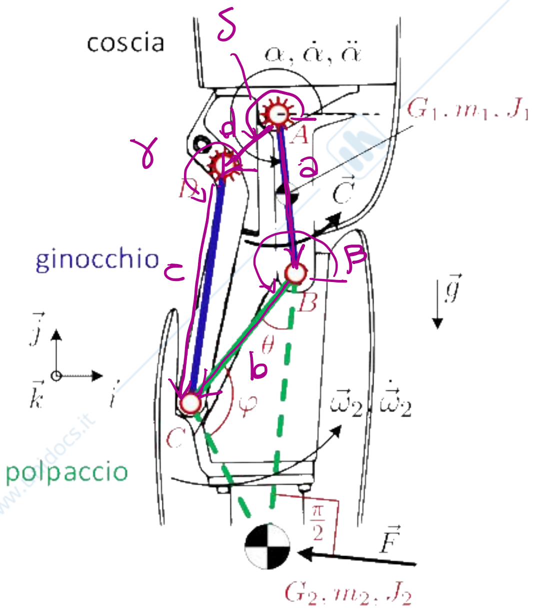
FTMA_20230607_Soluzione

mercoledì 31 maggio 2023 17:58

Esercizio 1



Cinematica

1) Chiusura in posizione

$$(B-A)+(C-B)=(D-A)+(C-D)$$

Vettore	Modulo	Direzione
$(B-A)$	$a=\overline{AB}$	$\alpha(t)$ coord. libera
$(C-B)$	$b=\overline{BC}$	$\beta(t)$
$(D-A)$	$d=\overline{AD}$	δ cost
$(C-D)$	$c=\overline{DC}$	$\gamma(t)$

$\beta(t)$, $\gamma(t)$ incogniti

$$(1)\quad a e^{i\alpha} + b e^{i\beta} = c e^{i\gamma} + d e^{i\delta} \Rightarrow \text{Eq. vettoriale}$$

$\downarrow$

2 Eq. scalari

$$\begin{array}{l} \vec{i} \\ \vec{j} \end{array} \begin{cases} a\cos\alpha + b\cos\beta = c\cos\gamma + d\cos\delta \\ a\sin\alpha + b\sin\beta = c\sin\gamma + d\sin\delta \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema non lineare nelle incognite } \beta \text{ e } \gamma$$

$\Downarrow$

Ricavo $\beta(t)$, $\gamma(t)$

Velocità (Derivo (1) rispetto al Tempo)

$$(2)\quad \dot{\alpha} a e^{i(\alpha+\pi/2)} + \dot{\beta} b e^{i(\beta+\pi/2)} = \dot{\gamma} c e^{i(\gamma+\pi/2)} \Rightarrow \text{incognite } \dot{\beta}(t), \dot{\gamma}(t)$$

$$\begin{array}{l} \vec{i} \\ \vec{j} \end{array} \begin{cases} -\dot{\alpha} a\sin\alpha - \dot{\beta} b\sin\beta = -c\dot{\gamma}\sin\gamma \\ \dot{\alpha} a\cos\alpha + \dot{\beta} b\cos\beta = c\dot{\gamma}\sin\gamma \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ Sistema lineare $[A]\begin{Bmatrix}\dot{\beta} \\ \dot{\gamma}\end{Bmatrix} = \underline{b} \Rightarrow$ Ricavo $\dot{\beta}(t)$ e $\dot{\gamma}(t)$

$\boxed{\vec{\omega}_2 = \dot{\beta}\vec{k}}$ $\Rightarrow$ il vettore (C-B) nella chiusura rappresenta il corpo rigido BCG_2. La rotazione è unica per tutto il corpo rigido

Accelerazione (Derivo (2) rispetto al Tempo)

$$(3)\quad \ddot{\alpha} a e^{i(\alpha+\pi/2)} - \dot{\alpha}^2 a e^{i\alpha} + \ddot{\beta} b e^{i(\beta+\pi/2)} - \dot{\beta}^2 b e^{i\beta} = \ddot{\gamma} c e^{i(\gamma+\pi/2)} - \dot{\gamma}^2 c e^{i\gamma}$$

$\hookrightarrow$ incognite $\ddot{\beta}(t)$, $\ddot{\gamma}(t)$

$$\begin{array}{l} \vec{i} \\ \vec{j} \end{array} \begin{cases} -\ddot{\alpha} a\sin\alpha - \dot{\alpha}^2 a\cos\alpha - \ddot{\beta} b\sin\beta - \dot{\beta}^2 b\cos\beta = -\ddot{\gamma} c\sin\gamma - \dot{\gamma}^2 c\cos\gamma \\ \ddot{\alpha} a\cos\alpha - \dot{\alpha}^2 a\sin\alpha + \ddot{\beta} b\cos\beta - \dot{\beta}^2 b\sin\beta = \ddot{\gamma} c\cos\gamma - \dot{\gamma}^2 c\sin\gamma \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{matrix} \begin{cases} -\ddot{\alpha} a \sin\alpha - \dot{\alpha}^2 a \cos\alpha - \ddot{\beta} b \sin\beta - \dot{\beta}^2 b \cos\beta = -\ddot{\gamma} c \sin\gamma - \dot{\gamma}^2 c \cos\gamma \\ \ddot{\alpha} a \cos\alpha - \dot{\alpha}^2 a \sin\alpha + \ddot{\beta} b \cos\beta - \dot{\beta}^2 b \sin\beta = \ddot{\gamma} c \cos\gamma - \dot{\gamma}^2 c \sin\gamma \end{cases}$$

$$\boxed{\dot{\vec{\omega}}_2 = \ddot{\beta} \vec{k}}$$

↳ Sistema Lineare $[A]\begin{Bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{Bmatrix} = \underline{b}'$

↓

Ricavo $\ddot{\beta}(t), \ddot{\gamma}(t)$

Dinamica

Prima di iniziare a calcolare la dinamica è necessario calcolare velocità e accelerazione di G_1 e G_2:

Rivals rispetto ad A

$$\vec{v}_{G_1} = \dot{\alpha} \vec{k} \wedge \underbrace{(A - G_1)}_{\frac{a}{2} e^{i\alpha}} = v_{G_1x} \vec{i} + v_{G_1y} \vec{j}$$

$$= \dot{\alpha} \frac{a}{2} (-\sin\alpha\, \vec{i} + \cos\alpha\, \vec{j})$$

$$\vec{a}_{G_1} = \ddot{\alpha} \vec{k} \wedge (A - G_1) - \dot{\alpha}^2 (A - G_1) = a_{G_1x} \vec{i} + a_{G_1y} \vec{j}$$

$$= \ddot{\alpha} \frac{a}{2} (-\sin\alpha\, \vec{i} + \cos\alpha\, \vec{j}) - \dot{\alpha}^2 \frac{a}{2} (\cos\alpha\, \vec{i} + \sin\alpha\, \vec{j})$$

Per calcolare $\vec{v}_{G_2}, \vec{a}_{G_2}$ devo applicare Rivals rispetto a B o a C, perciò devo prima calcolare le $\vec{v}_B, \vec{a}_B$ o $\vec{v}_C, \vec{a}_C$.

Oss: lo faccio da B perché è più facile definire l'anomalia del vettore $(G_2 - B)$ rispetto a quella di $(G_2 - C)$

$$\vec{v}_B = \dot{\alpha} \vec{k} \wedge \overbrace{(B - A)}^{a e^{i\alpha}} = v_{Bx} \vec{i} + v_{By} \vec{j}$$

$$= \dot{\alpha} a (-\sin\alpha\, \vec{i} + \cos\alpha\, \vec{j})$$

$$\vec{v}_{G_2} = \vec{v}_B + \overbrace{\vec{\omega}_2}^{\dot{\beta}\vec{k}} \wedge \overbrace{(G_2 - B)}^{\overline{BG_2} e^{i(\beta+\theta)}} = v_{G_2x} \vec{i} + v_{G_2y} \vec{j}$$

$$= \vec{v}_B + \dot{\beta} \overline{BG_2} (-\sin(\beta+\theta)\, \vec{i} + \cos(\beta+\theta)\, \vec{j})$$

$$\vec{a}_B = \ddot{\alpha} \vec{k} \wedge (B - A) - \dot{\alpha}^2 (B - A) = a_{Bx} \vec{i} + a_{By} \vec{j}$$

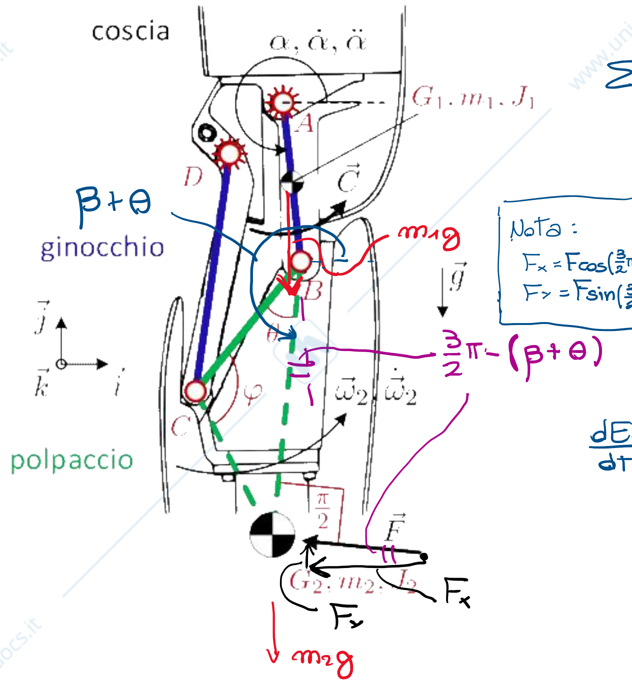
$$= \ddot{\alpha} a (-\sin\alpha\, \vec{i} + \cos\alpha\, \vec{j}) - \dot{\alpha}^2 a (\cos\alpha\, \vec{i} + \sin\alpha\, \vec{j})$$

$$\vec{a}_{G_2} = \vec{a}_B + \overbrace{\dot{\vec{\omega}}_2}^{\ddot{\beta}\vec{k}} \wedge (G_2 - B) - \overbrace{\omega_2}^{\dot{\beta}}{}^2 (G_2 - B) = a_{G_2x} \vec{i} + a_{G_2y} \vec{j}$$

$$= \vec{a}_B + \ddot{\beta} \overline{BG_2} (-\sin(\beta+\theta)\, \vec{i} + \cos(\beta+\theta)\, \vec{j}) - \dot{\beta}^2 \overline{BG_2} (\cos(\beta+\theta)\, \vec{i} + \sin(\beta+\theta)\, \vec{j})$$

2) Siccome ho tutti vincoli ideali (no attriti), per calcolare $\vec{C}$ mi conviene fare un bilancio di potenze:

$$\sum W_{ATTIVE} + \underbrace{\cancel{\sum W_{REATTIVE}}}_{=0} = \frac{dE_c}{dt} \qquad (4)$$



$$\sum W_{ATTIVE} = -m_1 g\vec{j} \times \vec{v}_{G1} - m_2 g\vec{j} \times \vec{v}_{G2} + \vec{F} \times \vec{v}_{G2} + \vec{C} \times \dot{\vec{\alpha}}$$

Nota:
$F_x = F\cos(\frac{3}{2}\pi-\beta-\theta)$
$F_y = F\sin(\frac{3}{2}\pi-\beta-\theta)$

$$= -m_1 g v_{G1y} - m_2 g v_{G2y} - F_x v_{G2x} + F_y v_{G2y} + C\dot{\alpha}$$

L'unica incognita è C

$$\frac{dE_c}{dt} = J_1 \dot{\vec{\alpha}} \times \ddot{\vec{\alpha}} + m_1 \vec{v}_{G1} \times \vec{a}_{G1} + J_2 \vec{\omega}_2 \times \dot{\vec{\omega}}_2 + m_2 \vec{v}_{G2} \times \vec{a}_{G2}$$

$$= J_1 \dot{\alpha}\ddot{\alpha} + m_1(v_{G1x} a_{G1x} + v_{G1y} a_{G1y}) + J_2 \dot{\beta}\ddot{\beta} + m_2(v_{G2x} a_{G2x} + v_{G2y} a_{G2y})$$

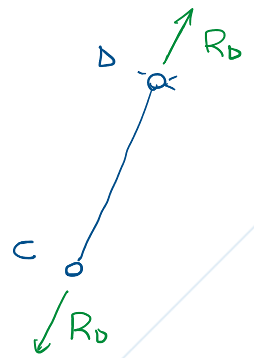
Da (Δ) ricavo C dato che è l'unica incognita

$\hookrightarrow$ $\boxed{\vec{C} = C\vec{k}}$

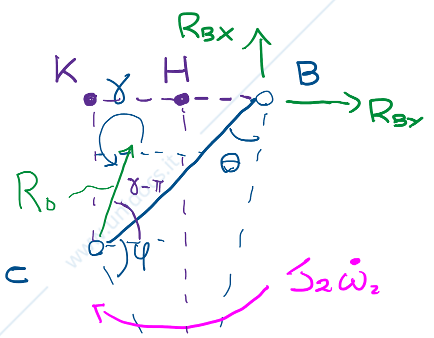
3) Per calcolare le due componenti della reazione vincolare in A devo scrivere degli equilibri dinamici.

Oss : sull'asta DC non agiscono forze esterne e ha massa trascurabile

$\hookrightarrow$ le reazioni vincolari alle sue estremità sono uguali e opposte e dirette lungo la direzione definita dall'asta



Posso calcolare R_D facendo l'equilibrio dei momenti sul corpo BCG_2 rispetto al polo B :

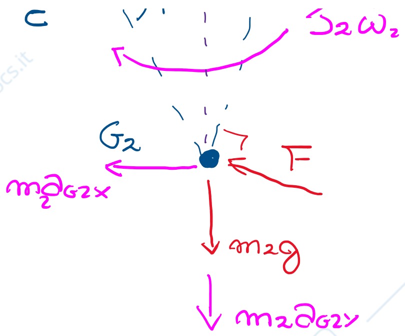


— Forze esterne
— Reazioni vincolari
— Inerzie

(5) $$\sum \vec{\Pi}_B^{(BCG_2)} = 0$$

$$-F\overline{BG_2} - J_2\dot{\omega}_2 - m_2 a_{G2x} \cdot \overline{HG_2} + m_2(g + a_{G2y}) \cdot \overline{BH} + R_D\cos(\gamma-\pi) \cdot \overline{KC} - R_D \sin(\gamma-\pi) \cdot \overline{BK} = 0$$

$\Downarrow$

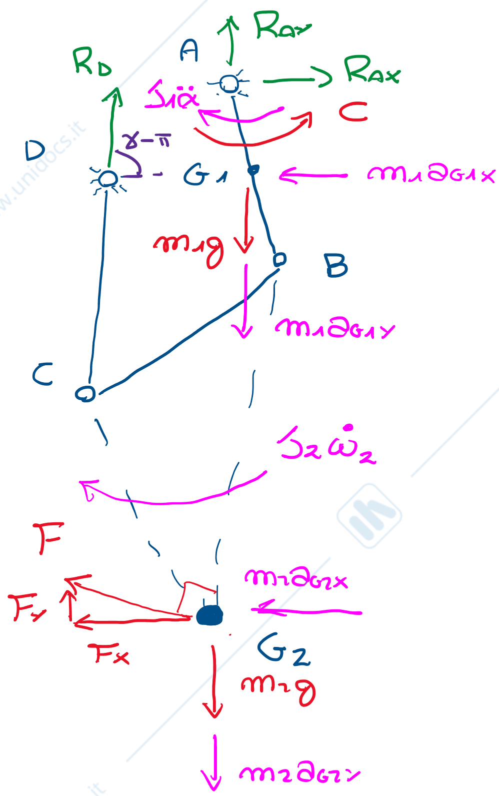


$$-R_D \sin(\gamma-\pi)\cdot BK = 0$$

$$\Downarrow$$

Ricavo R_D

Oss: se scrivo gli equilibri sull'intero sistema le uniche incognite sono le 2 componenti della reazione in A



(6) $\sum F_x^{(TOT)} = 0$

$$R_{Ax} + R_D\cos(\gamma-\pi) - m_1 a_{G1x} - m_2 a_{G2x} - F_x = 0$$

$$\Downarrow$$

Ricavo R_{Ax}

(7) $\sum F_y^{(TOT)} = 0$

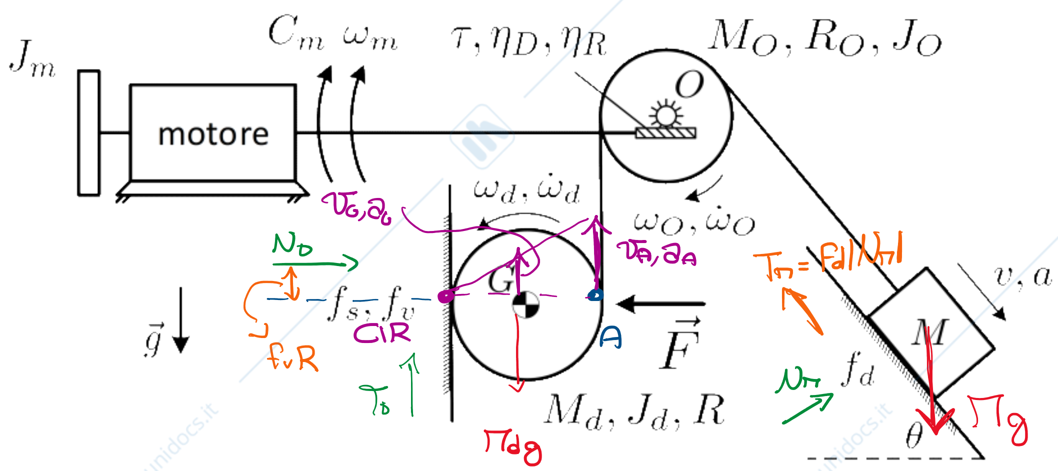
$$R_{Ay} + R_D\sin(\gamma-\pi) - m_1(g+a_{G1y}) - m_2(g+a_{G2y}) + F_y = 0$$

$$\Downarrow$$

Ricavo R_{Ay}

$$\boxed{\vec{R}_A = R_{Ax}\vec{i} + R_{Ay}\vec{j}}$$

Esercizio 2



Legami Cinematici (utilizzo v, a come coordinate libere, visto che sono richieste nell'esercizio)

$$\omega_o = \frac{v}{R_o} \qquad \dot{\omega}_o = \frac{a}{R_o}$$

$$v_A = v \qquad a_A = a$$

$$v_G = \frac{v}{2} \qquad a_G = \frac{a}{2}$$

$$\omega_d = \frac{v}{2R} \qquad \dot{\omega}_d = \frac{a}{2R}$$

$$\omega_m = \frac{\omega_o}{\tau} = \frac{v}{\tau R_o} \qquad \dot{\omega}_m = \frac{a}{\tau R_o}$$

Calcolo W_1 e W_2 nel caso generale

$$W_1 = C_m \omega_m - J_m \dot{\omega}_m \omega_m$$

$$= \frac{C_m}{R_o \tau} v - \frac{J_m}{R_o^2 \tau^2} v a$$

$$= \left(C_{m,o} - K_m \frac{v}{R_o \tau}\right) \cdot \frac{v}{\tau R_o} - M_m^* v a$$

↳ massa ridotta motore al gdl v

$$= \left(\frac{C_{m,o}}{\tau R_o} - K_m \frac{v}{R_o^2 \tau^2}\right) v - M_m^* a v$$

$$W_2 = M g \sin\theta \cdot v - M_D g \cdot v_A - \underbrace{f_v |N_D| R \omega_D}_{\text{Resistenza al rotolamento disco}} - \underbrace{f_d |N_M| v}_{\text{attrito massa } M}$$

$$- \left(M v a + M_d v_G a_G + J_d \omega_d \dot{\omega}_d + J_o \omega_o \dot{\omega}_o \right)$$

Devo ricavare N_D e N_M:

$$\Sigma F_x^{(disco)} = 0 \Rightarrow N_D = F$$

$$\Sigma F_{\perp\theta}^{(M)} = 0 \Rightarrow N_M = M g \cos\theta$$

$$W_2 = M g \sin\theta\, v - M_D g \frac{v}{2} - f_v R F \frac{v}{2R} - f_d M g \cos\theta\, v -$$

$$- \left(M v a + \frac{M_d}{4} v a + \frac{J_d}{4R^2} v a + \frac{J_o}{R_o^2} v a \right)$$

F_u^* → Forza utilizzatore ridotta al gdl v

$$= -\overbrace{\left(M g (f_d \cos\theta - \sin\theta) + \frac{M_D g}{2} + \frac{f_v F}{2} \right)}^{F_u^*} v$$

$$- \underbrace{\left(M + \frac{M_d}{4} + \frac{J_D}{4R^2} + \frac{J_o}{R_o^2} \right)}_{M_u^*} a v$$

M_u^* massa utilizzatore ridotta al gdl v

1) Regime ⇒ $\bar{v}$?

$$W_1 = \left(\frac{C_{m,o}}{\tau R_o} - K_m \frac{\bar{v}}{R_o^2 \tau^2}\right) \bar{v} \gtrless 0 \text{? BOH}$$

$$W_1 = \left(\frac{C_{m,0}}{2R_0} - K_m \frac{\bar{v}}{R_0^2 a^2} \right) \bar{v} \gtrless 0 \ ? \quad \text{BOH}$$

$$W_2 = -F_u^* \bar{v} < 0 \Rightarrow \text{MOTO DIRETTO}$$

siccome $f_d \cos\theta > \sin\theta \Rightarrow F_u^* > 0$

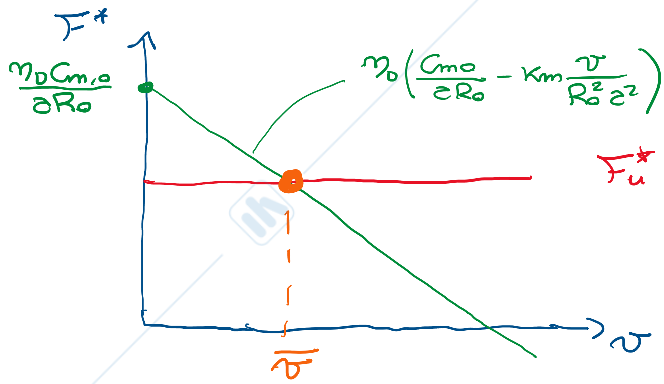
Bilancio sulla Trasmissione

$$\eta_D W_1 + W_2 = 0$$

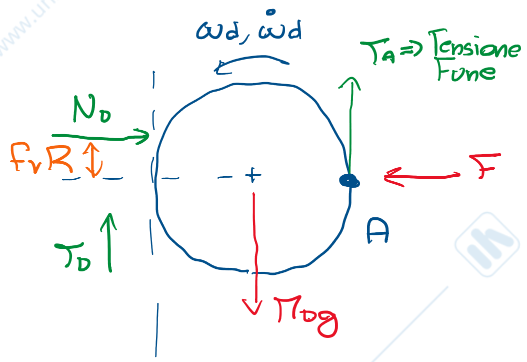
$$\eta_D \left(\frac{C_{m,0}}{2R_0} - K_m \frac{\bar{v}}{R_0^2 a^2} \right) \cancel{\bar{v}} - F_u^* \cancel{\bar{v}} = 0$$

$$\boxed{\bar{v} = \frac{R_0^2 a^2}{\eta_D K_m} \left(\frac{\eta_D C_{m,0}}{2R_0} - F_u^* \right)}$$

Graficamente:



2) Verifica di Aderenza (a regime le inerzie sono nulle)



$$\Sigma F_x^{(disco)} = 0 \Rightarrow \boxed{N_D = F}$$

$$\Sigma M_A^{(disco)} = 0$$

$$-T_D 2\cancel{R} - f_v R N_D + M_D g \cancel{R} = 0$$

$$\boxed{T_D = \frac{1}{2} \left(M_D g - f_v N_D \right)}$$

$$\boxed{\text{Verifica di Aderenza: } |T_D| \leq f_s |N_D|}$$

3) Da regime $C_m = 0$, a?

Oss: a regime era moto diretto, perciò se $C_m = 0$ il sistema tenderà a decelerare ($a < 0$)

$$W_1 = -\Pi_m^* \underbrace{a v}_{<0} > 0 \Rightarrow \text{Moto Diretto}$$

$$W_2 = \underbrace{-F_u^* v}_{<0} \underbrace{- \Pi_u^* a v}_{>0} \gtrless 0 \text{ ? BOH}$$

Bilancio Trasmissione:

$$\eta_D W_1 + W_2 = 0$$

$$-\eta_D \Pi_m^* a \cancel{v} - F_u^* \cancel{v} - \Pi_u^* a \cancel{v} = 0$$

$$\boxed{a = \frac{-F_u^*}{\eta_D \Pi_m^* + \Pi_u^*}}$$