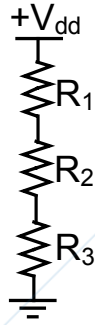


**Esercizio 1**

Si consideri il seguente circuito:



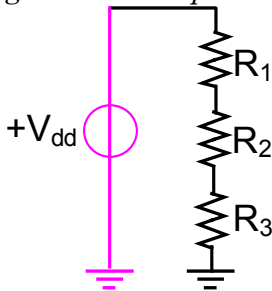
$$\begin{aligned} V_{dd} &= 5V \\ R_1 &= 400k\Omega \\ R_2 &= 500k\Omega \\ R_3 &= 100k\Omega \end{aligned}$$

1. Si calcoli la tensione ai capi della resistenza  $R_2$ .
2. Si supponga di misurare tale differenza di potenziale con un voltmetro caratterizzato da una resistenza di ingresso  $R=10M\Omega$ . Quale tensione si misura effettivamente?

**Soluzione**

1.

Il circuito puo' essere ridisegnato come segue, abitatevi pero' a non dover ridisegnare il generatore impressivo di tensione.

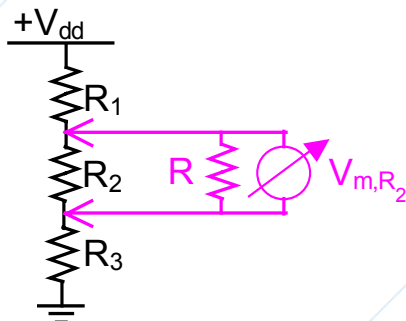


La tensione ai capi della resistenza  $R_2$  puo' essere, quindi, calcolata mediante la regola del partitore di tensione:

$$V_2 = \frac{\overbrace{R_2}^{\text{resistenza su cui valuto la ddp}}}{\underbrace{R_2 + R_1 + R_3}_{\text{resistenza totale del ramo}}} V_{dd} = +2.5V$$

2.

Il voltmetro reale puo' essere schematizzato come un voltmetro ideale (cioe' caratterizzato da resistenza di ingresso infinita e, quindi, assorbente corrente nulla) a cui e' posta in parallelo la resistenza  $R=10M\Omega$ .

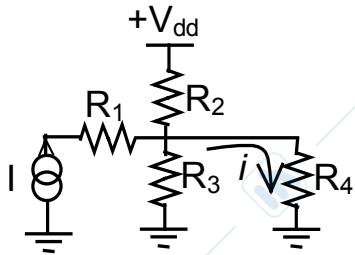


Ancora una volta la tensione puo' essere, quindi, calcolata mediante la regola del partitore di tensione:

$$V_2 = \frac{R_2 // R}{R_2 // R + R_1 + R_3} V_{dd} = +2.44V$$

**Esercizio 2**

Si consideri il seguente circuito:



$$V_{dd}=5V$$

$$R_1=400k\Omega$$

$$R_2=500k\Omega$$

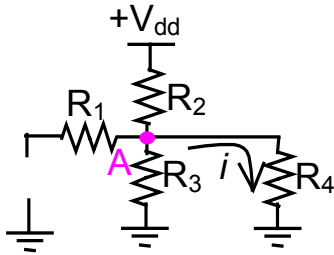
$$R_3=100k\Omega$$

1. Si calcoli la corrente  $i$  che fluisce nella resistenza  $R_4$ .
2. Si supponga di misurare tale corrente  $i$  mediante un amperometro caratterizzato da una resistenza di ingresso  $R=500\Omega$ . Quale corrente si misura effettivamente? Quale è la caduta di tensione ai capi dell'amperometro?

**Soluzione**

1.

Il circuito è lineare, possiamo pertanto applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Spegliamo il generatore di corrente  $I$  (n.b. spegnere un generatore di corrente significa sostituirlo con un circuito aperto).

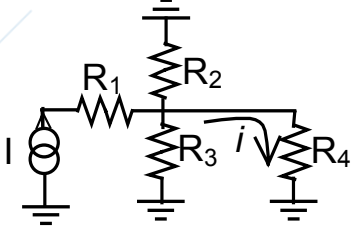


$$i_{R_2} = \frac{V_{dd}}{R_2 + R_3 \parallel R_4} = 910\mu A$$

Applichiamo la regola del partitore di corrente al nodo A

$$i_V = \frac{\overbrace{R_3}^{\text{resistenza in cui non vado}}}{\underbrace{R_3 + R_4}_{\text{somma delle resistenze afferenti al nodo}}} i_{R_2} = 827\mu A$$

Spegliamo ora il generatore di tensione  $V_{dd}$  (n.b. spegnere un generatore di tensione significa sostituirlo con un corto circuito).



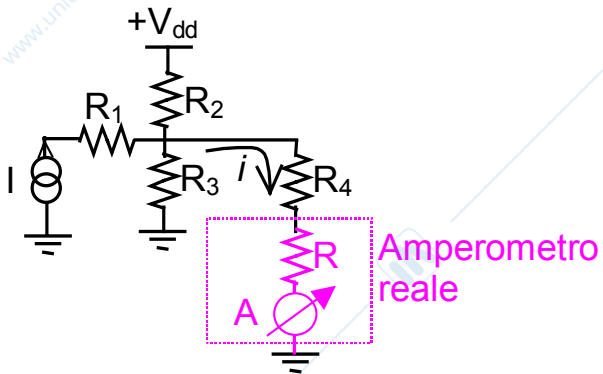
$$i_I = \frac{R_2 \parallel R_3}{R_4 + R_2 \parallel R_3} I = 1.7mA$$

La corrente  $i$  che fluisce nella resistenza  $R_4$  è, quindi, data da:

$$i = i_V + i_I = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \frac{V_{dd}}{R_2 + R_3 \parallel R_4} + \frac{R_2 \parallel R_3}{R_4 + R_2 \parallel R_3} I = 2.53mA$$

2.

L'amperometro reale può essere schematizzato come un amperometro ideale (cioè caratterizzato da resistenza di ingresso nulla e, quindi, con caduta di tensione nulla ai suoi capi) a cui è posta in serie la resistenza  $R=500\Omega$ .



La corrente misurata sarà data da:

$$i = i_V + i_I = \frac{R_3}{R_3 + R_4 + R} \frac{V_{dd}}{R_2 + R_3 \parallel (R_4 + R)} + \frac{R_2 \parallel R_3}{R_4 + R + R_2 \parallel R_3} I = 2.30mA$$

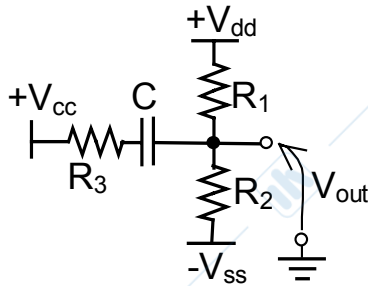
e la caduta di tensione ai capi dell'amperometro e'

$$\Delta V_{\text{amperometro}} = i \cdot R = 1.15V$$

ben lontana dalla caduta di tensione nulla che si avrebbe nel caso ideale!

**Esercizio 3**

Si consideri il seguente circuito:



$$\begin{aligned} V_{dd} &= +6V \\ -V_{ss} &= -6V \\ R_1 &= 800k\Omega \\ R_2 &= 400k\Omega \\ R_3 &= 10k\Omega \\ C &= 1\mu F \end{aligned}$$

1. Si calcoli la tensione  $V_{out}$ .
2. Si determini come cambia la tensione di uscita se si connette dall'uscita verso massa una resistenza di carico  $R_L=10k\Omega$ .

**Soluzione**

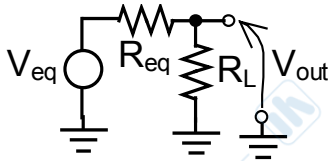
1.

I generatori sono tutti in continua, quindi il condensatore, scarico, e' un circuito aperto:

$$V_{out} = -V_{ss} + \frac{R_2}{R_2 + R_1} (V_{dd} + V_{ss}) = -2V$$

2.

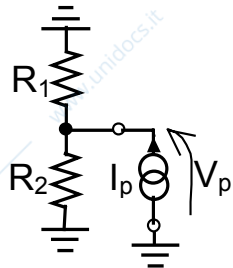
Per rispondere velocemente calcoliamo l'equivalente Thevenin del circuito e ad esso connettiamo la resistenza di carico.



$$V_{out} = \frac{R_L}{R_{eq} + R_L} V_{eq}$$

Siamo sempre in continua, quindi il condensatore e' un circuito aperto.

Per calcolare la resistenza equivalente  $R_{eq}$  spegniamo tutti i generatori forzanti (INDIPENDENTI!!) e calcoliamo la resistenza vista al morsetto verso massa. Per definizione applichiamo un generatore di prova di corrente (o di tensione) e misuriamo la tensione ai suoi capi (la corrente che lo attraversa). La resistenza equivalente sara' data dal rapporto tra tale tensione e tale corrente.



$$R_{eq} = \frac{V_p}{i_p} = R_1 // R_2 = 267k\Omega$$

Per calcolare la tensione equivalente Thevenin dobbiamo calcolare la tensione ai morsetti A VUOTO, cioe' quando tra i due morsetti non fluisce corrente. Tale tensione coincide con la tensione gia' calcolata al punto 1.

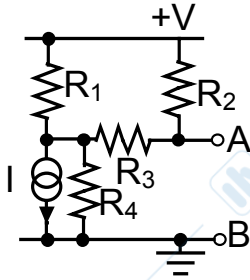
$$V_{eq} = -V_{ss} + \frac{R_2}{R_2 + R_1} (V_{dd} + V_{ss}) = -2V$$

Allora si avra':

$$V_{out} = \frac{R_L}{R_{eq} + R_L} V_{eq} = -72mV !!$$

### Esercizio 4

Si consideri il seguente circuito:



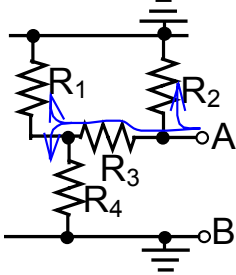
- $V=+5V$
- $R_1=1k\Omega$
- $R_2=500\Omega$
- $R_3=500\Omega$
- $R_4=500\Omega$
- $I=8mA$

1. Si calcoli l'equivalente Norton ai morsetti A e B.
2. Si determini il valore della resistenza di carico  $R_L$  che, inserita tra i morsetti A e B, assorbe la massima potenza e si calcoli l'ammontare di tale potenza.

### Soluzione

1.

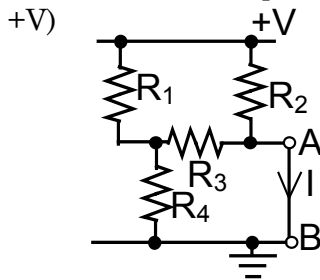
Per calcolare la resistenza equivalente  $R_{eq}$  spegniamo tutti i generatori forzanti (INDIPENDENTI!!) e calcoliamo la resistenza vista al morsetto verso massa. Per definizione applichiamo un generatore di prova di corrente (o di tensione) e misuriamo la tensione ai suoi capi (la corrente che lo attraversa). La resistenza equivalente sarà data dal rapporto tra tale tensione e tale corrente o più velocemente possiamo vedere "a occhio" tutti i possibili cammini fatti dalla corrente per andare da A a B (illustrati dalle frecce in figura).



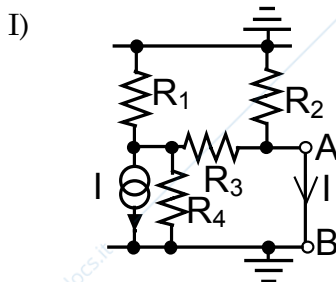
$$R_{eq} = \frac{v_p}{i_p} = R_2 \parallel (R_3 + R_1 \parallel R_4) = 312.5\Omega$$

Per calcolare la corrente equivalente Norton dobbiamo calcolare la corrente di cortocircuito tra i morsetti, cioè quella corrente che fluisce quando tra i due morsetti non si ha caduta di tensione.

Trattandosi di una rete lineare possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.



$$I = \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_1 + R_4 \parallel R_3} \frac{R_4}{R_4 + R_3} = 12mA$$



$$I = -I \frac{R_1 \parallel R_4}{R_3 + R_1 \parallel R_4} = -3.2mA$$

$$I_{eq} = +12mA - 3.2mA = +8.8mA$$

2.

La potenza dissipata nella resistenza  $R_L$  e' data da:

$$P_{diss} = I^2 R_L = \left( I_{eq} \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_L} \right)^2 R_L = I_{eq}^2 \frac{R_{eq}^2 R_L}{(R_{eq} + R_L)^2}$$

Calcoliamo per quale valore della resistenza  $R_L$  tale potenza e' massima:

$$\frac{\partial P_{diss}}{\partial R_L} = I_{eq}^2 \frac{R_{eq}^2 \left\{ (R_{eq} + R_L)^2 - 2(R_{eq} + R_L)R_L \right\}}{(R_{eq} + R_L)^2}$$

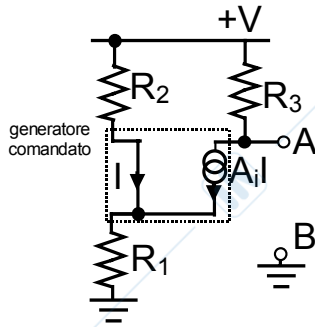
$$\frac{\partial P_{diss}}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow R_L = R_{eq}$$

e la potenza dissipata vale

$$P_{diss} = I_{eq}^2 \frac{R_{eq}}{2} = 3.2mW$$

### Esercizio 5

Si consideri il seguente circuito:



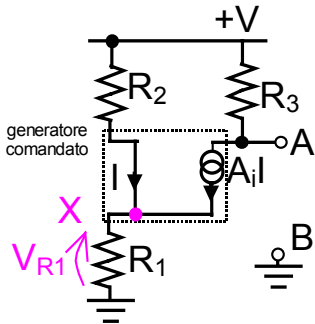
- $V=+10V$
- $R_1=100\Omega$
- $R_2=3.9k\Omega$
- $R_3=250\Omega$
- $A_i=10$

1. Si calcoli la corrente erogata dal generatore V.
2. Si ricavi il circuito equivalente Thevenin ai morsetti A e B.

### Soluzione

1.

Siamo al cospetto di un circuito in cui e' presente un generatore comandato. Per calcolare la corrente erogata dal generatore (+V) facciamo il bilancio di corrente al nodo X



$$\begin{cases} I + A_i I = \frac{V_{R_1}}{R_1} \Rightarrow I + A_i I = \frac{V - IR_2}{R_1} \\ V_{R_1} = V - IR_2 \end{cases}$$

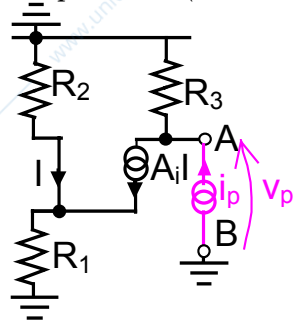
$$I = \frac{V}{R_1 \left( 1 + A_i + \frac{R_2}{R_1} \right)} = 2mA$$

La corrente erogata dal generatore V e' la somma della corrente nei due rami:

$$I_{TOT} = I + A_i I = 22mA$$

2.

Per calcolare l'equivalente Thevenin dobbiamo calcolare la resistenza equivalente e la tensione a vuoto. Per calcolare la resistenza equivalente occorre spegnere i generatori forzanti indipendenti (NON SPEGNIAMO IL GENERATORE COMANDATO!!).



$$R_{eq} = \frac{v_p}{i_p}$$

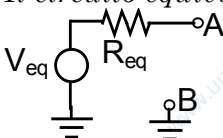
$$\begin{cases} i_p = A_i I + \frac{v_p}{R_3} \\ I + A_i I + I_{R_1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} I = 0 \\ \frac{v_p}{R_3} = R_3 = R_{eq} \\ \frac{i_p}{i_p} \end{cases} \\ I_{R_1} = I \frac{R_2}{R_1} \end{cases}$$

La tensione a vuoto e' data da

$$v_{eq} = V - A_i IR_3 = +5V$$

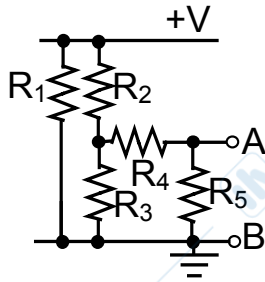
dove abbiamo usato il valore di I gia' calcolato al punto 1.

Il circuito equivalente Thevenin risulta



**Esercizio 6**

Si consideri il seguente circuito:



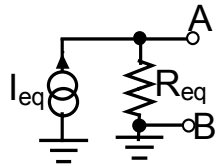
$$\begin{aligned} V &= +10V \\ R_1 &= 2.2k\Omega \\ R_2 &= 1.8k\Omega \\ R_3 &= 1.8k\Omega \\ R_4 &= 4.7k\Omega \\ R_5 &= 5.6k\Omega \end{aligned}$$

1. Si ricavi il circuito equivalente Norton ai morsetti A e B.
2. Si determini il valore di potenza dissipata da una resistenza di carico, di valore  $R_L = 1.8k\Omega$ , inserita tra i morsetti A e B.
3. Per aumentare la potenza dissipata dal carico occorre aumentare o diminuire il valore della resistenza  $R_L$ ?

**Soluzione**

1.

L'equivalente Norton e' dato da:



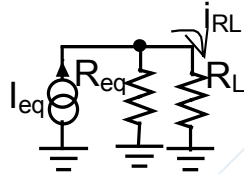
$$R_{eq} = R_5 \parallel (R_4 + R_2 \parallel R_3) = 2.8k\Omega$$

$$I_{eq} = \frac{V}{R_4 \parallel R_3 + R_2} \frac{R_3}{R_3 + R_4} = 893\mu A$$

2.

Sfruttiamo l'equivalente Norton gia' calcolato per rispondere alla domanda

Applicando la regola del partitore di corrente:



$$i_{R_L} = I_{eq} \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_L} = 544\mu A$$

La potenza dissipata e' data da

$$P_{diss} = i_{R_L}^2 R_L = 533\mu W$$

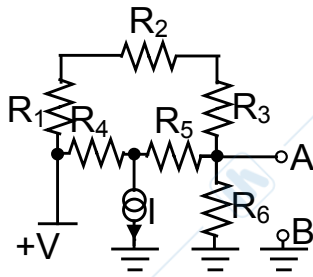
3.

Per aumentare la potenza dissipata occorre diminuire il valore della resistenza  $R_L$ , infatti:

$$P_{diss} = i_{R_L}^2 R_L = I_{eq}^2 \frac{R_{eq}^2}{(R_{eq} + R_L)^2} R_L \approx \frac{R_L}{(R_{eq} + R_L)^2} \approx \frac{R_L}{(R_L)^2} \approx \frac{1}{R_L}$$

### Esercizio 7

Si consideri il seguente circuito:



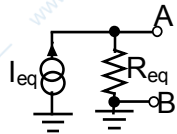
- $V = +7.5V$
- $I = 1mA$
- $R_1 = 1.2k\Omega$
- $R_2 = 2.2k\Omega$
- $R_3 = 3.3k\Omega$
- $R_4 = 1.5k\Omega$
- $R_5 = 1k\Omega$
- $R_6 = 1.8k\Omega$

1. Si ricavi il circuito equivalente Norton ai morsetti A e B.
2. Si ricavi il circuito equivalente Thevenin ai morsetti A e B.

### Soluzione

1. e 2.

L'equivalente Norton e' dato da:

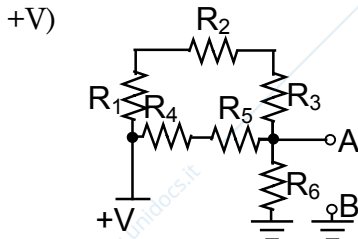


$$R_{eq} = R_6 // (R_4 + R_5) // (R_1 + R_2 + R_3) = 908\Omega$$

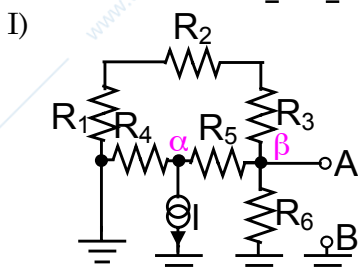
Per calcolare la corrente  $I_{eq}$  possiamo calcolare la tensione equivalente Thevenin (se sembra piu' semplice e visto che e' richiesta al punto 2.) ed ottenere la corrente tramite la relazione che lega i circuiti equivalenti Thevenin e Norton:

$$I_{eq} = \frac{V_{eq}}{R_{eq}}$$

Trattandosi di una rete lineare possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti per calcolare  $V_{eq}$ :



$$V_{eq}|_V = \frac{R_6}{R_6 + (R_1 + R_2 + R_3) // (R_4 + R_5)} V = 3.73V$$



$$V_{eq}|_I = -I \underbrace{\frac{R_4}{R_4 + [R_5 + R_6 // (R_1 + R_2 + R_3)]}}_{\text{partitore di corrente al nodo } \alpha} \cdot \underbrace{\frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_6 + R_1 + R_2 + R_3}}_{\text{partitore di corrente al nodo } \beta} R_6 = -0.54V$$

$$V_{eq} = V_{eq}|_V + V_{eq}|_I = 3.19V$$

$$I_{eq} = \frac{V_{eq}}{R_{eq}} = 3.5mA$$

Il circuito equivalente Thevenin sara' dato da:

