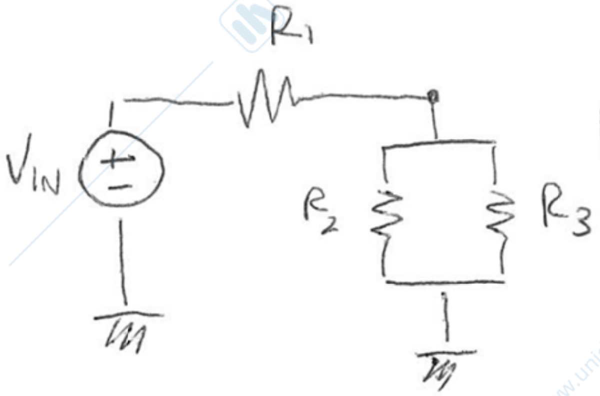
Fondamenti di Elettronica per Ingegneria dell'Automazione

Esercitazione 1

Ing. Pietro King

1)



Vin= 10 V

R1= 7 kΩ

R2= 5 kΩ

R3= 1 kΩ

Determinare la differenza di potenziale e la corrente che scorre per tutte le resistenze del circuito, VR1, VR2, VR3, IR1, IR2, IR3.

Per prima cosa si può notare che Iin=IR1.

Utilizzando la legge di Ohm (V=IR), si può ottenere la corrente in uscita dal generatore di tensione Vin come: $Iin = \frac{Vin}{Req}$, ovvero il rapporto tra la tensione ai capi della resistenza in esame e la resistenza stessa.

La resistenza *Req* tra Vin e GND è composta dal parallelo delle resistenze R2 ed R3, in serie alla resistenza R1.

Il parallelo di *n* resistori si comporta come una unica resistenza equivalente con valore uguale al reciproco della somma dei reciproci.

$$Req_{parallelo} = R1 \;//\; R2 \;//\; R3 \;// \dots Rn = \frac{1}{\sum_1^n Ri}$$

La serie di *n* resistori si comporta come una unica resistenze equivalente con valore uguale alla somma delle resistenze.

$$Req_{serie} = R1 + R2 + R3 + \cdots Rn = \sum_1^n Ri$$

Quindi abbiamo $Iin = \frac{Vin}{Req} = \frac{Vin}{R1+(R2//\,R3)} = \frac{Vin}{R1+(\frac{R2R3}{R2+R3})} = \frac{+10V}{7k\Omega+0.83\;k\Omega} = 1.277\;mA.$

E quindi che IR1=1.277 mA. Da cui si può ricavare anche

$\underline{VR1 = IR1 \cdot R1 = 1.277mA \;\cdot 7k\Omega = 8.94\;V.}$

Le tensioni VR2 e VR3 sono uguali dato che si riferiscono a due resistenze in parallelo. Queste possono essere calcolate in vari modi, qui ne proponiamo 2:

I) Utilizzando il principio di Kirchhoff alle maglie:
Vin – VR1 – VR2 = Vin – VR1 – VR3 = 0
VR2=VR3=Vin – VR1 = +10 V – 8.96 V = +1.06 V

II) Utilizzando nuovamente la legge di Ohm:
VR2=VR3= Iin ·(R2//R3) $= Iin \frac{R2R3}{R2+R3} = +1.06\ V$

I due metodi sono equivalenti e come è possibile osservare producono la stessa soluzione.

Data la tensione ai capi delle resistenze R2 e R3 è possibile ricavare la corrente che le attraversa.

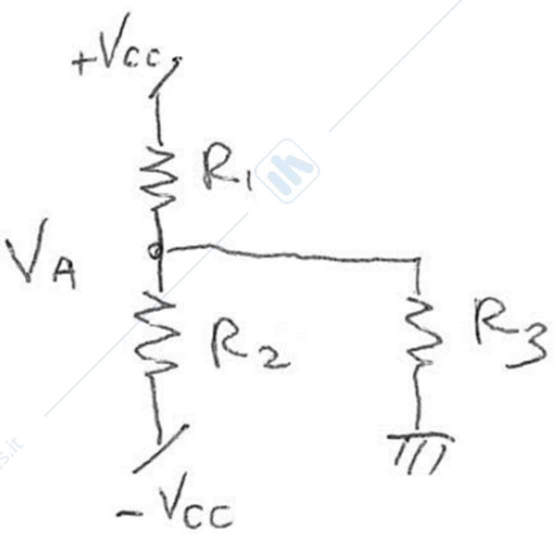
$IR2 = \frac{VR2}{R2} = \frac{1.06V}{5\ k\Omega} =$ 0.217 mA.

$IR3 = \frac{VR3}{R3} = \frac{1.06V}{1\ k\Omega} =$1.06 mA.

Da cui è possibile anche verificare la correttezza della soluzione usando il principio di Kirchhoff ai nodi:

IR1 = IR2+IR3 = 1.277 = 1.06 + 0.217.

2)



Vcc= 15 V

R1= 1 kΩ

R2= 3 kΩ

R3= 2 kΩ

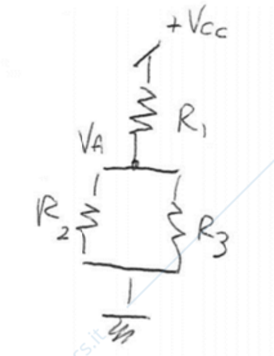
Determinare la tensione VA.

I) <u>Primo metodo risolutivo</u>

Il circuito ha più di una tensione di alimentazione. Abbiamo sia +Vcc che -Vcc. In questo caso può aiutare la risoluzione l'utilizzo del principio di sovrapposizione degli effetti.

> In un sistema lineare l'effetto di una somma di perturbazioni in ingresso è uguale alla somma degli effetti prodotti da ogni singola perturbazione.
>
> Quindi se il circuito è lineare, si può considerare acceso solo il primo generatore e spegnere gli altri. Spegnendo un generatore di tensione questo si comporta come circuito chiuso, mentre un generatore di corrente diventa un circuito aperto.
>
> Risolvendo per ognuno dei generatori presenti nel circuito, la soluzione è data dalla somma algebrica dei risultati parziali.

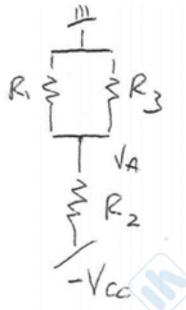
Applichiamo la sovrapposizione degli effetti. Spegniamo il generatore -Vcc e ridisegniamo il circuito che si ottiene cortocircuitando -Vcc.



VA' (l'apice indica che si tratta della VA parziale data dalla sovrapposizione degli effetti) è data dal partitore di tensione tra R1 e R2//R3.

$$VA' = VCC\frac{R2//R3}{R1 + R2//R3} = +15\ V\ \frac{1.2\ K\Omega}{2.2\ K\Omega} = 8.18\ V$$

Allo stesso modo poi si spegne il generatore +VCC, tenendo acceso -VCC. Ora il partitore è tra R2 e R1//R3.



$$VA'' = -VCC\frac{R1//R3}{R2 + R1//R3} = -15\ V\ \frac{0.75\ K\Omega}{2.75\ K\Omega} = -4.09V$$

La soluzione è data dalla somma algebrica delle tensioni parziali: VA = VA' + VA''= +4.09 V.

II) <u>Secondo metodo risolutivo</u>

La tensione VA può essere ottenuta anche senza la sovrapposizione degli effetti.

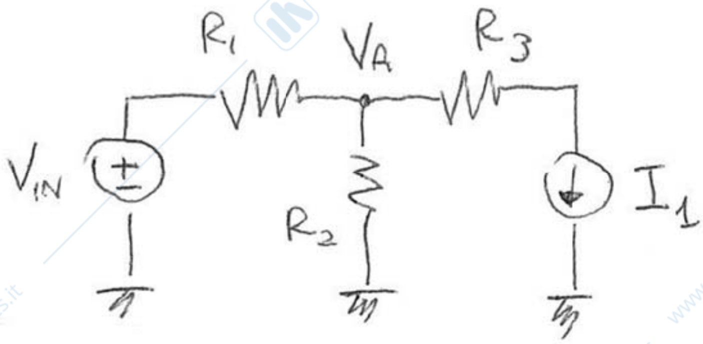
Ad esempio, si può ricavare l'espressione delle correnti che attraversano le tre resistenze in funzione di VA ed utilizzare il principio di Kirchhoff ai nodi.

$$IR1 = \frac{15\,V - VA}{R1}; \qquad IR2 = \frac{VA-(-15\,V)}{R2}; \qquad IR3 = \frac{VA}{R3}$$

$$IR1 = IR2 + IR3 => \frac{15\,V - VA}{R1} = \frac{VA-(-15\,V)}{R2} + \frac{VA}{R3}$$

$$VA = 4.09\ V$$

3)



Vin= +6 V

R1= 2.2 kΩ

R2= 10 kΩ

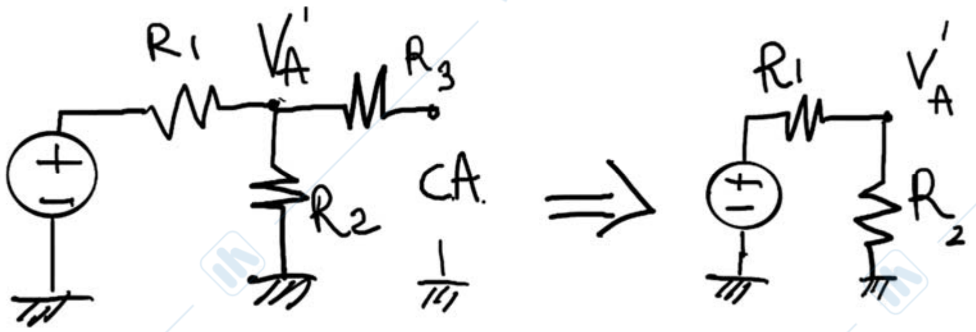
R3= 10 kΩ

I1= 100 uA

Determinare la tensione VA.

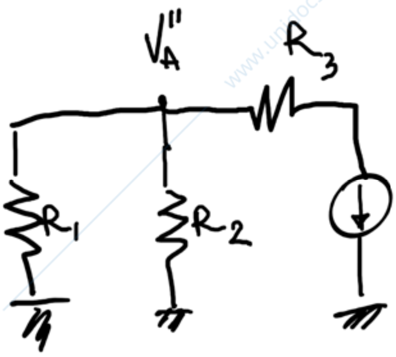
Anche in questo caso possiamo utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti.

Prima spegnendo I1 e trovando VA' in funzione di Vin.



$$VA' = Vin\frac{R2}{R1+R2} = +6V\,\frac{10\,K\Omega}{12.2\,K\Omega} = 4.92\,V$$

Poi spegnendo Vin. VA'' è la tensione ai capi del parallelo R1//R2, attraverso cui scorre IR3=I1.

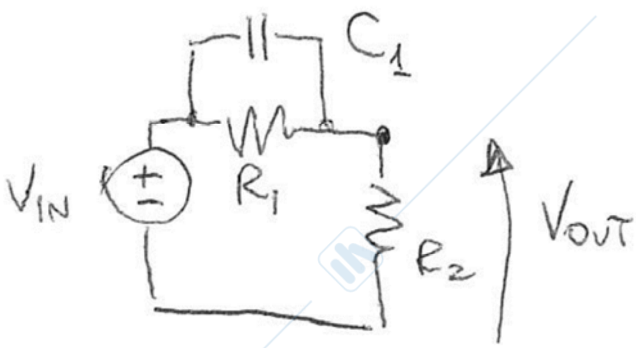


$$VA'' = I1\ \bullet R1//R2 = I1\frac{R1R2}{R1+R2} = -0.18\,V$$

Quindi,

VA = VA' + VA''= +4.74 V.

4)



R1= 1 kΩ

R2= 2 kΩ

C1= 1 nF

Determinare Vout nei casi in cui: a) Vin sia un gradino di ampiezza 1V, b) Vin sia un impulso rettangolare di durata T>> τ e ampiezza 1V, c) Vin sia un impulso rettangolare di durata T= τ e ampiezza 1V.

a)

L'equazione caratteristica di un condensatore è

$$i_c(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

Ovvero, la corrente che attraversa un condensatore è uguale alla derivata della tensione ai suoi capi nel tempo, moltiplicata per la sua capacità.

Da questa si possono dedurre 2 importanti proprietà:

1) Quando ho una tensione costante nel tempo, la corrente che scorre attraverso la capacità è 0
2) La tensione ai capi di un condensatore è una funzione continua. $v_c(t_0^-) = v_c(t_0^+)$. Infatti, altrimenti avremmo bisogno di una corrente infinita.

Per t<0

Vin è 0 da tempo infinito, quindi possiamo assumere che i transitori siano esauriti (d/dt=0). La capacità si comporta come un CA.Non essendoci forzanti anche Vout=0.

$$v_c(0^-) = v_c(0^+) = 0\ V$$

Per t -> ∞

La Vin è costante a 1V. Quindi anche a t che tende a ∞, la capacità è un CA. La tensione Vout si può ricavare come partitore di tensione su R1 ed R2.

$$v_{out}(\infty) = 1\ V\ \frac{R2}{R1 + R2} = 0.667\ V$$

$$v_c(\infty) = vin(\infty) - v_{out}(\infty) = 1V - 0.667\ = 0.33\ V$$

In tale modo abbiamo determinato le tensioni limite ai capi di C1.

La carica (e la scarica) di un condensatore è una funzione esponenziale descritta dall'equazione

$$v_c(t) = v_c(\infty) + [v_c(0) - v_c(\infty)]e^{-t/\tau}$$

Qua sotto un esempio dei grafici per la carica di un condensatore.

Grafico del potenziale in funzione del tempo

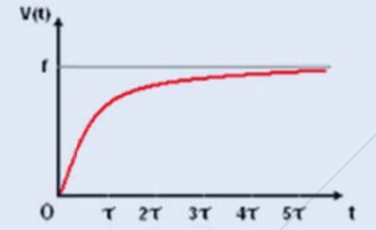
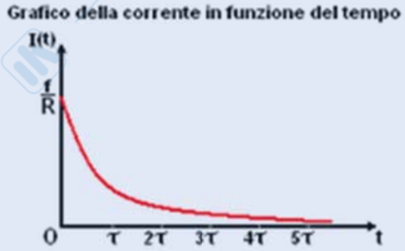


Grafico della corrente in funzione del tempo



In questo esercizio l'espressione della tensione che si genera ai capi della capacità nel tempo è data da:

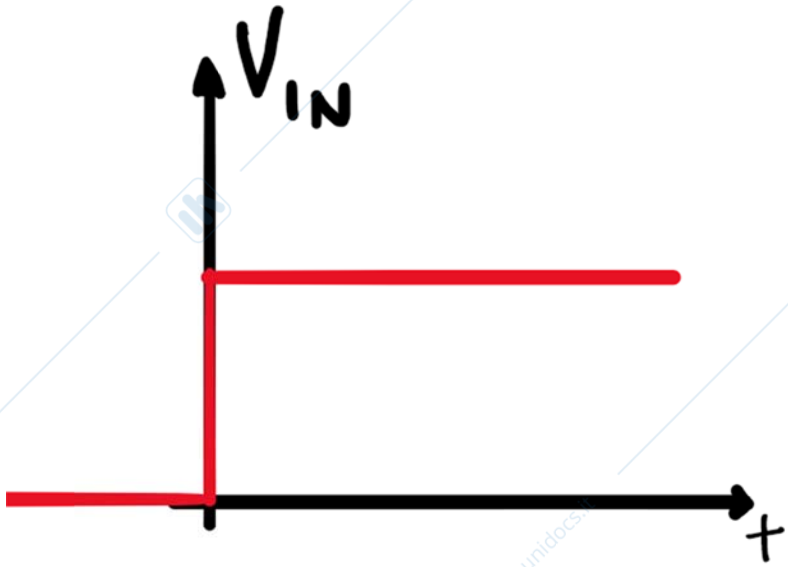
$$v_c(\mathrm{t}) = v_c(\infty) + [v_c(0) - v_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.33\ V + [0 - 0.33\ V]e^{-\frac{t}{\tau}} = \mathbf{0.33\ V\ (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

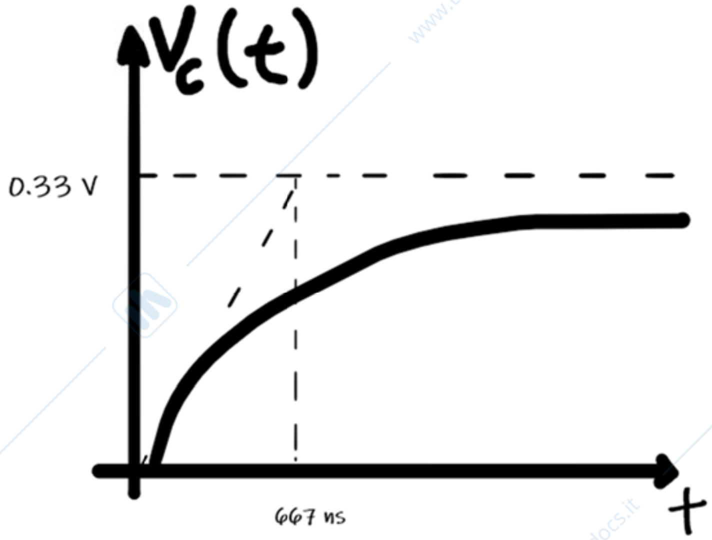
Per trovare τ, la costante di tempo, è necessario calcolare la resistenza equivalente Req "vista" dalla capacità C1. Ovvero, bisogna calcolare la resistenza equivalente ai capi della capacità (analogo al calcolo della Req. nel circuito eq. di Thevenin o di Norton). Bisogna spegnere tutti i generatori indipendenti e calcolare l'impedenza rispetto ai capi della capacità.

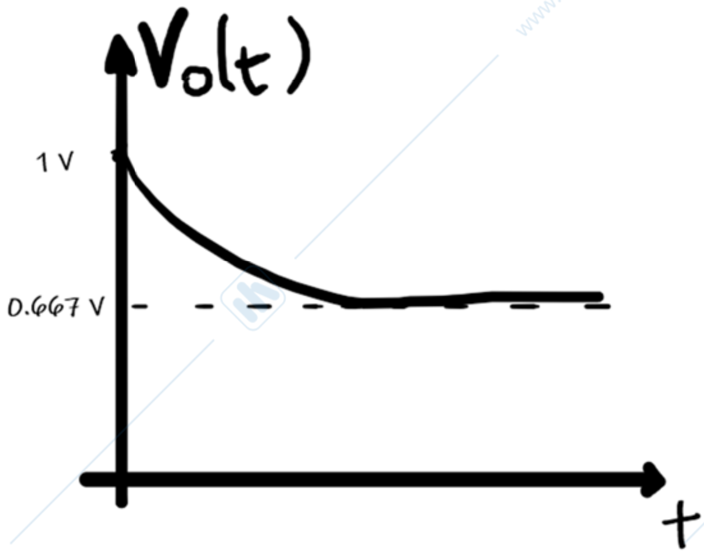
Spegnendo Vin, la resistenza vista da C1 è rappresentata da R1//R2.

$$\tau = Req\ \bullet\ C1 = R1\ //R2\ \bullet C1 = 0.667\ k\Omega\ \bullet 1nF = 667\ ns$$

Vout(t)= Vin(t)- Vc(t) è rappresentato nel grafico finale.


VIN
t


Vc(t)
0.33 V
667 ns
t


Vo(t)
1 V
0.667 V
t

b) *Determinare Vout nel caso Vin sia un impulso rettangolare di durata T>> τ e ampiezza 1V*

Nel caso in cui l'impulso rettangolare abbia un periodo T molto maggiore della costante di tempo del condensatore, possiamo considerare la capacità completamente carica al momento T. Quindi fino al punto T, il circuito si comporta allo stesso modo del punto a).

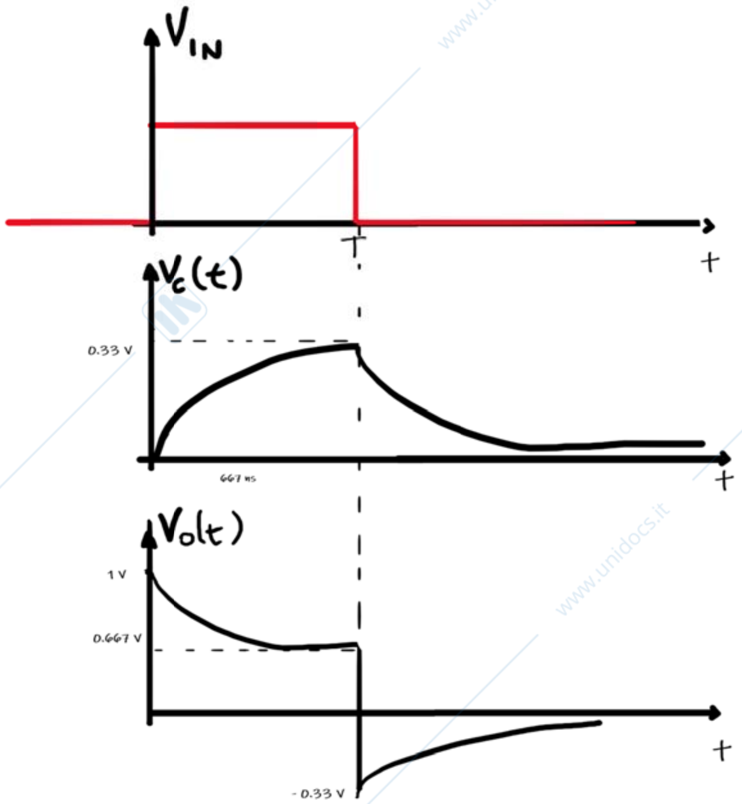
$$v_c(T^-) = v_c(T^+) = 0.33\ V$$

Cosi è possibile anche calcolare la tensione Vout nel momento T.

$$v_{out}(T^-) = Vin(T^-) - v_c(T^-) = 1 - 0.33 = 0.667\ V$$

$$v_{out}(T^+) = Vin(T^+) - v_c(T^+) = 0 - 0.33 = -0.33\ V$$

Per t-> ∞ la capacità si comporta come un circuito aperto e, essendo Vin=0, si ha Vc(∞)=0 e Vout(∞)=0 V.



c) *Determinare Vout nel caso Vin sia un impulso rettangolare di durata T= τ e ampiezza 1V*

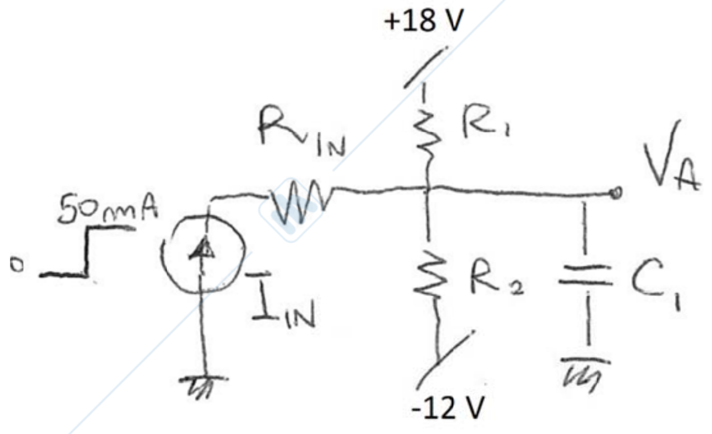
Con T= τ la capacità non è in grado di caricarsi completamente.

$$v_c(\mathrm{T}) = v_c(667\ \mathrm{ns}) = v_c(\infty)\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right) = 0.33\ V(1 - e^{-1}) = 0.207\ V$$

$$v_{out}(T^-) = Vin(T^-) - v_c(T^-) = 1 - 0.207 = 0.793\ V$$

$$v_{out}(T^+) = Vin(T^+) - v_c(T^+) = 0 - 0.207 = -0.207\ V$$

5)



C1= 100 nF

R1= 100 Ω

R2= 200 Ω

Rin= 10 kΩ

Determinare VA con un gradino di ampiezza 50mA come segnale di ingresso.

La tensione VA(t) è uguale alla tensione VC1(t).

Consideriamo prima il caso **t < 0**.

C1 si comporta come un aperto.

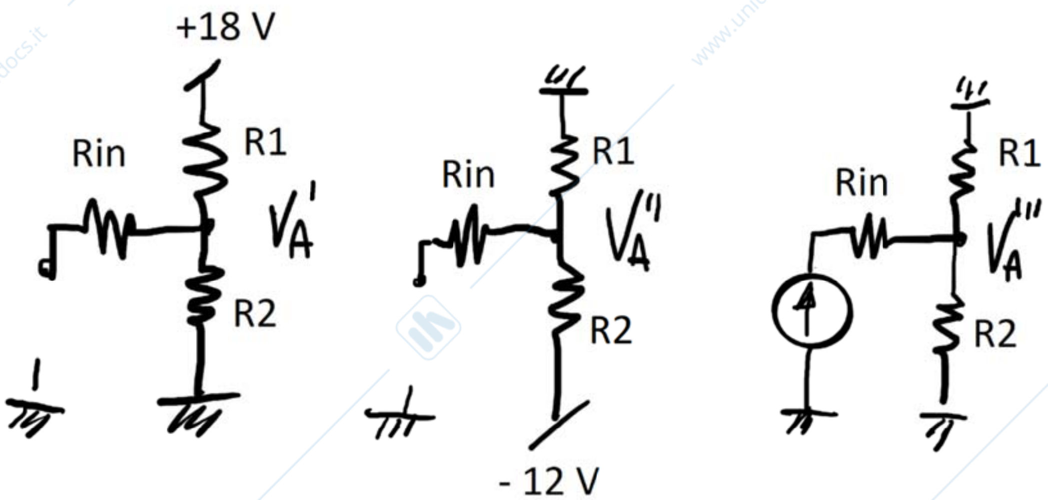
In questo caso la corrente Iin = 0 A, quindi impone una corrente nulla nel ramo di Rin. Se ho una corrente nulla che scorre su una resistenza, la tensione ai suoi capi è allo stesso modo nulla. Quindi la tensione VA dipende solo dal partitore di tensione R1 ed R2.

$$VA(0^-) = VA(0^+) = +18\,V\frac{R2}{R1+R2} - 12\,V\,\frac{R1}{R1+R2} = 12\,V - 4\,V = 8\,V$$

t-> ∞

C1 si comporta come un aperto.

Applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti.



$$VA'(\infty) = +18\,V\,\frac{R2}{R1+R2} = 12\,V$$

$$VA''^{(\infty)} = -12\,V\,\frac{R1}{R1+R2} = -4\,V$$

$$VA'''^{(\infty)} = Iin \bullet R1\,//R2 = Iin\,\frac{R1R2}{R1+R2} = 50\,mA \bullet 67\Omega = 3.3\,V$$

$$VA(\infty) = VA'^{(\infty)} + VA''^{(\infty)} + VA'''^{(\infty)} = 11.3\,V$$

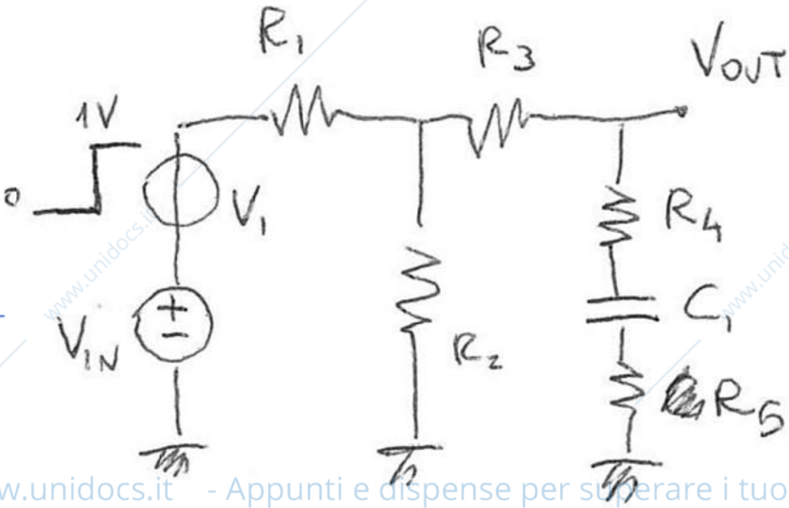
La resistenza di Thevenin vista dalla capacità C1 è uguale a R1//R2.

$$\tau = Req \bullet C1 = R1\,//R2 \bullet C1 = 67\,\Omega \bullet 100nF = 6.7\,us$$

Per t>0

$$VA(\mathrm{t}) = 11.3\,V - 3.3\,V\,e^{-\frac{t}{6.7\,us}}$$

6)



Vin= 5 V

R1= 2 kΩ

R2= 3 kΩ

R3= 2 kΩ

R4= 0.5 kΩ

R5= 0.5 kΩ

C1= 1 nF

Determinare Vout.

La resistenza equivalente di Thevenin vista dalla capacità C1 è uguale a Req= R4+R5+R3+(R1//R2), quindi

$$\tau = Req \bullet C1 = [\mathrm{R4 + R5 + R3 + (R1//R2)}] \bullet \mathrm{C1} = 4.2\ \mathrm{us}$$

t = 0$^-$

Considero C1 come un circuito aperto. IR3=IR4=IR5=0 A.

$$Vout(0^-) = [Vin + V1(0^-)]\frac{R2}{R1 + R2} = 3\ V$$

Nel tempo tra -∞ e 0$^-$ la capacità C1 si carica fino a 3 V.

$$VC1(0^-) = 3\ V$$

t = 0$^+$

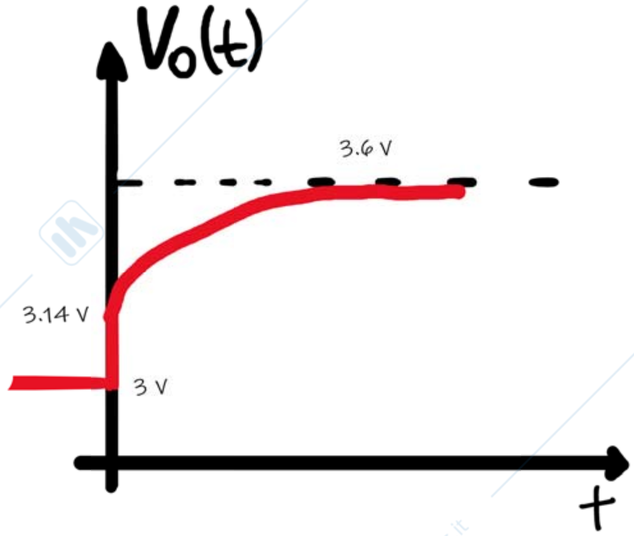
Nell'istante 0$^+$ la tensione di ingresso del circuito diventa 5V + 1V= 6V. La tensione ai capi della capacità C1 non può cambiare istantaneamente, quindi agisce come generatore di tensione alla tensione che aveva a 0$^-$. Vout(0$^+$) può essere calcolato usando la sovrapposizione degli effetti del generatore d'ingresso a 6V e il generatore a 3V rappresentato da C1.

$$Vout(0^+) = Vout' + Vout'' = 0.86\ V + 2.28\ V = 3.14\ V$$

t-> ∞

possiamo considerare C1 come un circuito aperto.

$$Vout(\infty) = [Vin + V1(\infty)]\frac{R2}{R1 + R2} = 3.6\ V$$


$V_o(t)$
3.6 V
3.14 V
3 V
t