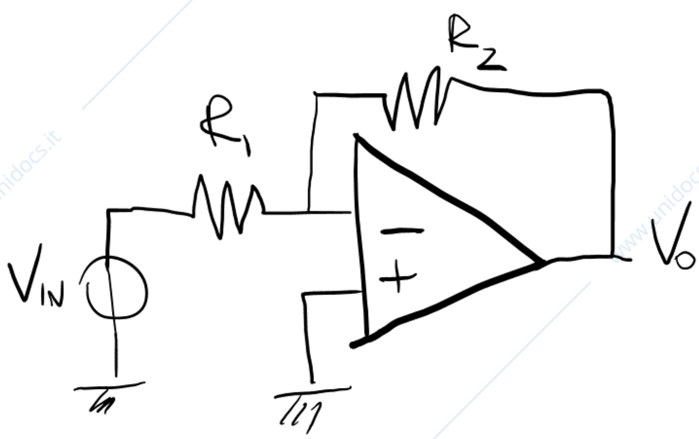
Fondamenti di Elettronica per Ingegneria dell'Automazione

Esercitazione 9

Ing. Pietro King

1)



R1 = 1 kΩ

R2 = 10 kΩ

$\boldsymbol{A_0 = 10^5}$

GBWP = 10 MHz

a) *Calcolare il guadagno ideale del circuito*
b) *Calcolare il Gloop, assumendo che l'amplificatore operazionale abbia un guadagno in continua* $A_0 = 10^5$ *e prodotto guadagno banda GBWP = 10 MHz*
c) *Calcolare il Greale*

a)

Il circuito è in retroazione negativa:

$$V^+ = V^-$$

$$V^+ = 0 = V^-$$

$$I_{R1} = I_{R2}$$

$$\frac{Vin - V^-}{R1} = \frac{V^- - Vout}{R2}$$

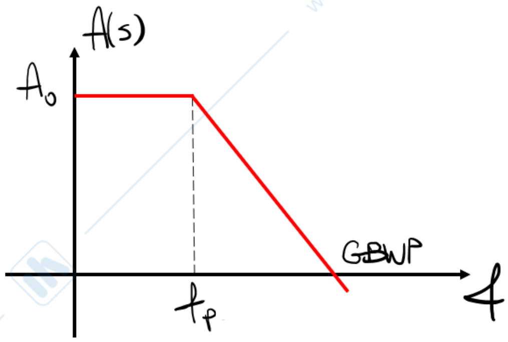
$$\frac{Vin}{R1} = -\frac{Vout}{R2}$$

$$\frac{Vout}{Vin} = -\frac{R2}{R1} = -10$$

$$|G_{id}| = \frac{R2}{R1} = 10$$

b)
L'amplificatore operazionale ha un guadagno in continua $A_0 = 10^5$ e prodotto guadagno banda GBWP = 10 MHz. La sua funzione di trasferimento è così rappresentata:

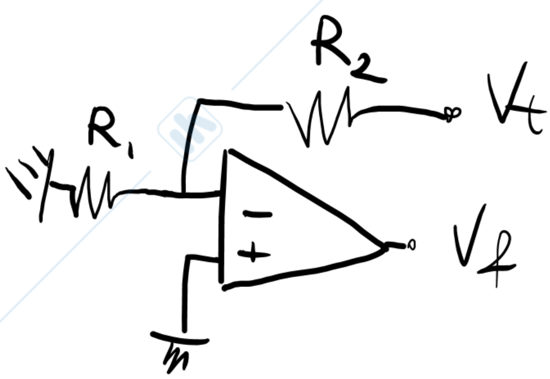
$$A(s) = A_0 \frac{1}{1 + s\tau_0}$$



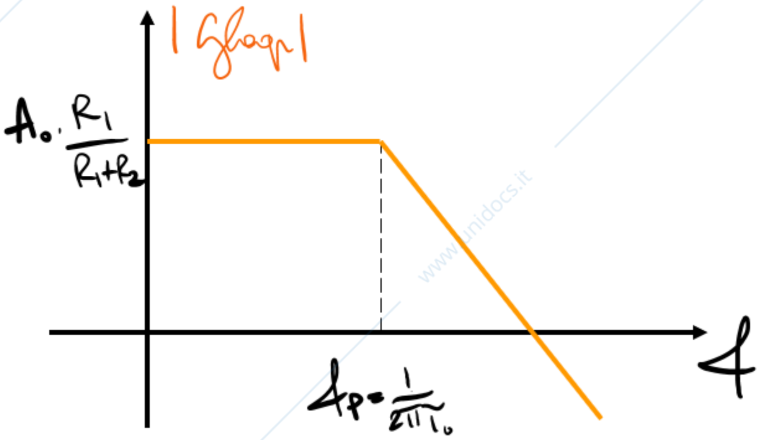
La frequenza di polo dell'amplificatore può essere ricavata dal prodotto guadagno banda:

$$f_p = \frac{1}{2\pi\tau_0} = \frac{GBWP}{A_0} = \frac{10\ MHz}{10^5} = 100\ Hz$$

Per calcolare il Gloop, spegniamo tutti i generatori indipendenti, "tagliamo" il circuito all'uscita dell'amplificatore e poniamo una sonda V_{test} e calcoliamo la tensione $V_{feedback}$



$$V^{+} = 0$$
$$V^{-} = \frac{R1}{R1 + R2} Vt$$
$$V_f = A(s) \cdot (V^{+} - V^{-}) = -A(s) \frac{R1}{R1 + R2} Vt$$
$$Gloop = \frac{V_f}{Vt} = -A(s) \frac{R1}{R1 + R2}$$
$$Gloop = -A_0 \frac{R1}{R1 + R2} \frac{1}{1 + s\tau_0}$$

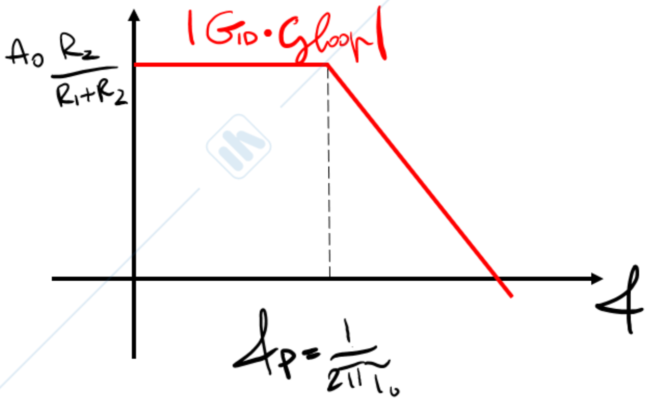


c)
Sappiamo che Greale:

$$G_{reale} = G_{ideale} \frac{-G_{loop}}{1 - G_{loop}}$$

Quindi, fintanto che $|Gloop| \ll 1$, possiamo approssimare Greale a:
$$G_{reale} \approx -G_{ideale} \cdot G_{loop}$$
Mentre se $|Gloop| \gg 1$
$$G_{reale} \approx G_{ideale}$$

Calcolando $|G_{id} G_{loop}| = \frac{R2}{R1} A_0 \frac{R1}{R1+R2} \frac{1}{1+s\tau_0} = A_0 \frac{R2}{R1+R2} \frac{1}{1+s\tau_0}$



Disegnando sullo stesso grafico $|G_{id}G_{loop}|$ e $|G_{id}|$

Nel punto in cui le due curve si incontrano (che chiameremo f_{CL}) abbiamo $|G_{id}G_{loop}| = |G_{id}|$, quindi

$$|G_{loop}(f_{CL})| = 1$$

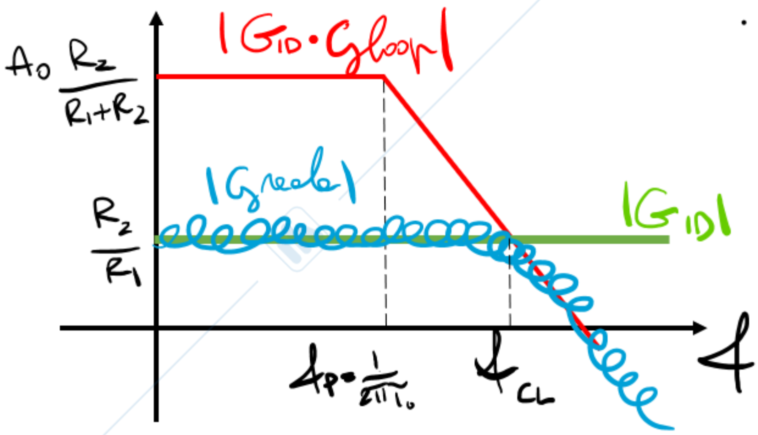
$$f_{CL} = A_0 \frac{R1}{R1 + R2} f_p = 10^5 \frac{1}{11} 100\ Hz = 909\ kHz$$

Quindi a sinistra di f_{CL} avremo $|G_{loop}| > 1$, mentre a destra $|G_{loop}| < 1$

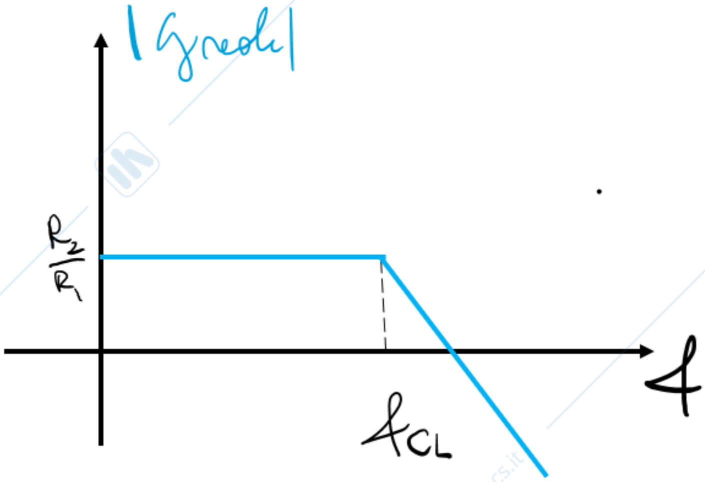
Dalla approssimazione che abbiamo calcolato precedentemente, abbiamo detto che

$$|G_{reale}| = \begin{cases} |G_{ideale}| & per\ |Gloop| \gg 1 \\ |G_{ideale} \cdot G_{loop}| & per\ |Gloop| \ll 1 \end{cases}$$

Quindi, approssimando il comportamento di $|G_{reale}|$:
si comporterà come $|G_{ideale}|$ per frequenze inferiori a f_{CL}, mentre come $|G_{ideale} \cdot G_{loop}|$ per frequenze superiori.

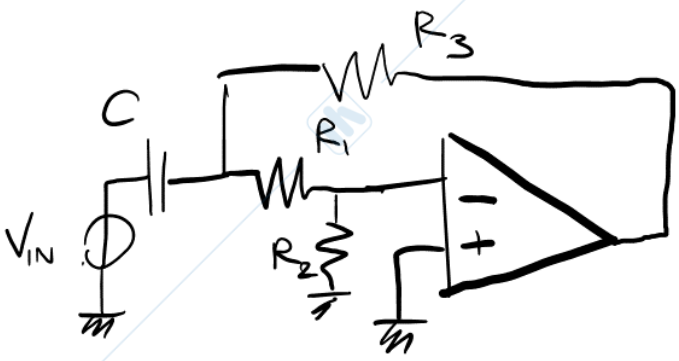


In conclusione, possiamo disegnare il grafico di G_{reale}:



$$\frac{R2}{R1} = 10$$
$$f_{CL} = 909\ kHz$$

2)



R1 = 10 kΩ

R2 = 2 kΩ

R3 = 20 kΩ

C = 10 pF

$\boldsymbol{A_0 = 10^5}$

GBWP = 1.6 MHz

a) *Calcolare il guadagno ideale G(s) del circuito*
b) *Valutare l'effetto sull'uscita di una tensione di offset* $V_{os} = 0.5\ mV$
c) *Tracciare il diagramma di Bode del guadagno d'anello e commentare la stabilità del circuito*
d) *Tracciare il diagramma di Bode del guadagno reale del circuito*
e) *Assumendo uno slew rate di 0.1 V/us e una sinusoide di ingresso ampia 10 V, calcolare la massima frequenza affinché' non ci sia distorsione.*

a) G_{ideale}?

Sostituiamo C con la sua impedenza equivalente $Z_C = \frac{1}{sC}$

Il circuito e' in feedback negativo

$$V^+ = V^-$$

$$V^+ = 0 = V^-$$

$$V_{R2} = 0$$

$$I_{R2} = 0$$

$$I_{R1} = I^- = 0\ A$$

$$I_{Zc} = \frac{V_{in}}{\frac{1}{sC}} = V_{in} sC$$

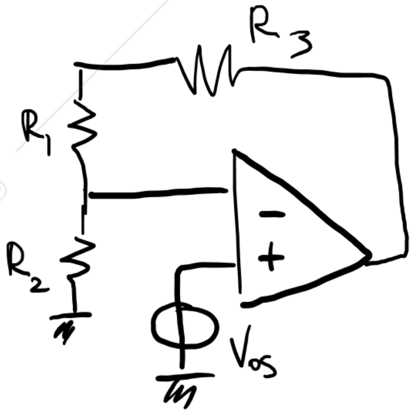
$$I_{R3} = I_{ZC}$$

$$V_{out} = -R3\, I_{R3} = -R3\, I_{ZC}$$

$$V_{out} = -sCR3\, V_{in}$$

$$G_{id} = \frac{V_{out}}{V_{in}} = -sCR3$$

b)



Calcoliamo l'impatto della tensione di offset in DC, quindi la capacità C è un circuito aperto.

Il circuito è in feedback negativo:

$$V^+ = V^-$$

$$V^+ = V_{os} = V^-$$

$$I_{R2} = \frac{V_{os}}{R2}$$

$$V_{out} - V_{os} = I_{R2}(R1 + R3)$$

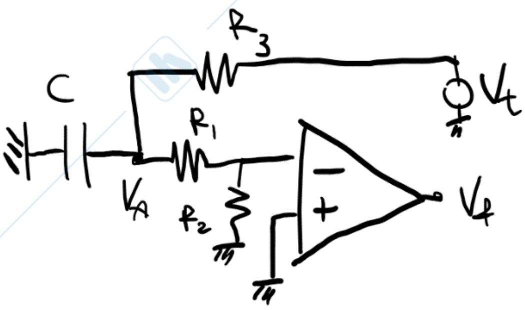
$$V_{out} = \left(1 + \frac{R1 + R3}{R2}\right) V_{os} = \left(1 + \frac{30}{2}\right) 0.5\, mV = 8\, mV$$

c) L'amplificatore operazionale ha un guadagno in continua $A_0 = 10^5$ e prodotto guadagno banda GBWP = 1.6 MHz. La sua funzione di trasferimento è così rappresentata:

$$A(s) = A_0 \frac{1}{1 + s\tau_0}$$

$$f_{p_0} = \frac{GBWP}{A_0} = \frac{1.6\, MHz}{10^5} = 16\, Hz\, ;\ \tau_0 = \frac{1}{2\pi f_{p_0}} = 10\, ms$$

Per calcolare il Gloop, taglio il circuito all'uscita dell'amplificatore operazionale



. Pongo Vtest e osservo come cambia Vfeedback.

$$V_A = \frac{(R1+R2)||\left(\frac{1}{sC}\right)}{R3 + \left((R1+R2)||\frac{1}{sC}\right)} V_t =$$

$$= \frac{\frac{(R1+R2)}{1+sC(R1+R2)}}{R3 + \frac{(R1+R2)}{1+sC(R1+R2)}} V_t =$$

$$= \frac{(R1+R2)}{R3\left(1+sC(R1+R2)\right)+(R1+R2)} V_t =$$

$$= \frac{(R1+R2)}{R1+R2+R3+sCR3(R1+R2)} V_t$$

$$V^- = \frac{R2}{R1+R2} V_A =$$

$$= \frac{R2}{(R1+R2)} \frac{(R1+R2)}{R1+R2+R3+sCR3(R1+R2)} V_t$$

$$= \frac{R2}{R1+R2+R3+sCR3(R1+R2)} V_t$$

$$= \frac{R2}{R1+R2+R3} \frac{1}{1+sC\frac{R3(R1+R2)}{R1+R2+R3}} V_t$$

$$= \frac{R2}{R1+R2+R3} \frac{1}{1+sC(R3||(R1+R2))} V_t$$

$$V_f = -A(s)\,V^- = -A(s)\frac{R2}{R1+R2+R3}\frac{1}{1+sC(R3||(R1+R2))} V_t$$

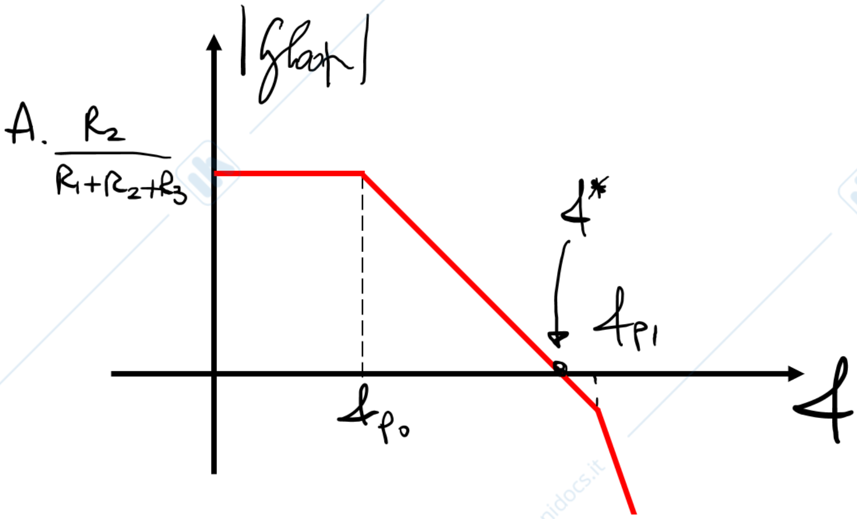
$$G_{loop} = \frac{V_f}{V_t} = -A(s)\frac{R2}{R1+R2+R3}\frac{1}{1+sC(R3||(R1+R2))}$$

$$G_{loop} = -A_0\frac{R2}{R1+R2+R3}\frac{1}{1+sC(R3||(R1+R2))}\frac{1}{1+s\tau_0}$$

Il Gloop presenta 2 poli:

$$f_{p0} = \frac{1}{2\pi\tau_0} = 16\ Hz$$

$$f_{p1} = \frac{1}{2\pi C(R3||(R1+R2))} = 2.12\ MHz$$

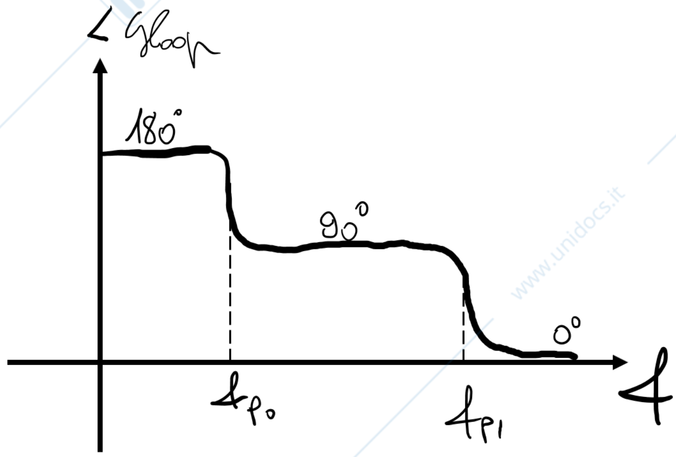


$$|G_{loop}(0)| = A_0 \frac{R2}{R1 + R2 + R3} = \frac{A_0}{16} = 6250$$

Possiamo trovare la frequenza f* in cui il |Gloop| = 1 col guadagno prodotto banda:

$$Gloop(0) f_{p0} = 1\, f^*$$

$$f^* = 100\ kHz$$



Possiamo calcolare il margine di fase

$$\varphi_m = 180° - arctg\left(\frac{f^*}{f_{p0}}\right) - arctg\left(\frac{f^*}{f_{p1}}\right) =$$

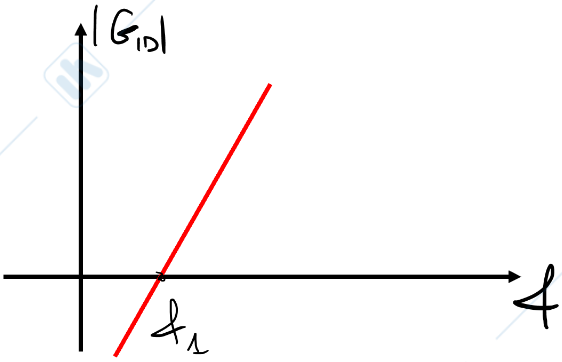
$$= 180° - arctg\left(\frac{100\ kHz}{16\ Hz}\right) - arctg\left(\frac{100\ kHz}{2.1\ MHz}\right) =$$

$$\varphi_m = 87.3\,° > 45°$$

Il circuito è stabile.

d) G_{reale}?

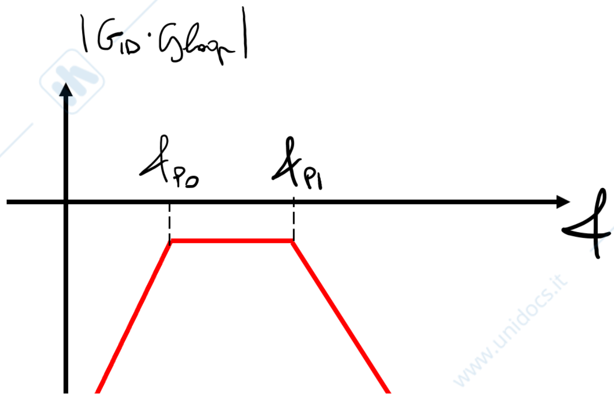
Possiamo disegnare il grafico di $G_{id} = \frac{V_{out}}{V_{in}} = -sCR3$



Dove f1 e' la frequenza per cui $|G_{id}| = 1$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi CR3} = 796\ kHz$$

Quindi possiamo disegnare $|G_{id}G_{loop}|$



$$|G_{id}G_{loop|} = A_0 \frac{R2}{R1 + R2 + R3} sCR3 \frac{1}{1 + sC(R3||(R1 + R2))} \frac{1}{1 + s\tau_0}$$

Dove abbiamo uno zero in 0 e i due poli f_{p0} e f_{p1}.

Il guadagno tra f_{p0} e f_{p1} puo' essere trovato ponendoci a una frequenza intermedia

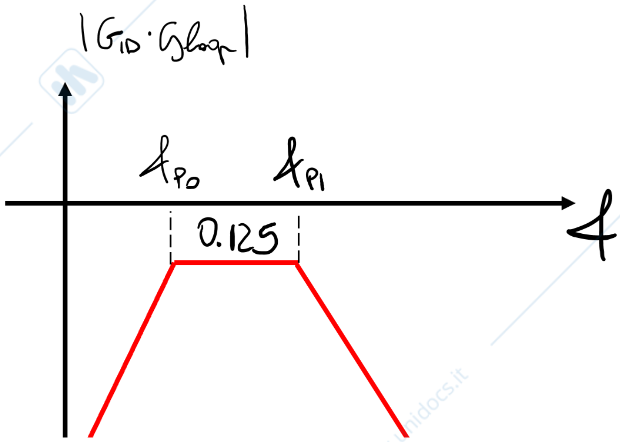
$$|G_{id}G_{loop|}(f_{intermedia}) = A_0 \frac{R2}{R1 + R2 + R3} sCR3 \frac{1}{1 + \cancel{sC(R3||(R1 + R2))}} \frac{1}{\cancel{1 +} s\tau_0} =$$

$$= A_0 \frac{R2}{R1 + R2 + R3} \frac{sCR3}{s\tau_0} =$$

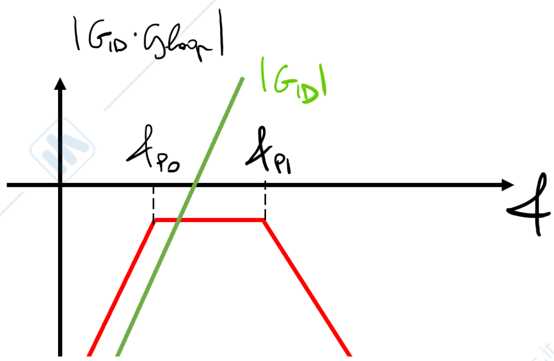
$$= A_0 \frac{R2}{R1 + R2 + R3} \frac{CR3}{\tau_0} =$$

$$= 6250 \frac{200\ ns}{10\ ms} =$$

$$= 0.125$$



Disegnando sullo stesso grafico $|G_{id} G_{loop}|$ e $|G_{id}|$



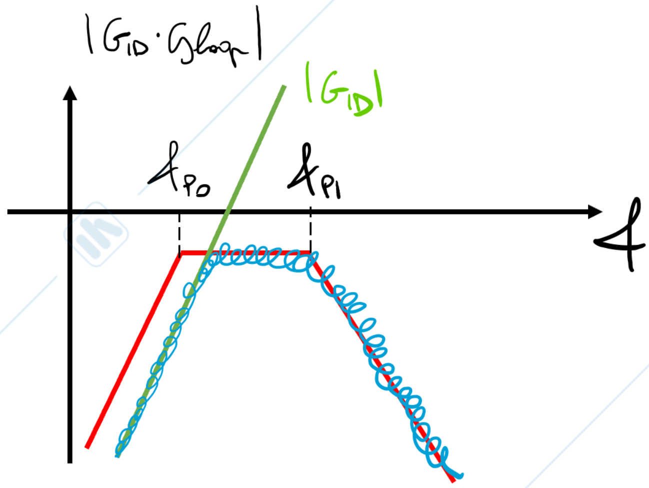
Ricordando che

$$G_{reale} = G_{ideale} \frac{-G_{loop}}{1 - G_{loop}}$$

E quindi

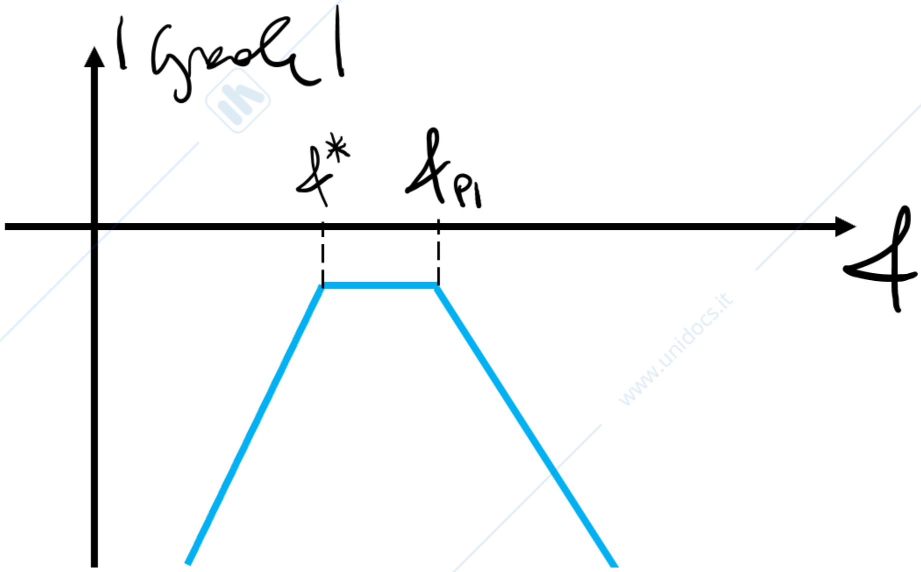
$$|G_{reale}| = \begin{cases} |G_{ideale}| & per\ |Gloop| \gg 1 \\ |G_{ideale} \cdot G_{loop}| & per\ |Gloop| \ll 1 \end{cases}$$

$|G_{reale}|$ si comporterà come $|G_{ideale}|$ fintanto che $|G_{loop} > 1|$ mentre come $|G_{ideale} \cdot G_{loop}|$ per frequenze superiori.



Il punto in cui $|G_{id}G_{loop}| = |G_{id}|$, e' il punto f* per cui $|G_{loop}(f^*)| = 1$ che abbiamo calcolato precedentemente

$$f^* = 100\ kHz$$



e)

Supponiamo che la frequenza massima del segnale sia inferiore a $f^* = 100\ kHz$, nel primo tratto di G_{reale}. Quindi possiamo scrivere l'uscita Vout in risposta a una sinusoide ampia 10V e di frequenza f:

$$V_{out}(t) = 2\pi \cdot f \cdot C \cdot R_3 \cdot 10V \cdot \sin(2\pi f t + 90°) =$$

$$= 2\pi \cdot f \cdot C \cdot R_3 \cdot 10V \cdot -\cos(2\pi f t)$$

La derivata massima dell'uscita deve essere minore dello slew rate:

$$\max\left(\frac{dV_{out}(t)}{dt}\right) < SR = 0.1\frac{V}{\mu s}$$

$$\frac{dV_{out}(t)}{dt} = 2\pi \cdot f \cdot C \cdot R_3 \cdot 10V \cdot 2\pi f t \cdot \sin(2\pi f t)$$

$$\max\frac{dV_{out}(t)}{dt} = 2\pi \cdot f \cdot C \cdot R_3 \cdot 10V \cdot 2\pi f t$$

$$2\pi \cdot f \cdot C \cdot R_3 \cdot 10V \cdot 2\pi f t < 0.1\frac{V}{\mu s}$$

E quindi possiamo trovare la frequenza massima come

$$f_{max} = \sqrt{\frac{0.1\ V/us}{4\pi^2 \cdot C \cdot R_3 \cdot 10V}} = 35.6\ Hz$$

L'ipotesi iniziale che la frequenza massima ricercata fosse minore di $f^* = 100\ kHz$ e' verificata.