# Cinematica pt.1

giovedì 24 febbraio 2022 11:21

**CINEMATICA** : branca della meccanica che studia quantitativamente il moto di un corpo.

**PUNTO MATERIALE** : approssimazione del corpo di cui si desidera studiare il moto;
permette di trascurarne forma ed eventuale rotazione.
NB: funziona bene solamente se il corpo e' molto piu' piccolo della sua traiettoria
esempio: il moto dei pianeti

**LEGGE ORARIA** : legge che, date le informazioni iniziali riguardanti un corpo, prevede la sua posizione nello spazio in funzione del tempo.

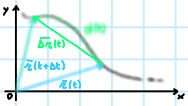
**MOTI NEL PIANO** : 2 dimensioni

Consideriamo il corpo in due istanti di tempo distinti: $t$ e $t+\Delta t$

La POSIZIONE del corpo e' definita da due vettori: $\bar{r}(t)$ e $\bar{r}(t+\Delta t)$

Il VETTORE SPOSTAMENTO e' definito dalla differenza tra i vettori posizione: $\overline{\Delta r}(t) = \bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)$

Lo spazio realmente percorso dal corpo e' indicato con $d(t)$ ed e' uno scalare



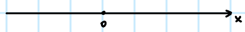

**VELOCITA' MEDIA** : $V_m = \frac{\Delta r}{\Delta t}$

**VELOCITA' ISTANTANEA** : $V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$ derivata dello spostamento rispetto al tempo

**ACCELERAZIONE ISTANTANEA** : $a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$ derivata della velocita' rispetto al tempo

**MOTO RETTILINEO orizzontale** :

e' necessario definire sempre il sistema di riferimento;
in questo caso servono quindi origine direzione e verso della retta su cui si muove il corpo




la legge oraria del moto e' definita in questo caso dall'equazione $x(t) = \ldots$

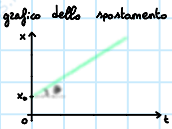
**MOTO RETTILINEO UNIFORME** :

Moto la cui velocita' e' costante nel tempo
e' possibile ricavare la legge oraria $x(t)$:

$$V = \frac{dx}{dt} \longrightarrow dx = V\,dt$$
$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} V\,dt$$
$$x(t) - x(t_0) = V\cdot(t-t_0)$$
$$x(t) = x(t_0) + V\cdot(t-t_0)$$

ipotizzando $t_0 = 0 \longrightarrow$ $x(t) = x_0 + v\cdot t$

grafico dello spostamento in funzione del tempo:




**MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO** :

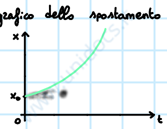
Moto la cui accelerazione e' costante nel tempo
e' possibile ricavare la legge oraria $x(t)$:

$$a = \frac{dv}{dt} \longrightarrow dv = a\cdot dt$$
$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = a\int_{t_0}^{t} dt$$
$$v(t) - v(t_0) = a(t - t_0)$$
$$v(t) = v(t_0) + a(t-t_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} \longrightarrow dx = v\cdot dt$$
$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} (v(t_0) + a\cdot(t-t_0))\,dt = \int_{t_0}^{t} v(t_0)\,dt + \int_{t_0}^{t} at\,dt - \int_{t_0}^{t} a\cdot t_0\,dt$$
$$x(t) - x(t_0) = v(t_0)\cdot t - v(t_0)\cdot t_0 + \frac{a}{2}t^2 - \frac{a}{2}t_0^2 - at_0\cdot t + at_0^2$$
$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)\cdot(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t^2 + t_0^2 - 2t_0 t) = x(t_0) + v(t_0)\cdot(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2$$

ipotizzando $t_0 = 0 \longrightarrow$ $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

grafico dello spostamento in funzione del tempo:




**MOTO RETTILINEO ACCELERATO in modo non uniforme** :

esempio di moto la cui accelerazione dipende dal tempo

**MOTO RETTILINEO ACCELERATO in modo non uniforme :**

esempio di moto la cui accelerazione dipende dal tempo

$a = Kt^2$

$x_0 = 0\ m$ $\qquad dV = a(t) \cdot dt \longrightarrow \int_{v_0}^{v(t)} dV = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} Kt^2 dt$

$V_0 = 0\ m/s$ $\qquad v(t) = \frac{1}{3}Kt^3$

$t_0 = 0\ s$ $\qquad dx = v(t) \cdot dt \longrightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dt = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{3}Kt^3 dt$

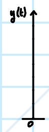
$x(t) = ?$ $\qquad x(t) = \frac{1}{12}Kt^4$

**MOTO RETTILINEO VERTICALE**

Ipotesi: 1. trascuro momentaneamente tutti gli attriti dovuti all'aria

2. compio l'esperimento in prossimità della superficie terrestre dove $\vec{a}$ costante

Fisso un sistema di riferimento :




$a = -g = -9{,}81\ m/s^2$

$h = y =$ quota

**CADUTA LIBERA :**

$t_0 = 0\ s$

$y(t_0) = h_0$ $\qquad dV = a\,dt \longrightarrow \int_{v_0}^{v(t)} dV = \int_{t_0}^{t} a\,dt = \int_{t_0}^{t} -g\,dt$

$v(t_0) = v_0 = 0\ m/s$ $\qquad v(t) = -gt \longrightarrow \vec{v}(t) = -gt\,\hat{u}_y$

$y(t) = ?$ $\qquad dy = v(t)dt \longrightarrow \int_{y_0}^{y(t)} dy = \int_{t_0}^{t} -gt\,dt$

$y(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$

dopo quanto tempo il corpo raggiunge la quota 0 ?

$y(t_f) = 0 \longrightarrow h_0 - \frac{1}{2}g t_f^2 = 0$ ;

$t_f = \pm\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$

**LANCIO VERSO L'ALTO :**

$t_0 = 0\ s$

$y(t_0) = y_0 = 0\ m$ $\qquad dV = a\,dt \qquad \int_{v_0}^{v(t)} dV = \int_{t_0}^{t} a\,dt = \int_{t_0}^{t} -g\,dt$

$v(t_0) = v_0 \neq 0\ m/s$ $\qquad v(t) = v_0 - gt$

$y(t) = ?$ $\qquad dy = v(t)dt \qquad \int_{y_0}^{y(t)} dy = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} v_0 - g\int_{t_0}^{t} t\,dt$

$y(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

qual e' l'altezza massima raggiunta dal corpo?

$v(t_M) = 0 \qquad v_0 - gt_M = 0 \quad ; \quad t_M = v_0/g$

$h_{MAX} = y(t_M) = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$

dopo quanto tempo il corpo torna alla quota 0 ?

$y(t_2) = 0 \qquad v_0 t_2 - \frac{1}{2}g t_2^2 = 0$

- $t_{2,1} = 0\ s$ (non significante)
- $t_{2,2} = \frac{2V_0}{g}$

**MOTO RETTILINEO SMORZATO ESPONENZIALMENTE :**

In realtà sappiamo che se un corpo si muove a velocità relativamente elevata, l'aria oppone resistenza al suo moto (generando una forza d'attrito viscoso). Questo comporta una decelerazione con modulo proporzionale alla velocità secondo la legge : $a(t) = -K \cdot v(t)$

$\downarrow$ costante data dalle caratteristiche del fluido (aria) $[K] = s^{-1} = Hz$

$t_0 = 0\ s$

$x(t_0) = x_0 = 0\ m$ $\qquad dV = a(t)dt = -K\,v(t)\,dt \quad ; \quad \frac{dV}{v(t)} = -K\,dt$

$a(t) = -Kv(t)$ $\qquad \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dV}{v(t)} = \int_{t_0}^{t} -K\,dt$

$\ln\left(\frac{V(t)}{V_0}\right) = -Kt$

$v(t) = V_0 \cdot e^{-Kt}$ $\qquad$ legge onnipresente in fisica ogni volta che si SCARICA qualcosa attraverso una strozzatura (es : condensatore , vasca da bagno)

grafico della velocità in funzione del tempo :

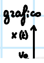

**TEMPO CARATTERISTICO :** $\tau = \frac{1}{K}$

per convenzione si considera : $v(5\tau) = 0\ m/s$

$dx = v(t)dt \qquad \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} V_0 \cdot e^{-Kt} dt = V_0\left[-\frac{1}{K}e^{-Kt}\right]_{t_0}^{t}$

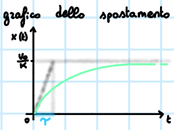
$x(t) = -\frac{V_0}{K}(e^{-Kt} - 1) = \frac{V_0}{K}(1 - e^{-Kt})$

grafico dello spostamento in funzione del tempo :



$x(t) = -\frac{v_0}{K}\left(e^{-Kt}-1\right) = \frac{v_0}{K}\left(1-e^{-Kt}\right)$

grafico dello spostamento in funzione del tempo :




## CADUTA LIBERA CON ATTRITO VISCOSO

per semplicità oriento l'asse nel verso opposto (verso il basso)

$a(t) = g - Kv(t)$

$t_0 = 0\ s$

$v_0 = 0\ m/s$

$y_0 = 0\ m$

$dV = a(t)dt = [g - Kv(t)]dt = -K[v(t) - g/K]dt \quad ; \quad \frac{dV}{v(t)-g/K} = -Kdt$

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{v(t)-g/K}\, dV = \int_{t_0}^{t} -K dt$$

$$\left[\ln\left(v(t)-g/K\right)\right]_{v_0}^{v(t)} = \left[-Kt\right]_{t_0}^{t}$$

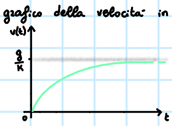
$$\ln\left(v(t)-g/K\right) - \ln(-g/K) = -Kt$$

$$v(t) - g/K = -\frac{g}{K}e^{-Kt}$$

$$v(t) = \frac{g}{K}\left(1-e^{-Kt}\right) \qquad \text{poiché} \quad K = \frac{1}{\tau}$$

$$v(t) = g\tau\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

grafico della velocità in funzione del tempo :



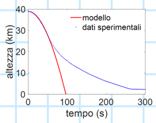

VELOCITA' LIMITE : $v_L = \lim_{t\to\infty} v(t) = g/K = g\tau$

$dy = v(t)dt = \left[g/K - g/K \cdot e^{-Kt}\right]dt$

$$\int_{y_0}^{y(t)} dy = \int_{t_0}^{t} g/K\, dt - \int_{t_0}^{t} g/K \cdot e^{-Kt}\, dt = \int_{t_0}^{t} g/K\, dt - g/K\left[-\frac{1}{K}e^{-Kt}\right]_{t_0}^{t}$$

$$y(t) = \frac{gt}{K} + \frac{g}{K^2}e^{-Kt} - \frac{g}{K^2}$$

RED BULL STRATOS :




parametri che hanno influito :

- densità dell'aria : aumenta scendendo , K aumenta
- passaggio da moto lineare a moto turbolento : K raddoppia di colpo
- g aumenta avvicinandosi alla superficie terrestre

$\Rightarrow$ K e g non sono costanti nel tempo .