

# Insiemi

## Concetto di insieme

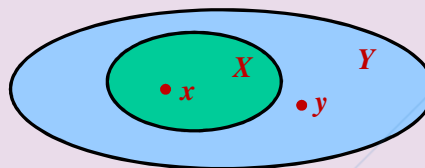
I concetti di insieme e di elemento di un insieme sono **concetti primitivi**, cioè non definibili tramite concetti più semplici.

Una collezione di elementi (persone, animali, oggetti, entità astratte, ...), fra loro distinti, costituisce un insieme se esiste un criterio oggettivo che permetta di decidere univocamente se un qualunque elemento fa parte o no del raggruppamento.

Gli insiemi possono essere **finiti** (numero limitato di elementi) o **infiniti** (numero illimitato di elementi).

Di solito un insieme viene indicato con una lettera maiuscola ed ogni elemento dell'insieme con una lettera minuscola.

Gli insiemi vengono rappresentati graficamente mediante i **diagrammi di Venn**.



## Esempi

Insieme delle consonanti dell'alfabeto italiano  
 Insieme degli Stati europei  
 Insieme dei numeri naturali  $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$   
 Insieme delle frazioni  
 Insieme degli studenti  
 ...

## Simbologia

Se  $a$  è un elemento dell'insieme  $A$ , si scrive  $a \in A$  ( $a$  appartiene ad  $A$ ).

Se  $b$  non è un elemento di  $A$ , si scrive  $b \notin A$  ( $b$  non appartiene ad  $A$ ).

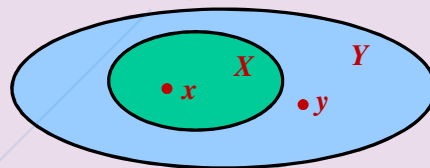
Quantificatore esistenziale  $\exists x$  (esiste almeno un  $x$ )

Quantificatore universale  $\forall x$  (per ogni  $x$ )

$\exists! x$  (esiste un solo  $x$ )

**Es.**

- ogni elemento di  $X$  appartiene anche ad  $Y$ :  $\forall x \in X$  si ha  $x \in Y$
- non ogni elemento di  $Y$  appartiene ad  $X$ :  $\exists y \in Y$  tale che  $y \notin X$



*$X$  è un sottoinsieme di  $Y$*

## Rappresentazione di un insieme

Rappresentazione **grafica**: diagrammi di Venn

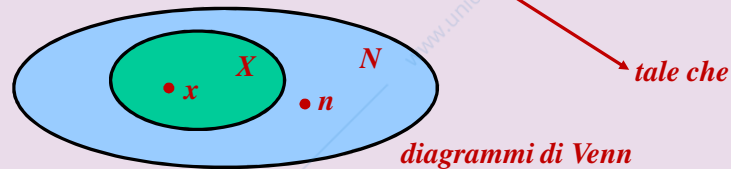
Rappresentazione **estensiva**: si elencano tutti gli elementi dell'insieme (non ha importanza l'ordine di scrittura degli elementi)

Rappresentazione **intensiva**: gli elementi vengono individuati tramite la regola di appartenenza

**Es. insieme dei numeri naturali minori di 100**

Rappresentazione **estensiva**:  $X = \{1, 2, 3, \dots, 99\}$

Rappresentazione **intensiva**:  $X = \{x \in \mathbb{N} : x < 100\}$



## Sottoinsiemi

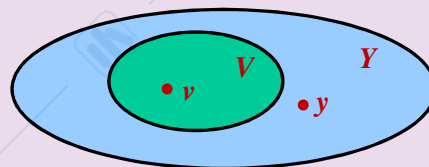
Sia **Y** l'insieme delle lettere dell'alfabeto e **V** l'insieme delle vocali

$$Y = \{a, b, c, \dots, u, v, z\}$$

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

V è il sottoinsieme di Y determinato dalla proprietà: v è una vocale

$$V = \{v \in Y : v \text{ è una vocale}\}$$

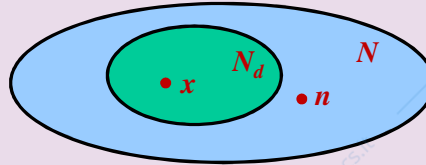


## Sottoinsiemi

Sia  $N_d$  l'insieme dei numeri dispari  $N_d = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$

$N_d$  è il sottoinsieme dell'insieme dei numeri naturali  $N$  determinato dalla proprietà  **$x$  è dispari**

$$N_d = \{x \in N : x \text{ è dispari}\}$$



Analogamente per l'insieme dei numeri pari  $N_p = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$  si avrà:

$$N_p = \{x \in N : x \text{ è pari}\}$$

## Sottoinsiemi

Se  $X$  è un insieme e  $P$  una proprietà vera per qualche elemento di  $X$ , allora l'insieme di tutti gli elementi di  $X$  per cui  $P$  è vera si indica con  $\{x \in X : P\}$  e si chiama sottoinsieme di  $X$  determinato dalla proprietà  $P$

## Alcune definizioni

Due insiemi A e B sono **uguali** quando contengono gli stessi elementi.

L'insieme **vuoto** (indicato con  $\emptyset$ ) è un insieme privo di elementi.

L'insieme **universo** (indicato con **U**) contiene la totalità dei possibili elementi. L'insieme universo varia a seconda del contesto.

**Es.** l'insieme delle vocali dell'alfabeto italiano {a, e, i, o, u} ha come insieme universo U l'intero alfabeto italiano {a, b, c, ..., v, z}.

## Corrispondenza univoca fra insiemi

Dati due insiemi A e B, se esiste un criterio che permette di associare elementi di A con elementi di B, si dice che i due insiemi sono legati da una **corrispondenza** (o relazione).

**Corrispondenza univoca:** ad ogni elemento a di A corrisponde uno ed un solo elemento b di B. La corrispondenza univoca viene anche detta funzione o applicazione.

**Es.**  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$   $B = \{0, 1\}$

una possibile corrispondenza univoca è quella che associa  
ad ogni elemento dispari di A l'elemento 1 di B  
ad ogni elemento pari di A l'elemento 0 di B.

$$1, 3, 5, \dots \rightarrow 1$$

$$2, 4, 6, \dots \rightarrow 0$$

## Corrispondenza biunivoca fra insiemi

**Corrispondenza biunivoca:** ad ogni elemento  $a$  di  $A$  corrisponde **uno ed un solo** elemento  $b$  di  $B$  **e viceversa**.

**Es.**  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$      $B = \{a, e, i, o, u\}$

$1 \leftrightarrow a$

$2 \leftrightarrow e$

$3 \leftrightarrow i$

$4 \leftrightarrow o$

$5 \leftrightarrow u$

**Es.** si può istituire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  composto dai primi 6 numeri naturali e l'insieme  $B$  delle 6 facce di un dado da gioco.

## Insiemi finiti, infiniti, numerabili

Gli insiemi possono essere **finiti** (numero limitato di elementi) o **infiniti** (numero illimitato di elementi).

**Es. insieme infinito:** insieme dei numeri naturali  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Un insieme viene detto **numerabile** se i suoi elementi sono in numero finito oppure se possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali.

Se un insieme numerabile possiede un numero infinito di elementi, viene detto **infinito numerabile**. **Es.**  $N$  (insieme numeri naturali),  $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  (interi relativi),  $Q$  (numeri razionali)

Ogni sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è anch'esso numerabile. **Es. insieme numeri dispari:**  $N_d = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$

Ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile.

**Es. insieme infinito non numerabile:**  $R$  (insieme numeri reali)

## Inclusione

Dati due insiemi X e Y, si dirà che X è contenuto (o incluso) in Y se ogni elemento di X appartiene anche ad Y  $X \subseteq Y$

**Es.**  $X = \{1, 2, 3\}$      $Y = \{1, 2, 3, 4\}$

Dati due insiemi X e Y, se X non è contenuto in Y si scrive  $X \not\subseteq Y$

**Es.**  $X = \{1, 2, 3\}$      $Y = \{1, 2\}$

Si ha:

$\emptyset \subseteq X$  l'insieme vuoto è contenuto in ogni insieme X

$X \subseteq X$  **proprietà riflessiva**

$X \subseteq Y$  e  $Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$  **proprietà transitiva**

$X \subseteq Y$  e  $Y \subseteq X \Rightarrow X = Y$  **proprietà asimmetrica**

## Unione o somma logica (or)

L'insieme **unione** di A e B è l'insieme degli elementi appartenenti ad A **oppure** a B, cioè ad almeno uno dei due insiemi. In simboli:

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$

**Es.**  $A = \{1, 2, 3, 4\}$      $B = \{0, 1, 2\} \Rightarrow A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Si ha:

$X \cup X = X$  **proprietà di idempotenza dell'unione**

$X \cup Y = Y \cup X$  **proprietà commutativa dell'unione**

$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$  **proprietà associativa dell'unione**

## Intersezione o prodotto logico (and)

L'insieme **intersezione** di A e B è l'insieme degli elementi appartenenti contemporaneamente ad A e a B, cioè ad entrambi gli insiemi. In simboli:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

$$\text{Es. } A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{0, 1, 2\} \Rightarrow A \cap B = \{1, 2\}$$

Si ha:

$$X \cap X = X \quad \text{proprietà di idempotenza dell'intersezione}$$

$$X \cap Y = Y \cap X \quad \text{proprietà commutativa dell'intersezione}$$

$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z \quad \text{proprietà associativa dell'intersezione}$$

## Proprietà che combinano unione e intersezione

Leggi di assorbimento

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

Proprietà distributiva

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

## Differenza

L'insieme **differenza** di A e B (considerati in questo ordine) è l'insieme degli elementi di A non appartenenti a B. In simboli:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

$$\text{Es. } A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{0, 1, 2\} \Rightarrow A - B = \{3, 4\}$$

Si ha:  $X - Y \subseteq X$

Caso particolare  $X = U$  (universo):  $U - Y = \neg Y$  (complemento di Y)

**Complementarità:**

$$X \cup (\neg X) = U \quad (\text{universo})$$

$$X \cap (\neg X) = \emptyset \quad (\text{insieme vuoto})$$

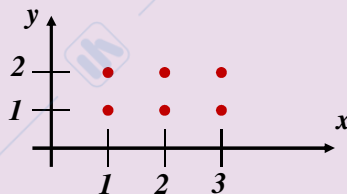
## Prodotto cartesiano

Il **prodotto cartesiano** di X per Y (considerati in questo ordine) è l'insieme  $X * Y$  di tutte le coppie ordinate (x,y) in cui  $x \in X$  e  $y \in Y$ .  
In simboli:

$$X * Y = \{(x,y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

$$\text{Es. } X = \{1, 2, 3\} \quad Y = \{1, 2\}$$

$$\Rightarrow X * Y = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\}$$



Si ha in genere:  $X * Y \neq Y * X$  (non vale la proprietà commutativa)