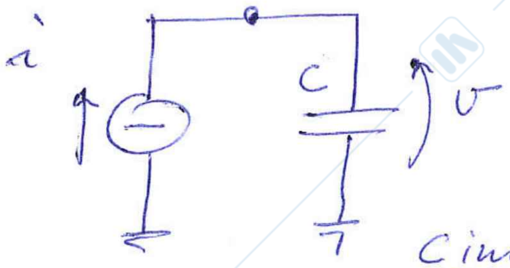
C = 0.885 nF

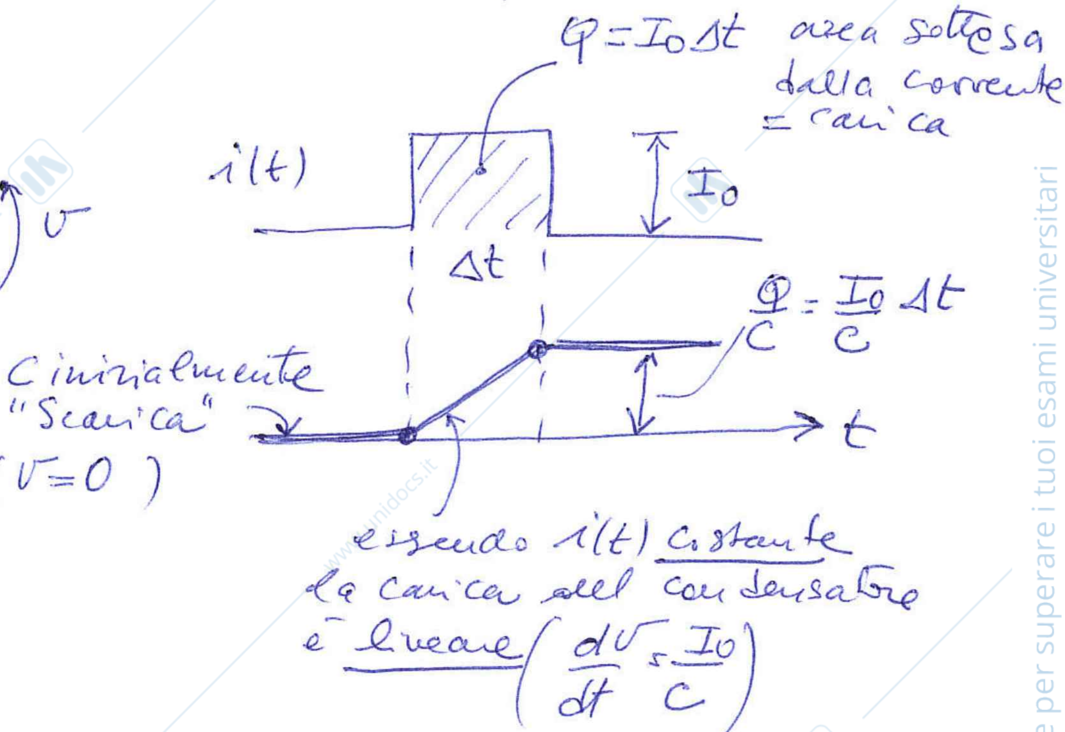
• IN REGIME STAZIONARIO $\left(\frac{d}{dt} \equiv \emptyset \text{ nel circuito}\right)$

↳ $i = \emptyset$ C è eq. ad un circuito aperto

- REGIME TRANSITORIO $\left(\frac{d}{dt} \neq 0\right)$

Guardiamo un semplice esempio:

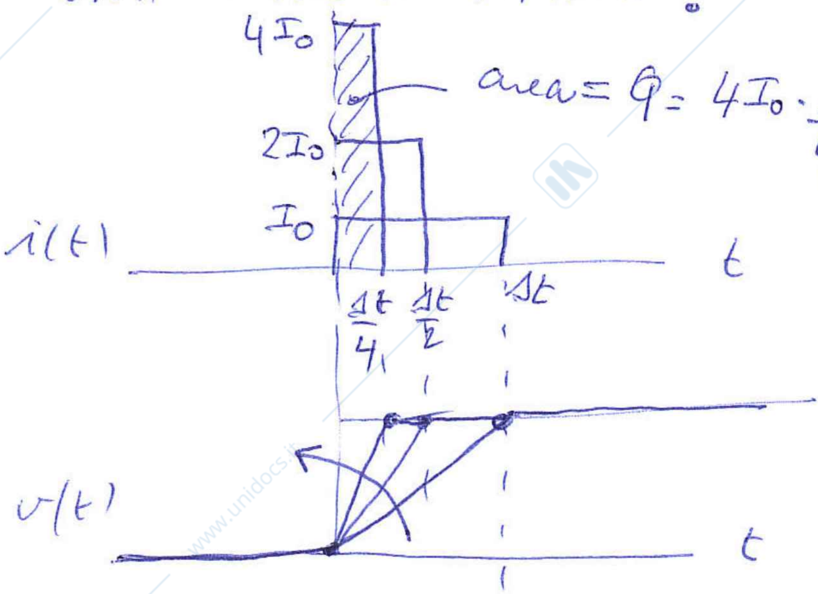




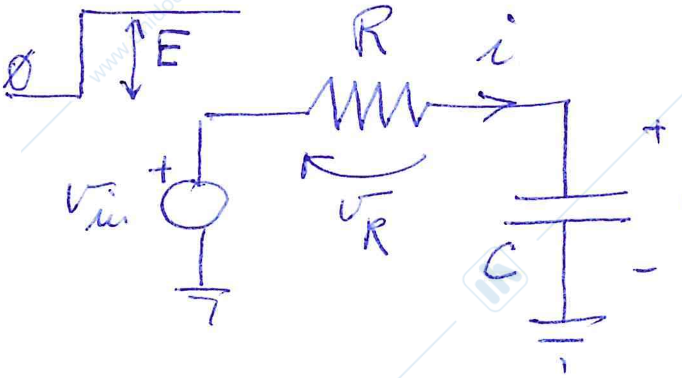
→ LA TENSIONE v SUL CONDENSATORE VARIA IN MODO CONTINUO (È FUNZIONE CONTINUA), ANCHE SE i(t) È DISCONTINUA.

→ UNA VARIAZIONE ISTANTANEA (⌐) di v RICHIEDE UNA CORRENTE INFINITA!

$$\text{area} = Q = 4I_0 \cdot \frac{\Delta t}{4} = 2I_0 \cdot \frac{\Delta t}{2} = \boxed{I_0 \Delta t}$$



RICHIAMO | FILTRO R-C - RISPOSTA AL GRADINO



IN QUESTO CASO PARTICOLARE: LA TENSIONE SU C (v_C) COINCIDE CON L'USCITA (v_0)

$v_0 \equiv v_C$

ANALISI NEL DOMINIO DEL TEMPO

$$v_{in} = Ri + v_0 \qquad (LKT)$$

$$i = C\frac{dv_C}{dt} = C\frac{dv_0}{dt}$$

SI OTTIENE UN'EQ. DIFFERENZIALE 1° ORDINE LINEARE

$$\begin{cases} \dfrac{dv_0}{dt} + \dfrac{1}{RC}v_0 = \dfrac{v_{in}(t)}{RC} \\ v_0(0) = 0 \end{cases}$$

$v_0(0) = 0$ ← condizioni iniziali: C inizialmente scarico ($v_{in} = 0$ per $t < 0$)

- NOTA: E' UN CIRCUITO LINEARE!

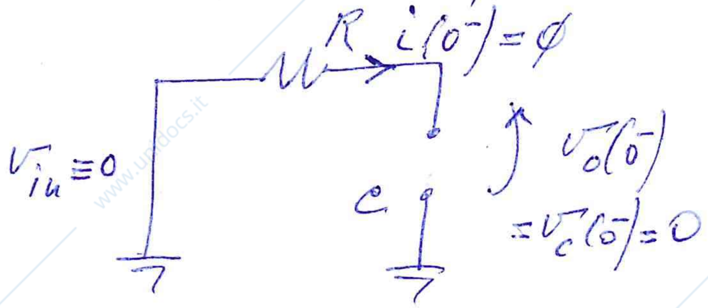
$$L(\cdot) = \frac{d}{dt}(\cdot) + \frac{1}{RC}(\cdot) \longrightarrow L[v_0] = \frac{v_{in}}{RC}$$

- SOLUZIONE BEN NOTA:

$$v_0(t) = A e^{-t/RC} + B \overset{C.I.}{=} E\left(1 - e^{-t/RC}\right) \text{ per } t > 0$$

□ ANALISI "DIRETTA", UTILIZZANDO LA CONTINUITÀ DELLA TENSIONE DEL CONDENSATORE E CONSIDERANDO LE CARATTERISTICHE DELLA RISPOSTA DEI SISTEMI LINEARI 1° ORDINE (AD ES. 1 COND. E QUINDI 1 COSTANTE DI TEMPO).

(1). IN QUESTO CASO NON VIENE DATA LA CONDIZIONE A $t=0$ DI v_C, MA SO CHE PER $t<0$ $v_{in} \equiv \emptyset$.

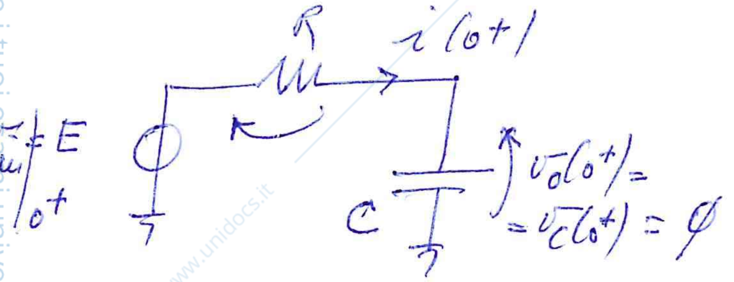


QUINDI A $\boxed{t=0^-}$ LA v_C È SENZ'ALTRO A REGIME, OVVERO $i(0^-)=\emptyset$.

$\rightarrow \boxed{v_C(0^-)=\emptyset} \rightarrow v_0(0^-)=\emptyset$

(2). A $\boxed{t=0^+}$, PER LA CONTINUITÀ DI v_C, RISULTA

$v_C(0^-)=v_C(0^+)=0 \rightarrow v_0(0^+)=0$



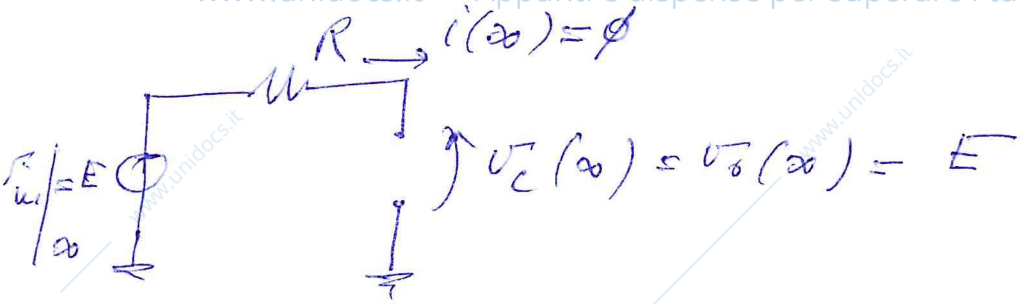
DAL CIRCUITO A LATO $(t=0^+)$ SI RICAVA $i(0^+)=E/R$

POSSO ANCHE RICAVARE:

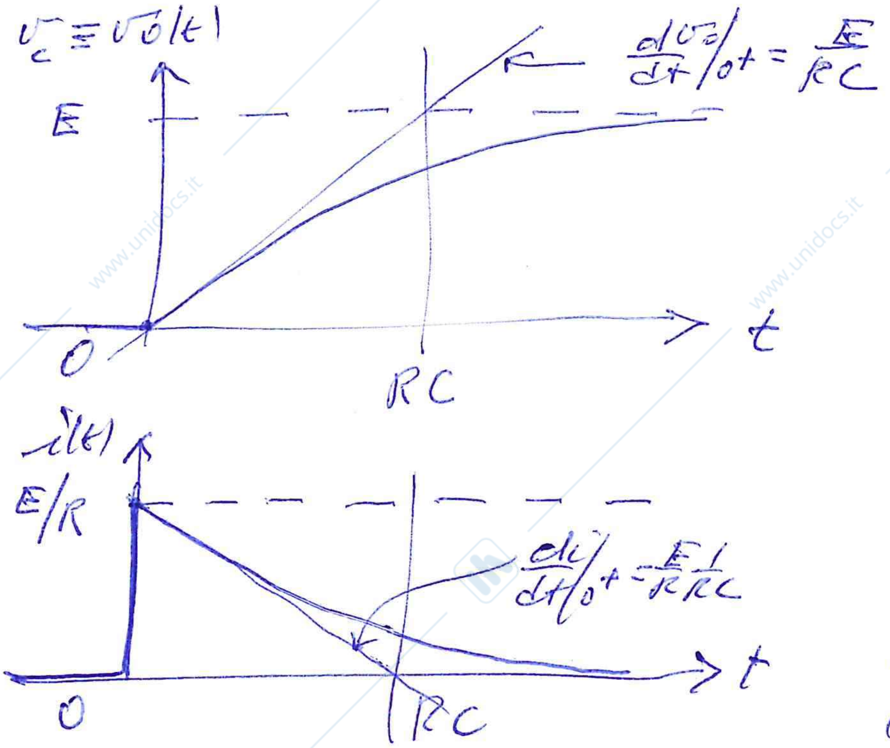
$$\left.\frac{dv_0}{dt}\right|_{0^+} = \frac{i(0^+)}{C} = \frac{E}{RC}$$

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{0^+} = \frac{1}{R}\left.\frac{dv_R}{dt}\right|_{0^+} = -\frac{1}{R}\left.\frac{dv_0}{dt}\right|_{0^+} = -\frac{E}{R}\frac{1}{RC}$$

(3). PER $\boxed{t\rightarrow\infty}$, LA <u>TENSIONE SU C</u> VA A <u>REGIME</u>, I.E. LA CORRENTE IN C SI ANNULLA $\boxed{i(\infty)=\emptyset}$.



IL GRAFICO DI $v_0 \equiv v_C(t)$ E $i(t)$ SI TRACCIA FACILMENTE:

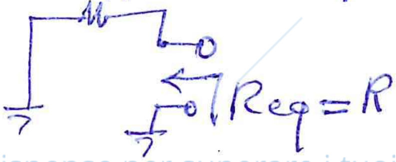


$\boxed{\tau=RC}$ è la costante di tempo caratteristica del circuito.

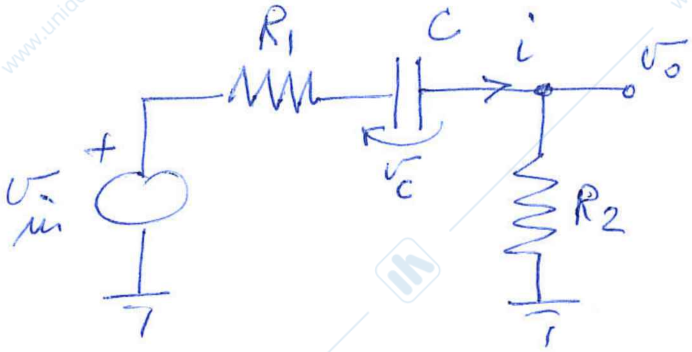
Rappresenta la pulsazione caratteristica $\left(\frac{1}{\tau}\right)$ della EVOLUZIONE LIBERA del circuito (SENZA FORZANTI)

☐ IN SINTESI ESTREMA:

- PER $\boxed{t=0^-}$: LA $v_C(0^-)$ E' DATA O SI RICAVA DAL CONTESTO.
- PER $\boxed{t=0^+}$: $v_C(0^+)=v_C(0^-)$ → C E' PARI AD UN GEN. DI TENSIONE $v_C(0^-)$ (SE $v_C(0^-)=0$ → C ≡ "CORTOCIRCUITO")
- PER $\boxed{t\to\infty}$: $i_C(\infty)=\phi$ → C E' UN CIRCUITO APERTO
- COSTANTE DI TEMPO $\boxed{\tau} = C \times \boxed{Req}$ ← RES. EQUIVALENTE "VISTA" DA C (SPENGO I GEN. INDIP.)

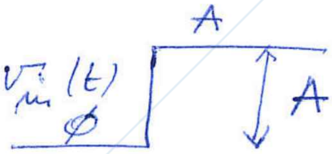


ESEMPIO #1 – SOLUZIONE DIRETTA CIRCUITO R – C



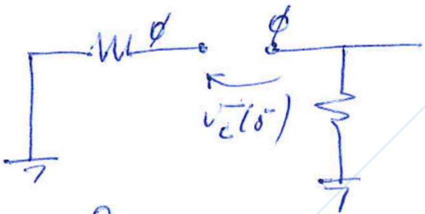
$R_1 = 10k\Omega$
$R_2 = 30k\Omega$
$C = 1\,pF$

□ RISPOSTA AL GRADINO



$A = 1V$

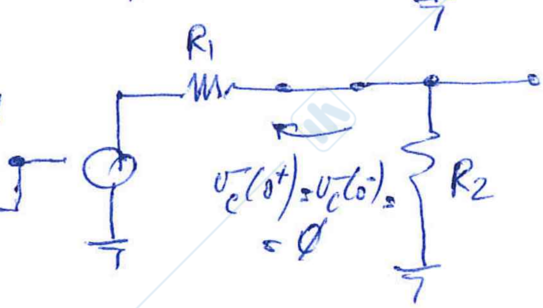
$\underline{t = 0^-}$: Stiamo in una situazione a regime, con quindi $\underline{i = 0}$



$v_0(0^-) = \emptyset$

$\underline{t = 0^+}$:

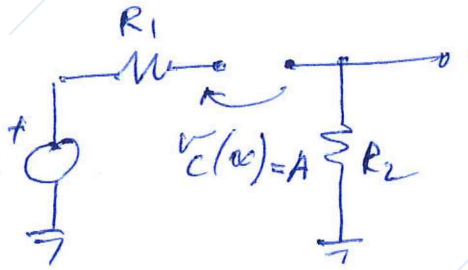
$v_{in}|_{0^+} = A$



$v_0(0^+) = A \dfrac{R_2}{R_1+R_2} = 1V \cdot \dfrac{30k}{40k} = 0.75\,V$

$\underline{t \to \infty}$:

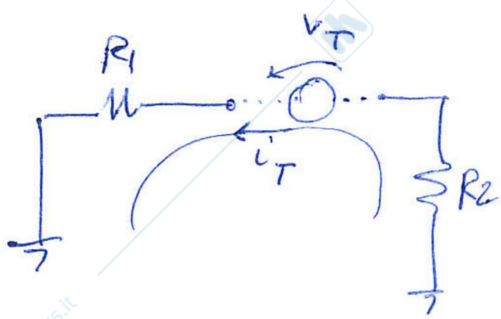
$v_{in}|_{\infty} = A$



$v_0(\infty) = \emptyset$

$\underline{\tau}$?

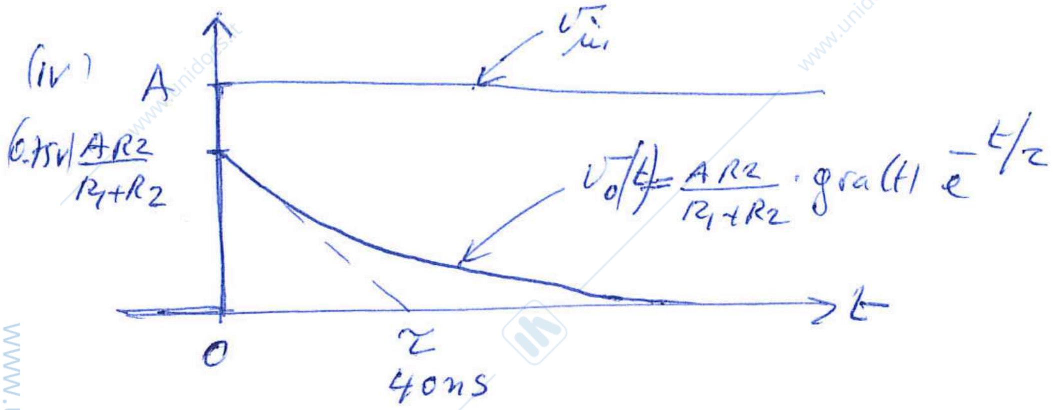
$(v_{in} = \emptyset)$



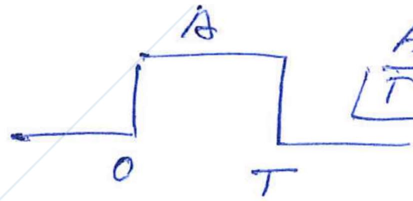
$i_T = v_T \dfrac{1}{R_1+R_2} \rightarrow R_{eq} \triangleq \dfrac{v_T}{i_T} = R_1+R_2 = 40k\Omega$

$\Rightarrow \tau = C R_{eq} = 10^{-12} F \times 40 \times 10^{+3}\Omega = 40 \times 10^{-9} s = \underline{40\,ns}$

(IV)



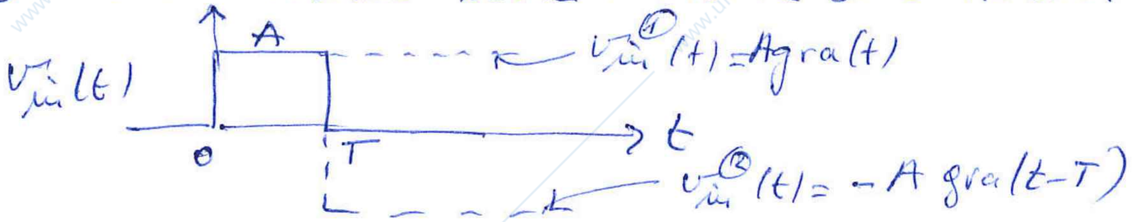
☐ RISPOSTA AL RETTANGOLO

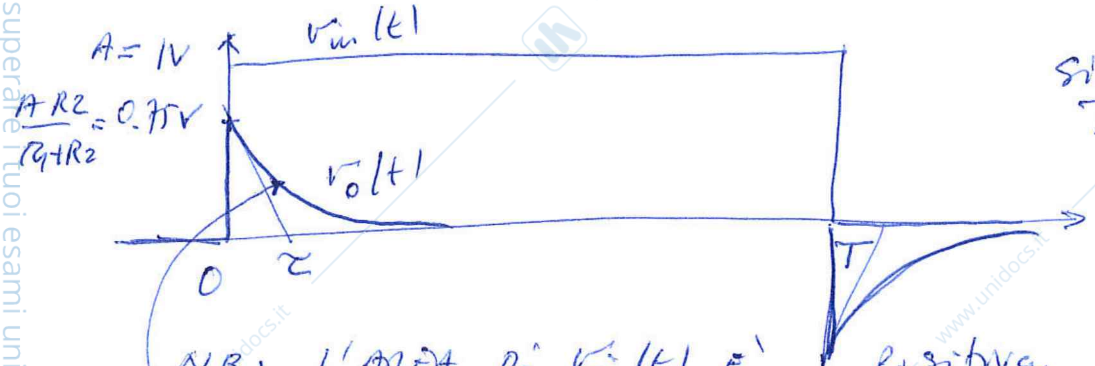


$A = 1V$
$\boxed{T = 1\mu s}$

DUE POSSIBILITÀ:

① • SOVRAPPOSIZIONE DELLE RISPOSTE DI 2 GRADINI





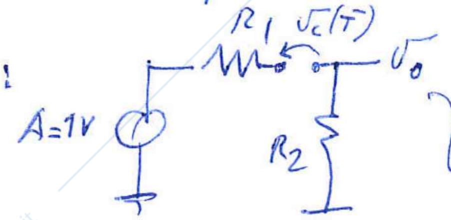
Siamo nel caso $T >> \tau$ $(T = 25\tau)$

NB: L'AREA DI $v_{in}(t)$ è positiva, mentre l'area sottesa da $v_o(t)$ è nulla.

• $v_o(t) = 0.75V \cdot gra(t)\, e^{-t/\tau} - 0.75V \cdot gra(t-T)\, e^{-(t-T)/\tau}$

② • CALCOLO DI v_C / v_O a $t = T^-$ e T^+

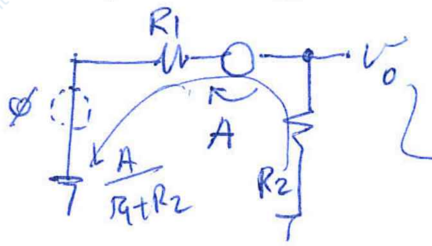
per $t = T^-$:



$v_C(T^-) \simeq A$ (considerato a regime, $\tau << T$) $(i = 0)$

$\rightarrow v_O(T^-) \simeq \emptyset$

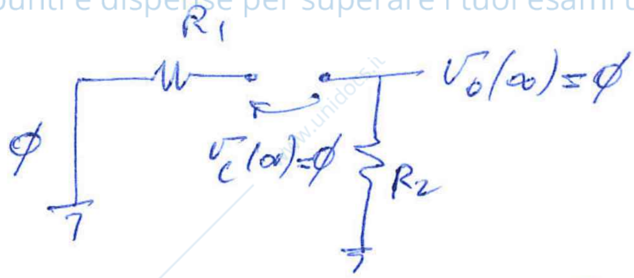
per $t = T^+$:



$v_C(T^+) = v_C(T^-) = A$

$\rightarrow v_O(T^+) = -A \frac{R_2}{R_1+R_2} = -0.75V$

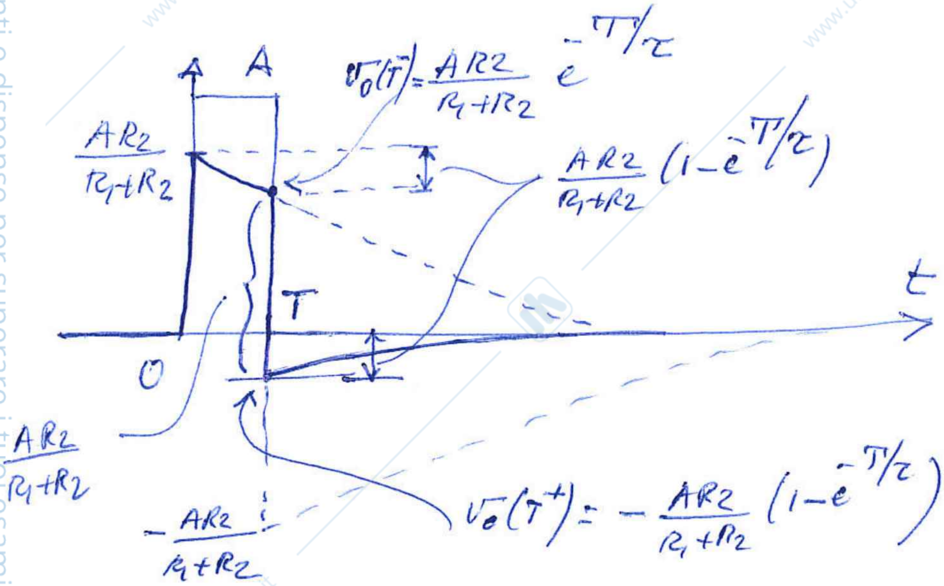
per $t \to \infty$:



[che conferma il grafico precedente]

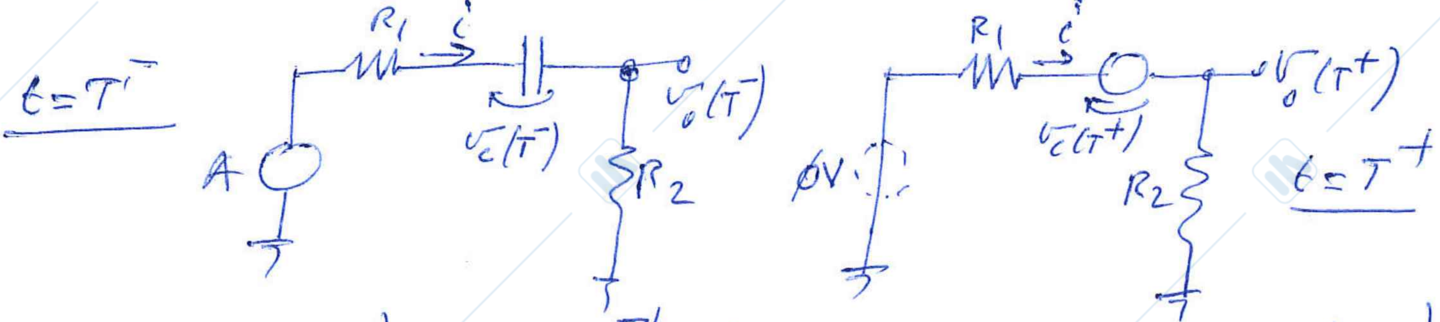
E) RISPOSTA AL RETTANGOLO $T < \tau$

IN QUESTO CASO, i 2 TERMINI ESPONENZIALI SI SOVRAPPONGONO
CON LA TECNICA (1) ABBIAMO GIÀ TROVATO LA SOLUZIONE
PER OGNI T, BASTA GRAFICARLA CORRETTAMENTE.



Si nota che il "salto" $[v_o(T^-) - v_o(T^+)]$ è pari ad $\frac{AR_2}{R_1+R_2}$ (come prima)

• VERIFICHIAMO IL SALTO $[v_o(T^-) - v_o(T^+)]$:



So che $v_o(T^-) = \frac{AR_2}{R_1+R_2} e^{-T/\tau}$ (singolo tratto di exp. fino a $t=T$)
e quindi trovo:

$$i(T^-) = \frac{v_o(T^-)}{R_2} = \frac{A\cancel{R_2}}{R_1+R_2}\frac{1}{\cancel{R_2}} e^{-T/\tau}$$

$$\hookrightarrow v_C(T^-) = A - i(T^-)(R_1+R_2) = A - \frac{A}{\cancel{R_1+R_2}}\cancel{(R_1+R_2)} e^{-T/\tau} = A(1-e^{-T/\tau})$$

$$\hookrightarrow v_C(T^+) = v_C(T^-) \text{ PER CONTINUITÀ.}$$

Posso risolvere i 2 circuiti con la sovrapposizione degli effetti per trovare $|v_0(T^+)-v_0(T^-)|$:

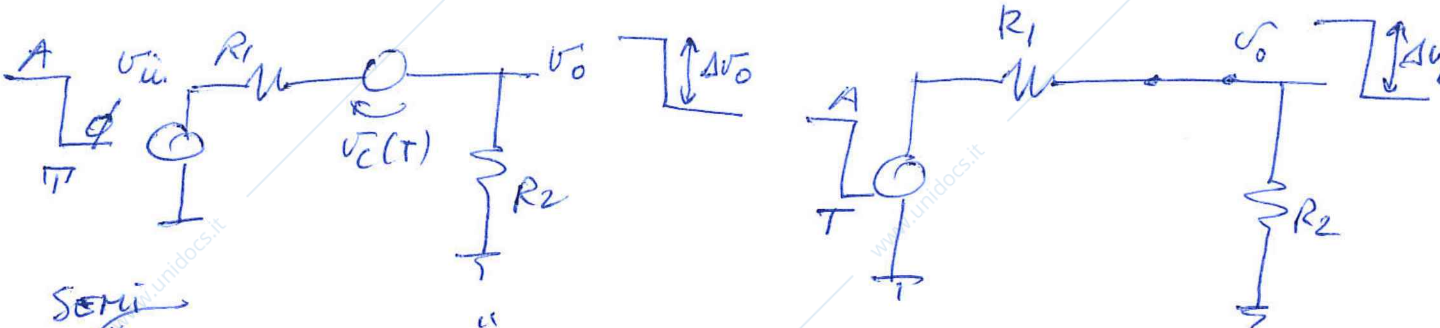
$$v_0(T^-) = v_0\Big|_{v_C(T^-)} + v_0\Big|_{v_{in}=A}$$

$$v_0(T^+) = v_0\Big|_{v_C(T^+)=v_C(T^-)} + \cancel{v_0\Big|_{v_{in}=\emptyset}}$$

non devo neanche calcolare il valore di $v_C(T)$!

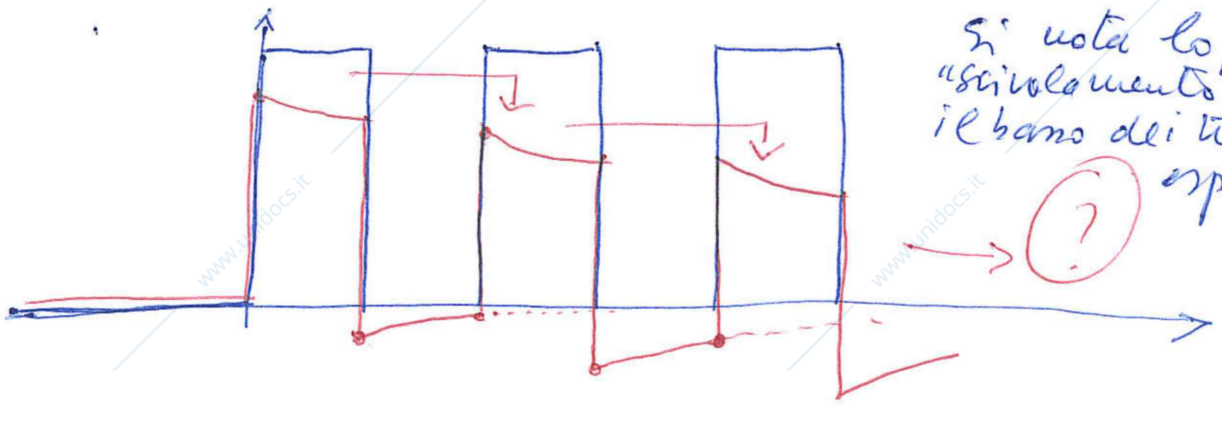
$$\to \left[v_0(T^-)-v_0(T^+)\right] = \cancel{v_0\Big|_{v_C}} + v_0\Big|_{v_{in}=A} - \cancel{v_0\Big|_{v_C}} = \boxed{A\,\frac{R_2}{R_1+R_2}}$$ ✓ ok

Ovvero, per quanto riguarda il salto Δv_0, il condensatore rimane "fermo" e quindi non contribuisce. Potremmo anche trascurarne la tensione $v_C(T)$:



☐ Semi-"onda quadra" che parte a $t=0$

Riprendiamo la soluzione della risposta al rettangolo e la replichiamo indefinitamente (mi limito al caso $T \ll \tau$).



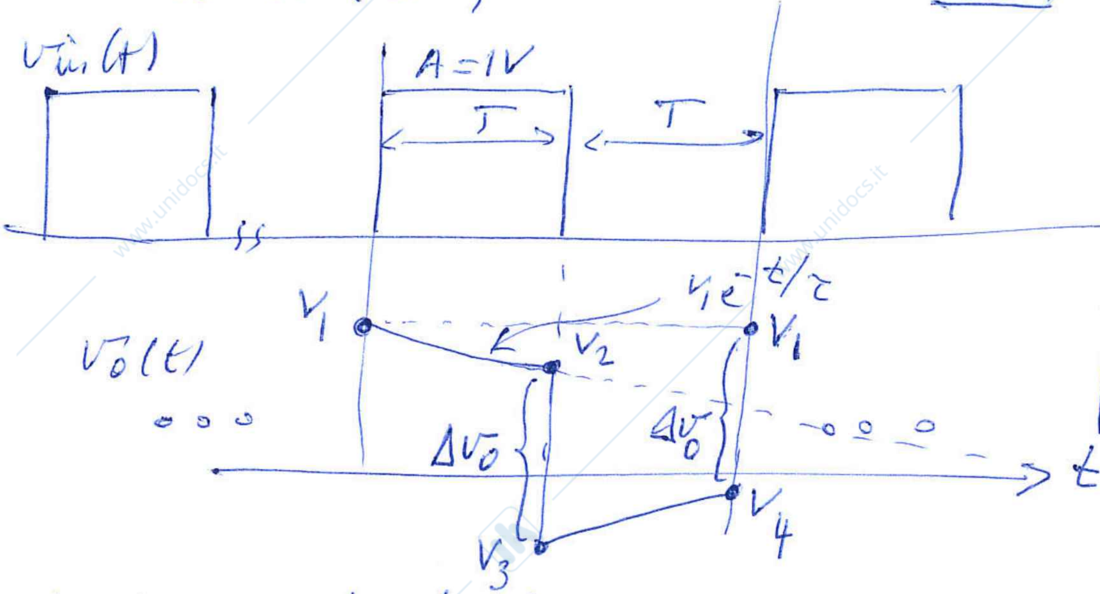
Si nota lo "scivolamento" verso il basso dei tratti esponenziali.

?

RISPOSTA ALL'ONDA QUADRA (INDEFINITA)

La risposta all'onda quadra rappresenta il "regime" a cui la curva precedente tendeva asintoticamente.

QUESTA VOLTA PERÒ NON CONOSCIAMO LA CONDIZIONE INIZIALE A $t=0$, DATO CHE $V_{in}(t)$ OSCILLA DA $-\infty$ A $+\infty$, MA SAPPIAMO CHE $V_0(t)$ SARÀ PERIODICA.



$$\left[\Delta V_0 = A \frac{R_2}{R_1+R_2}\right]$$
noto

ALLORA PRENDO 1 PERIODO E ASSUMO IL VALORE V_1 A INIZIO PERIODO.

RICAVO V_2, V_3, V_4 in funzione di V_1:

$$V_2 = V_1 e^{-T/\tau} \quad \text{(tratto exp., cost. = } \tau\text{)}$$

$$V_3 = V_2 - \Delta V_0 = V_1 e^{-T/\tau} - \Delta V_0$$

$$V_4 = V_3 e^{-T/\tau} = \left(V_1 e^{-T/\tau} - \Delta V_0\right) e^{-T/\tau}$$

VINCOLO PERIODICITÀ: $\boxed{V_1 = V_4 + \Delta V_0}$

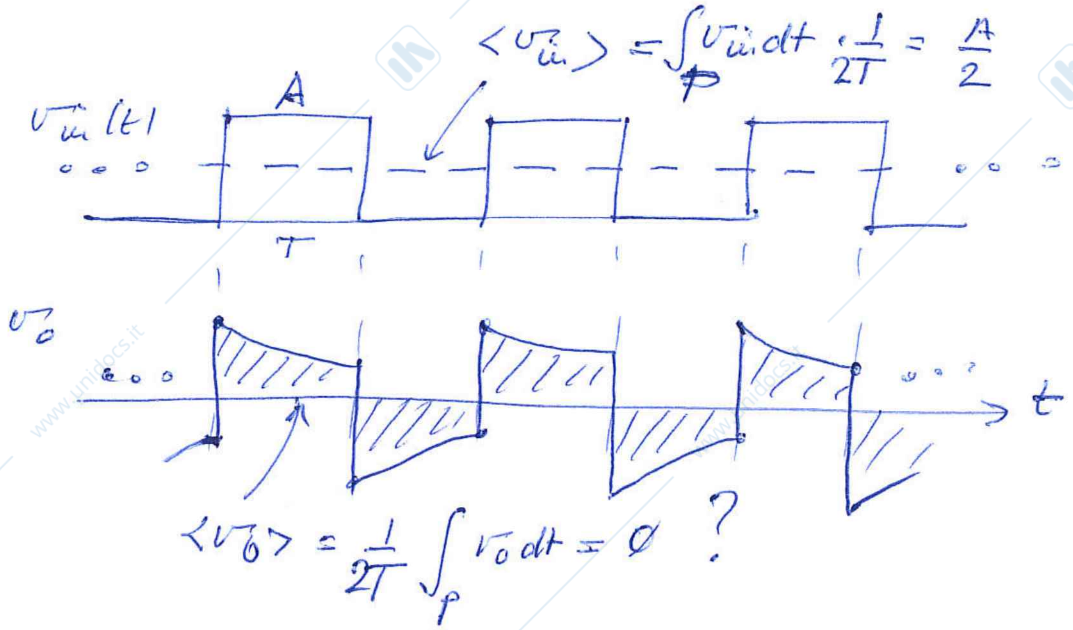
$$\Rightarrow \left(V_1 e^{-T/\tau} - \Delta V_0\right) e^{-T/\tau} + \Delta V_0 = V_1$$

$$\hookrightarrow \boxed{V_1 = \Delta V_0 \frac{\left(e^{-T/\tau} - 1\right)}{\left(e^{-2T/\tau} - 1\right)}} \xrightarrow[\frac{T}{\tau} \ll 1]{} \sim \Delta V_0 \frac{\cancel{T/\tau}}{\cancel{2T/\tau}} = \frac{\Delta V_0}{2}$$

Posso anche verificare il valore di V_3:

$$\boxed{V_3} = V_1 e^{-T/\tau} - \Delta v_0 \overset{\overset{V_1}{\downarrow}}{=} \boxed{-\Delta v_0 \frac{(e^{-T/\tau}-1)}{(e^{-2T/\tau}-1)}} = \boxed{-V_1}$$

che ci dice che i 2 tratti exp. sono simmetrici.



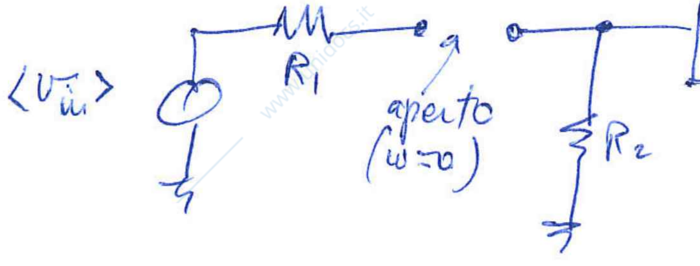
- VALOR MEDIO (MEDIA INTEGRALE SUL PERIODO) DI $v_0(t)$ (Detta anche la componente DC o in continua)

AVEVO GIÀ NOTATO CHE TUTTE LE v_0 CALCOLATE AVEVANO MEDIA NULLA !?

MA LA COMPONENTE DC DI UN SEGNALE è una delle componenti del suo SPETTRO DI FREQUENZA, in particolare la componente a $\omega = \emptyset$ (in continua, appunto).

IMMAGINANDO i segnali scomposti nelle loro armoniche componenti, POSSO RISOLVERE LA RISPOSTA del circuito alla sola componente DC ($\omega = 0$) dell'ingresso.

Per questo "impongo" $\omega = 0$ SUL CIRCUITO, CHE significa il condensatore è un circuito aperto:



$\boxed{\langle v_0 \rangle = \emptyset}$ (ovviamente $\forall \langle v_{in} \rangle$)

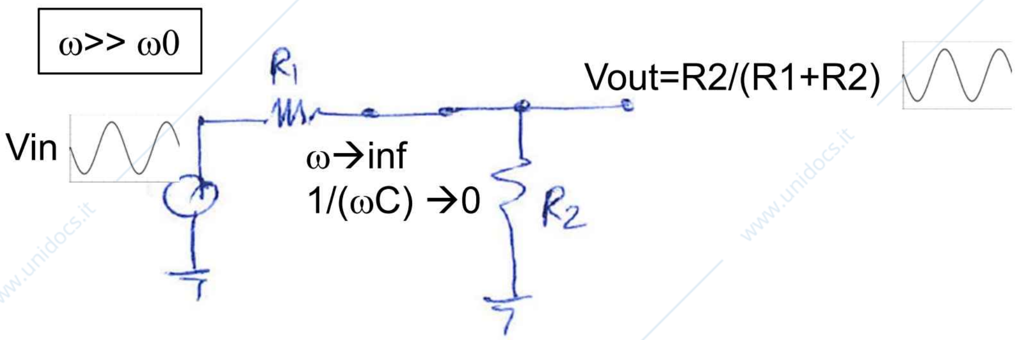
l'Analisi in frequenza mostrerà facilmente il carattere PASSA-ALTO di questo circuito.

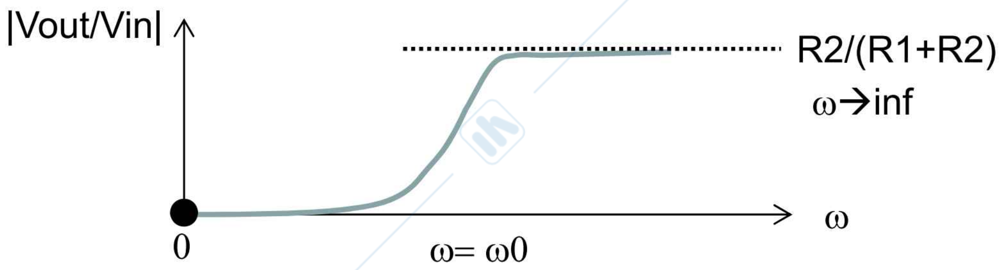
FILTRO PASSA-ALTO: il nome si riferisce all'azione del filtro sulle componenti armoniche del segnale di ingresso.
Rispetto ad una frequenza caratteristica del circuito ($\omega 0=1/\tau$), le componenti armoniche di Vin(t) con frequenza molto maggiore $\omega >> \omega 0$ (alta frequenza) vengono 'trasmesse' all'uscita, mentre quelle a frequenze inferiori ($\omega << \omega 0$) vengono 'bloccate'.

In generale, ci si rende conto dell'azione di 'filtraggio' sulle componenti armoniche del segnale di ingresso calcolando ad es. il trasferimento (o guadagno) Vout/Vin del circuito per una generica armonica in ingresso, con parametro la frequenza ω che facciamo variare da 0 a infinito.

Limitiamoci qui a verificare il trasferimento Vout/Vin del circuito in esame agli estremi dello spettro:

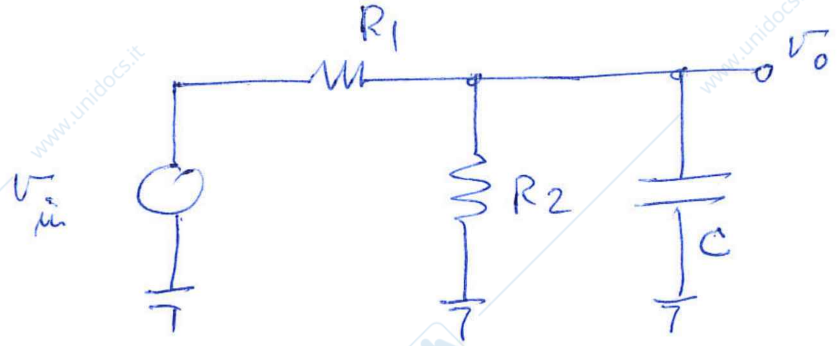
i) in continua ($\omega=0$, C aperta) abbiamo gia' verificato trasferimento Vout/Vin nullo.
ii) All'estremo opposto (alta frequenza $\omega >> \omega 0$), assumiamo per semplicita' ω=inf. Qui C si comporta con un cortocircuito ($1/(\omega C) \rightarrow 0$) e il trasferimento del circuito tende ad un valore finito Vout/Vin($\omega \rightarrow$inf)=R2/(R1+R2).





Cio' conferma il carattere passa-alto del circuito.

ESEMPIO #2



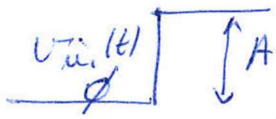
$A = 1\,V$

$R_1 = 10k\Omega$

$R_2 = 30k\Omega$

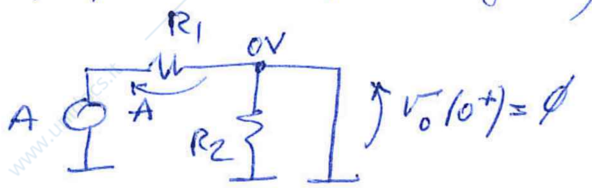
$C = 1\,pF$

I) RISPOSTA AL GRADINO



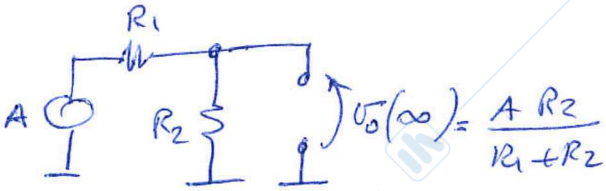
$t=0^-$: $v_o(0^-) = v_C(0^-) = \emptyset$ $\quad (v_{in}(0^-) = \emptyset,\ i(0^-) = \emptyset$ a regime$)$

$t=0^+$: $v_o(0^+) = v_o(0^-) = \emptyset$

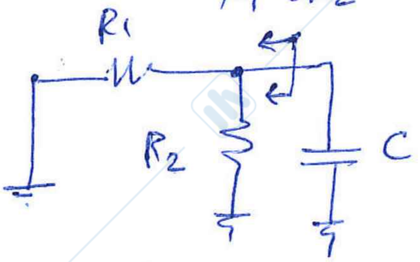


$t \to \infty$: $i_c(\infty) = \emptyset$

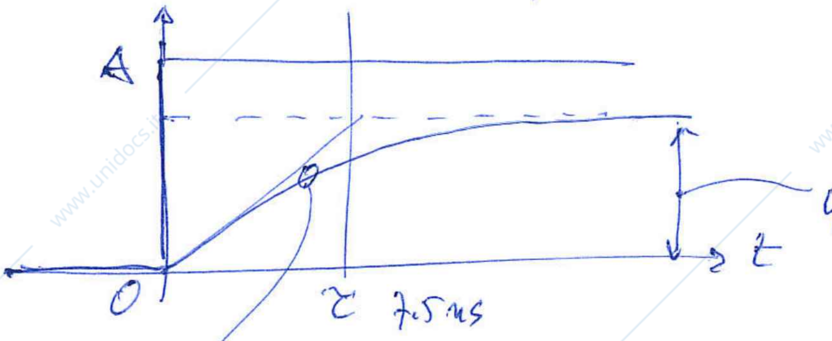
$$v_o(\infty) = A\,\frac{R_2}{R_1+R_2} = 0.75V$$



τ



$$\Rightarrow \tau = C\,(R_1 \| R_2) = 1\,pF \times 7.5k\Omega = 7.5\,ns$$

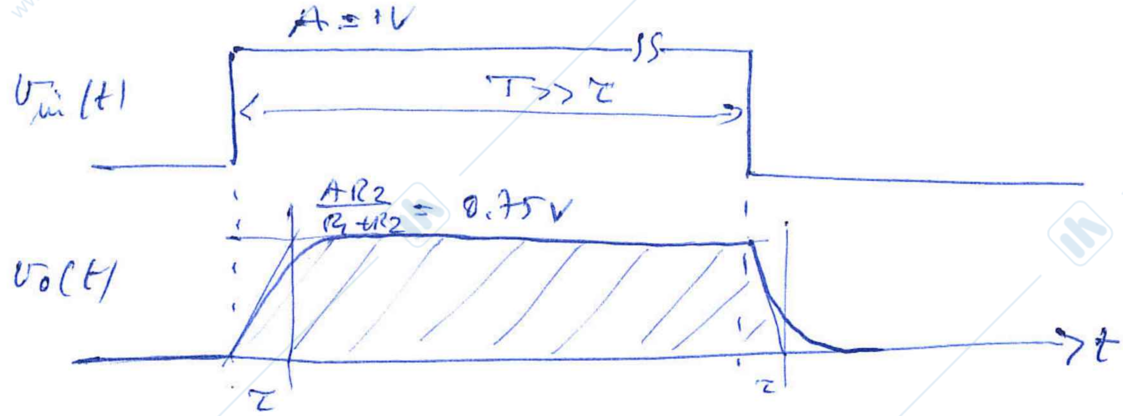


$$v_o(\infty) = \frac{A\,R_2}{R_1+R_2} = 0.75V$$

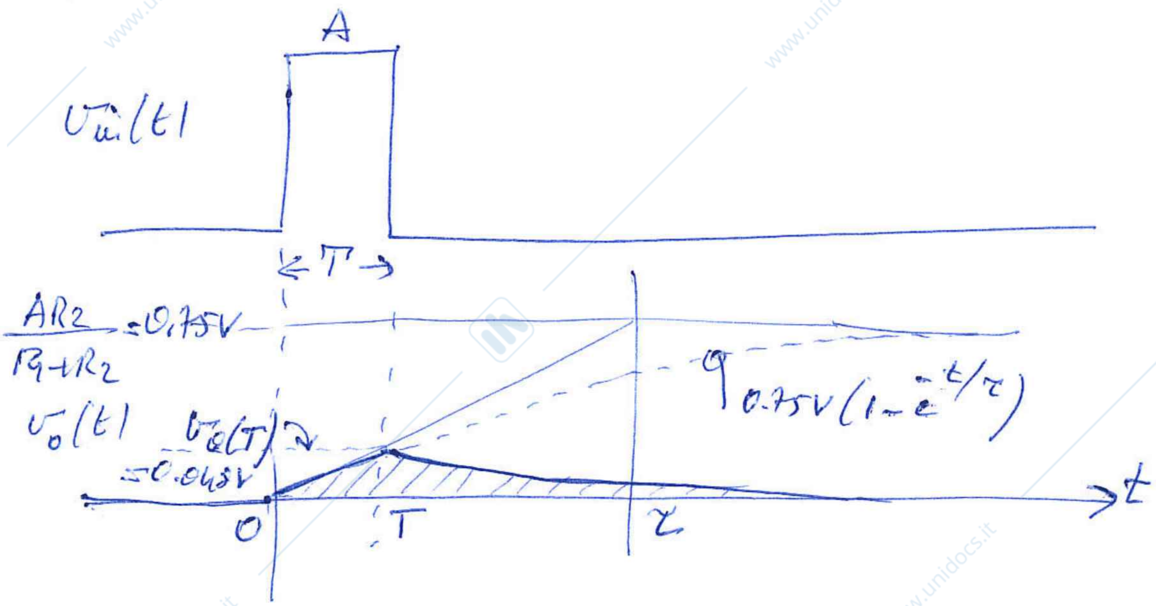
$$v_o(t) = \frac{A R_2}{R_1+R_2}\left(1-e^{-t/\tau}\right) = 0.75V\left(1-e^{-t/\tau}\right) \quad (t \geq 0)$$

[2] RETTANGOLO

$\boxed{T = 10\,\mu s}$ → $T \gg \tau = 7.5\,ns$ $\quad (T \sim 1333 \times \tau)$



$\boxed{T = 0.5\,ns}$ → $T \ll \tau = 7.5\,ns$ $\quad (T \simeq \frac{1}{15}\tau)$



↳ $v_o(T) = 0.75V \times (1 - e^{-T/\tau}) \simeq 0.048\,V$

[oppure $v_o(T) \underset{\uparrow}{\simeq} 0.75V \times \left[1 - \left(1 - \frac{T}{\tau} + \cancel{\frac{1}{2}\frac{T^2}{\tau^2}} + \dots\right)\right] = 0.75V \times \frac{T}{\tau} =$

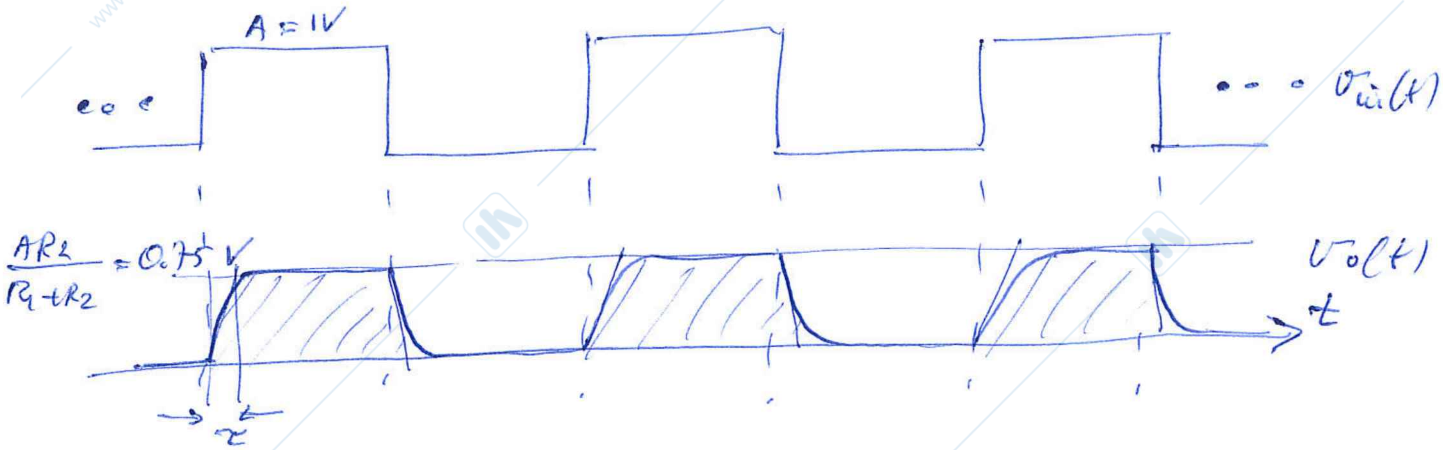
$\frac{T}{\tau} = \frac{1}{15} \ll 1$ $\quad$ Taylor, 1° ord. $\quad = 0.05V$]

↳ $v_o(\infty) = \emptyset$

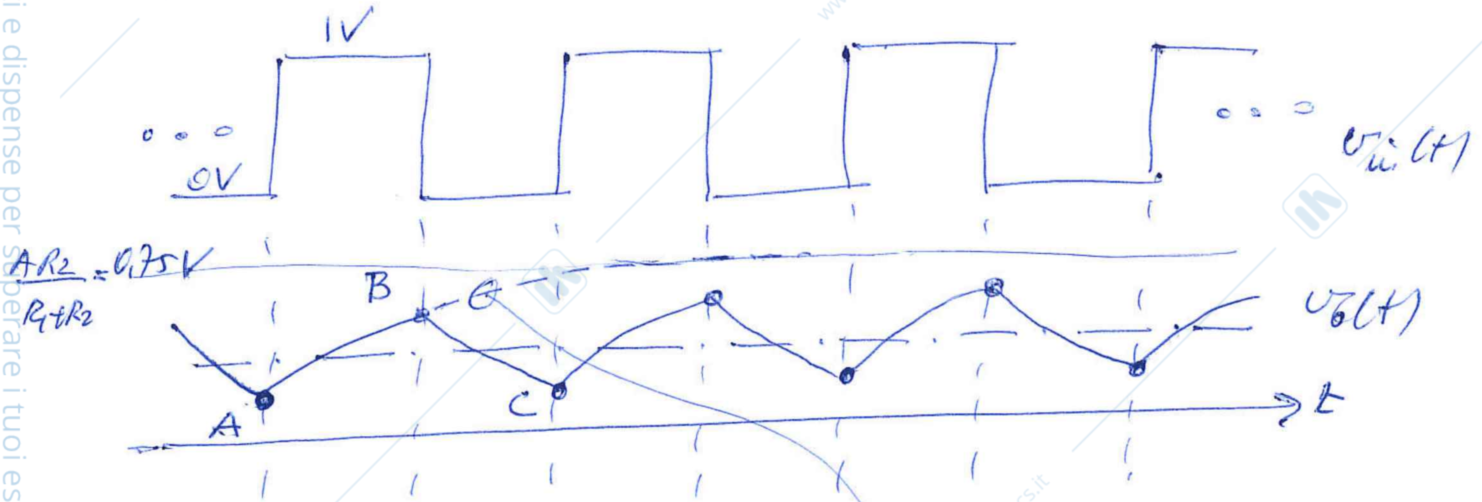
↳ $v_o(t)\big|_{t \geq T} = v_o(T) \times e^{-(t-T)/\tau}$

B] ONDA QUADRA (INDEFinita)

$\boxed{T = 10\mu s} \gg \tau$



$\boxed{T = 0.5 ms} \ll \tau$

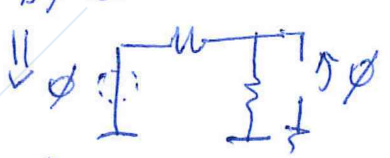


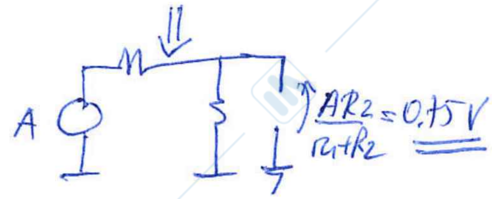
$t = t_A$: assumo $v_o(t_A) = V_A$

Equazione del tratto $\overline{AB}$: $v_o(t) = V_A + (0.75V - V_A)(1 - e^{-t/\tau})$ [per $t_A < t < t_B$]

$t = t_B$: $v_o(t_B) = V_A + (0.75 - V_A)(1 - e^{-T/\tau})$

$t = t_C$: $v_o(t_C) = v_o(t_B)\, e^{-T/\tau}$





IMPONGO LA PERIODICITA': $v_o(t_A) = v_o(t_C)$

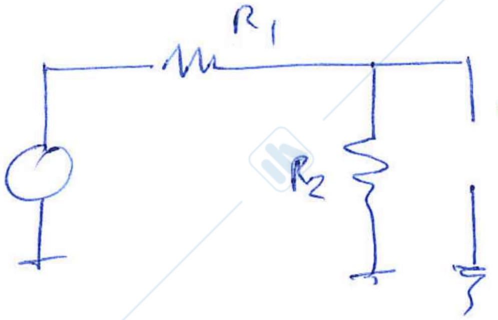
$$V_A = \left[V_A + (0.75 - V_A)(1 - e^{-T/\tau})\right] e^{-T/\tau}$$

$$\rightarrow \boxed{V_A = 0.75V \cdot \frac{(e^{-2T/\tau} - e^{-T/\tau})}{(e^{-2T/\tau} - 1)}} \rightarrow \underline{0.3625V}$$

$$v_o(t_B) = V_A e^{+T/\tau} = \underline{0.3875V}$$

- Valor medio v_0 ?

Lo calcolo valutando il trasferimento del circuito in DC ($\omega = 0$).



$$\langle v_{in} \rangle = \frac{A}{2}$$

$$\langle v_0 \rangle = \frac{A}{2} \frac{R_2}{R_1+R_2} = 0.375V$$

OK

Avremmo potuto trovarlo facendo il valor medio di $v_0(t_A)$ e $v_0(t_B)$:

$$\langle v_0 \rangle = \frac{1}{2}\left(v_0(t_A) + v_0(t_B)\right) = \frac{1}{2}\left(0.3625 + 0.3875V\right) = 0.375V$$

- in questo caso il valor medio è trasferito in uscita (attenuato dal partitore R_1 / R_2).

Il circuito, dal punto di vista delle componenti armoniche, si comporta come FILTRO PASSA-BASSO.