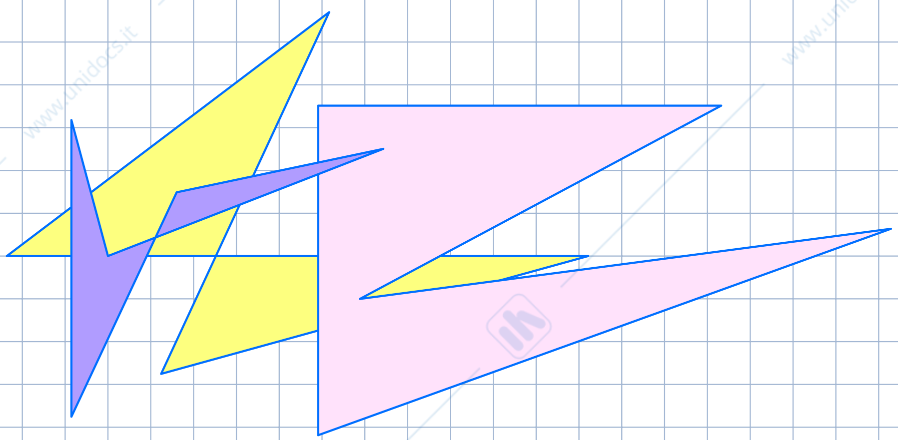
fondamenti di ricerca operativa

lezione 1

- parametro = ciò che conosciamo dall'inizio
- variabile = ciò che varia sempre

Programma esteso	1. Introduzione alla Programmazione Lineare e Lineare Intera. Esempi di formulazione e risoluzione tramite solver di Excel. 2. Programmazione Lineare (PL). Forma di un problema di PL; soluzioni, basi, soluzioni ammissibili; interpretazione del concetto di base; teorema fondamentale della PL; geometria della PL.
	Il metodo del simplesso; formulazione tramite dizionario. Teoria della dualità Introduzione; definizione del problema duale; teoremi di dualità; interpretazione di problemi duali; teorema di "complementary slackness"; dualità e teoria dei giochi (cenni introduttivi); il metodo del simplesso duale. Analisi di sensitività. Introduzione; sensitività sul termine noto; sensitività sul vettore dei costi; aggiunta di una nuova variabile; aggiunta di un nuovo vincolo 3. Programmazione Lineare Intera Esempi di problemi e modelli di programmazione intera. Connessioni tra PL e programmazione lineare intera. Algoritmi generali per la programmazione intera: il metodo di Gomory, il metodo Branch & Bound. 4. Reti di flusso Basi e soluzioni di base nei problemi di flusso; Il problema del flusso di costo minimo. Il problema del cammino di costo minimo: algoritmo di Dijkstra Il problema del flusso massimo: algoritmo di Ford & FUlkerson. Teorema massimo flusso/sezione di capacita' minima

→ la programmazione lineare intera è di complessità esponenziale



ESERCIZIO: rappresentare in due dimensioni il problema di massimizzazione ⇝ problema di massimizzazione della produzione con i vincoli

max $350x_1 + 300x_2$ ⇝ massimizzazione

$12x_1 + 16x_2 \le 2880$ ⇝ I° vincolo
$9x_1 + 6x_2 \le 1566$ ⇝ II° vincolo
$x_1 + x_2 \le 200$ ⇝ III° vincolo
$x_1, x_2 \geq 0$

nella produzione ottima si producono sia x_1 che x_2 in quantità $\neq 0$

domanda ⇒ è possibile (visto che il problema ha 2 variabili) rappresentare su un piano x_1, x_2 il problema, quindi rappresentare il dominio delle variabili, rappresentare i vincoli di ammissibilità e riuscire a rappresentare la funzione obiettivo

se riusciamo a fare queste cose significa che riusciamo a rappresentare geometricamente il problema, e la geometria della PL (programmazione lineare) è il primo argomento che vediamo

rappresentare su un piano x_1 e x_2 vuol dire:
- → rappresentare il dominio delle variabili
- → rappresentare i vincoli di ammissibilità
- → rappresentare la funzione obiettivo

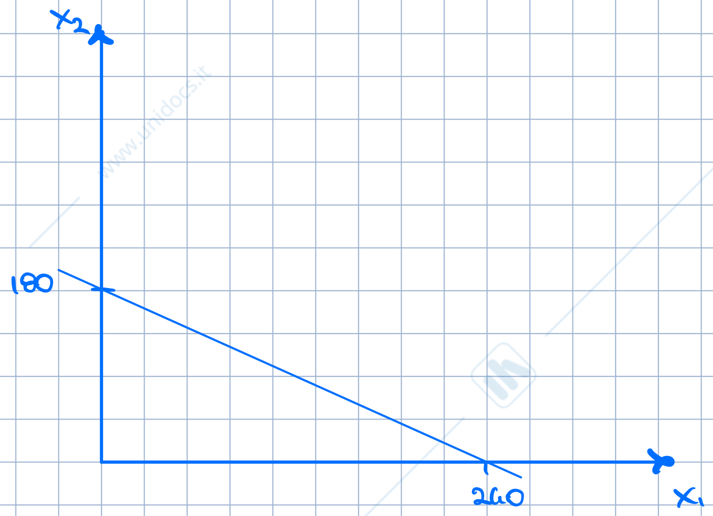
} si riesce a rappresentare geometricamente il problema

- $x_1, x_2 \geq 0$ ⇝ la nostra regione ammissibile (quindi le soluzioni interessanti saranno nel primo quadrante, (quindi avremo una regione ammissibile che è un sottoinsieme del primo quadrante)

- andiamo a rappresentare ciascun vincolo della funzione obiettivo

$12x_1 + 16x_2 \le 2880$ ⇝ I° vincolo (1)
$9x_1 + 6x_2 \le 1566$ ⇝ II° vincolo (2)
$x_1 + x_2 \le 200$ ⇝ III° vincolo (3)
$x_1, x_2 \geq 0$

(1) è un semipiano = uno dei due semipiani in cui la re[tta] ottenuta con $12x_1 + 16x_2 = 288[0]$ divide in due il piano



vado a rappresentare la retta quindi se $x_1 = 0$ $x_2 = 180$
e se $x_2 = 0$ $x_1 = 240$

x_1	x_2
0	180
240	0

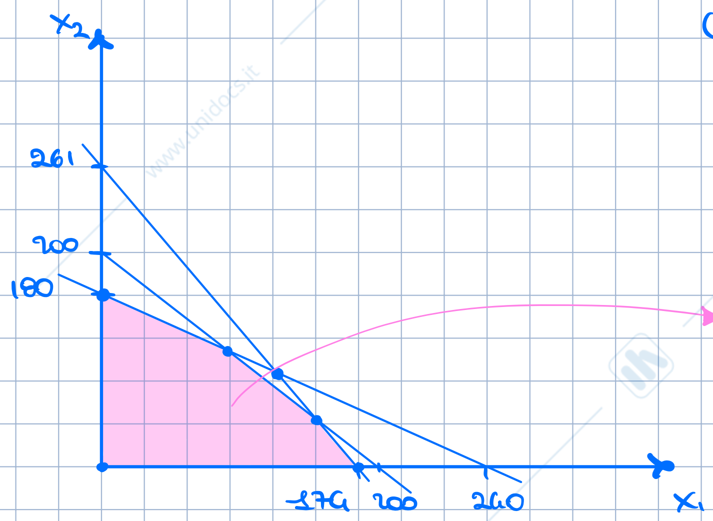
tutti i punti che stanno su quel segmento saranno punti in cui la prima condizione è verificata come uguaglianza ma siccome a noi interessa la regione del piano in cui la quantità a sx del ≤ è proprio ≤ del valore del termine noto, prendendo un punto a caso che non sia sulla retta (ad esempio l'origine) notiamo che il semipiano buono è quello sotto la retta.
quindi se ci fosse solo 1 vincolo e la condizione di non negatività la regione ammissibile sarebbe tutta quella sotto la retta

(2) rappresento la seconda retta

x_1	x_2
0	261
174	0

(3) rappresento la terza retta

x_1	x_2
0	200
200	0



soluzione ottima

soluzione ottima ⤳ è un poliedro che descrive la regione ammissibile che è descritta da un insieme di disequazioni lineari $Ax \leq b$.
su questa regione ammissibile noi possiamo andare ad identificare la soluzione ottima

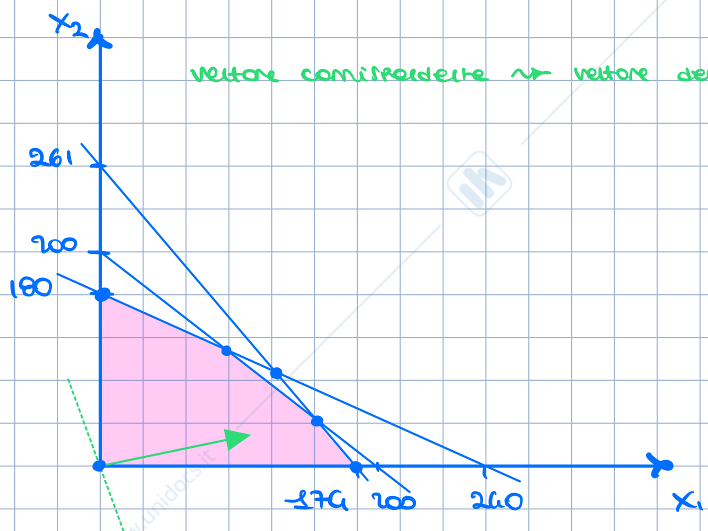
↝ sappiamo che se c'è soluzione possiamo restringerci a considerare i vertici di questa regione ammissibile.
Quest'ultimi sono in corrispondenza con una soluzione particolare che si chiamano soluzioni di base

Vertici e soluzione di base ↝ sono in forte relazione ma di loro
- ad una soluzione di base corrisponde sempre un vertice
- ad un vertice possono corrispondere più soluzioni di base

- quello che dobbiamo ancora fare è capire se attraverso la funzione obbiettivo riusciamo a capire quale di questi vertici è quello ottimo

$350 x_1 + 300 x_2 = k$ (FASCIO DI RETTE)

se proviamo a rappresentare 1 di queste rette è come dire se noi prendiamo sostanzialmente i coefficienti di questa equazione (350 e 300) e disegniamo il vettore corrispondente, questo sarà il vettore ⊥ alla nostra retta



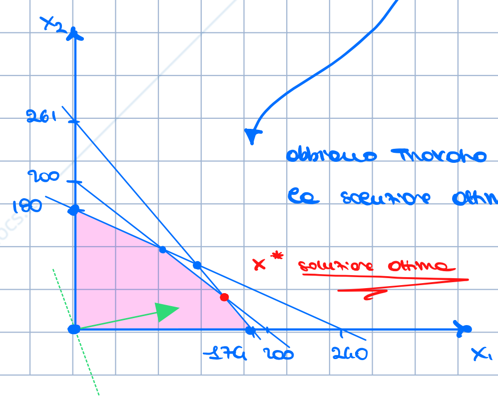
vettore corrispondente ↝ vettore delle derivate prime cioè abbiamo una funzione lineare se faccio la derivata parziale rispetto a x_1 mi trovo il coefficiente 350 se faccio la derivata parziale rispetto a x_2 mi trovo 300

quindi noi sappiamo che se vado nella direzione del gradiente (nella direzione delle derivate parziali) io vado verso la massimizzazione. Vuol dire quindi che di tutte queste rette appartenenti al fascio di rette io voglio andare a trovare quella ma le rette parallele che va nella direzione indicata dal vettore verde (⟶) fino all'ultimo punto in cui rimango nella regione ammissibile

retta del fascio di rette ovvero:

insieme delle soluzioni di valore zero è la retta del fascio di rette passante per l'origine e ⊥ al vettore verde (⟶)

$x^* = (122, 78)$ in coordinate cartesiane



otteniamo quindi la soluzione ottima

→ se al posto di un **max** avessi un **min** il vettore gradiente ci identifica sempre la soluzione di massima crescita quindi se voglio minimizzare io devo andare nella direzione opposta a quella del vettore gradiente.
Di conseguenza se dovessi minimizzare la funzione obiettivo il vertice ottimo sarebbe stato l'origine

→ Quand'è che una variante di questo problema potrebbe avere un **numero infinito** di **soluzioni ottime**?
quindi per far sì che il gradiente si appoggi su un segmento (invece che su un punto) ci deve essere una relazione di dipendenza lineare (ovvero i coefficienti della funzione obiettivo devono essere una combinazione lineare di quel vincolo) quindi se ci fosse una relazione di proporzionalità allora verrebbe fuori che il vincolo è ⊥ al gradiente ovvero funzione obiettivo e vincolo sono coincidenti e meno di costare e quindi vorrebbe dire inclinare diversamente il gradiente e andare a sbattere su tutto un segmento di soluzione.
Quindi può succedere di avere ∞ soluzioni ottime, in particolare però anche se abbiamo ∞ soluzioni due continuano ad essere soluzioni particolari perché sono quelle nei vertici

→ ci possono essere dei **vincoli ridondanti** ≈ se aumentassimo il numero di reset del macchinario possibili e andassimo oltre al vertice, il vincolo non avrebbe effetto

ALGORITMO DEL SIMPLESSO ≈ sfrutta il teorema fondamentale della programmazione lineare per cui la soluzione ottima si muove sui vertici del poliedro e quindi l'algoritmo che andremo a descrivere parte da una particolare soluzione lineare di base (e quindi che sarà in corrispondenza con un vertice) cercherà di capire se la soluzione di base verifica un criterio di ottimalità, se lo verifica si ferma, altrimenti andrà a cercare un'altra soluzione di base (quella che passa da un vertice al vertice adiacente del poliedro)

(1) i vincoli devono essere di uguaglianza

FORMA STANDARD (2) condizioni di non negatività su tutte le variabili

(3) la funzione obiettivo sia di minimo

1ª condizione:

$12x_1 + 16x_2 + x_3 = 2880$

$x_3 = 0$ su tutti i punti della retta che passa da 180 e 240

$9x_1 + 6x_2 + x_4 = 1566$

$x_4 = 0$

$x_1 + x_2 + x_5 = 200$

$x_5 = 0$

2ª condizione:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

3ª condizione (max diventa min)

$\min \; -350x_1 - 300x_2$

m = vincoli = 3, n = variabili = 5 } $5 - 3 = 2$ ⇝ in ogni vertice si annullano 2 variabili

ESEMPIO:

proiezione nello spazio = la differenza è zero

$\min \; c^t x$ (trasposta)

$Ax = b$ — m [m | A $\underbrace{\quad}_{n-m}$] = matrice con:

$x \geq 0$

1ª ipotesi: (1) $m < n$ ⇝ il numero di righe sia minore del numero di colonne

(2) $\text{rank}(A) = m$ ⇝ il rango della matrice sia pieno (*)

(*) rango = il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che ci sono nella matrice, ma dato che la 1ª ipotesi è $n < m$ il rango al massimo è m

vado a scrivere la matrice dei vincoli:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 16 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

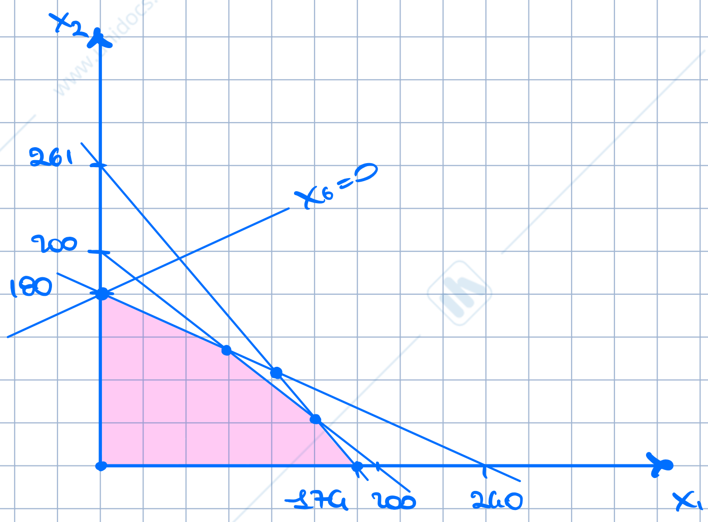
matrice identità

il rango della matrice in questo caso era facile capire che fosse 3

quindi sia l'ipotesi 1ª che 2ª sono verificate

$Ax = b$ ⇝ $A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$, $x \in \mathbb{R}^5$ } $b \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}^5$ ⇝ la dimensione deve essere compatibile con la x perché devo fare $\min \; c^t x$

QUANDO LA CORRISPONDENZA NON È PIÙ BIUNIVOCA:



supponiamo che in un certo vertice non si intersechino solo due rette (perché abbiamo detto che ce ne vogliono 2 per definire una base), ma che ci sia un'ulteriore vincolo per esempio $x_6=0$, succede che il vertice viene ad essere caratterizzato da 3 variabili che vanno a zero.

come faccio a capire dunque quali tenere fuori nella matrice?

$$
A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 12 & 16 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{cases} x_6 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}
$$

⊛

la soluzione di base è caratterizzata da 2 variabili che vanno a zero quindi vuol dire che 2 saranno a zero e saranno fuori dalla base mentre l'altra sarà in base col valore zero

le variabili di base ⇝ sono quelle che danno luogo alla matrice m x n

⊛ quindi io qui ho un'incertezza che deriva dal fatto che a turno una delle 3 equazioni può essere considerata dentro la matrice identità che mi dà l'inversa e potrebbe essere a valore zero (quindi avrei uno zero anche dentro la base) però dentro la matrice o ci sta x_6 o x_1 o x_3, quindi ad uno stesso vertice fisico corrispondono 3 diverse soluzioni di base

se all'esame ci chiede di rappresentare geometricamente un problema in $\mathbb{R}^5$ c'è il trucco per disegnarlo e riportarlo in $\mathbb{R}^2$ perché lei non chiede spazi > IR !

PROBLEMI DI FLUSSO SU RETE NETWORK FLOW OPTIMIZATION

Rappresenteremo dei problemi che sono di flusso su rete ⇝ abbiamo a disposizione una RETE o un grafo (cioè una coppia di insiemi nodi e archi)

- ~ problema del cammino minimo (shortest paths) ⇝ percorso di costo minimo
- ~ problema di flusso di costo minimo (minimum cost flow problem)
- ~ abbinamenti o assegnamenti (matching e assignments)
- ~ problema del commesso viaggiatore (Travelling Salesman Problem)

Problema di flusso di costo minimo FCM:

relazione tra i nodi

- $G = (N, A)$ grafo orientato ⇝ N = insieme dei nodi, A = insieme degli archi
- c_{ij} costo unitario arco (i,j) in A
- $l_{i,j}$, $u_{i,j}$ quantità superiore o inferiore di flusso sull'arco (i,j) in A

i problemi di flusso sono caratterizzati da dei vincoli di bilancio

- b_i bilancio nodo i in N (<0 sorgente, >0 destinazione, $=0$ transito)
- x_{ij} quantità di flusso per ogni arco (i,j) in A

La FORMULAZIONE:

$$\min \; c^t x$$
$$Ex = b$$
$$l \leq x \leq u$$

E ⇝ matrice di incidenza nodi / ARCHI

righe   colonne

Nodo\Arco	..	(i,j)	..
..	0		0
i	0	-1	0
..	0		0
j	0	+1	0

in corrispondenza del nodo da cui l'arco ESCE

in corrispondenza del nodo j in cui l'arco ENTRA

IPOTESI NON RESTRITTIVE:

(1) somma dei bilanci nulla (ammissibilità od opportuna trasformazione)

(2) costi non negativi (si può fare opportune trasformazioni)

(3) CAPACITÀ INFERIORI nulle (opportuna trasformazione)

(4) FORTE CONNESSIONE DEL GRAFO (per ogni coppia di nodi esiste un cammino che li connette

TEORIA ALGORITMI

DEFINIZIONE PROBLEMA DI PL

- lineare = esiste una relazione tra i coefficienti
- dato un vettore di variabili andremo a esprimere il problema con un min o max di una certa funzione espressa con i coefficienti c (è un vettore) e quindi la funzione obiettivo è il prodotto scalare tra il vettore dei costi e quello delle variabili.

il prodotto ci dice che la relazione è lineare

$$\min_{(\max)} \; c^t x \qquad x \in \mathbb{R}^n \quad c \in \mathbb{R}^n$$

- dopo di che abbiamo quelli che sono i vincoli che esprimono le qualità che la soluzione deve avere e quest'ultimi possono essere vincoli di $= ; \leq ; \geq$ (non ci sono altri vincoli)

$$\min_{(\max)} \; c^t x \qquad x \in \mathbb{R}^n \quad c \in \mathbb{R}^n$$

$a_i^t x = b_i \quad \forall i \in E$ → poi abbiamo un pacchetto di vincoli di uguaglianza e se abbiamo a seconda di quelli sono per elementi di E

$a_i^t x \geq b_i \quad \forall i \in G$

$a_i^t x \leq b_i \quad \forall i \in L$

a_i → hanno dimensione uguale al numero di variabili
b_i → è un Reale perché è il risultato di un prodotto scalare

- le variabili sono un vettore di lunghezza n e non è detto che su tutte le variabili sono definiti dei vincoli di segno e quindi in generale si dice che:

$x_j \geq 0 \quad \forall j \in D^+$ → dove sottointendiamo che $|D^+| \leq n$

(D^+: dominio positivo; $|D^+|$: cardinalità)

- nella forma standard io ho che x le condizioni:

(1) minimo $\quad \min \; c^t x$

(2) vincoli $= \quad Ax = b$

(3) varib. no negat. $\quad x \geq 0$

} PROBLEMA IN FORMA STANDARD

- avendo tutti i vincoli la stessa forma li abbiamo potuti raccogliere in una stessa matrice $n \times m$

$$\min \; c^t x \qquad x \in \mathbb{R}^n$$
$$Ax = b \qquad c \in \mathbb{R}^n$$
$$x \geq 0 \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

m = numero di vincoli
n = numero di variabili

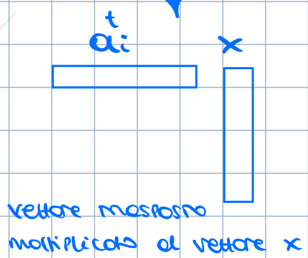
PORTARE UN PROBLEMA CHE NON È IN FORMA STANDARD AD UN PROBLEMA IN FORMA STANDARD

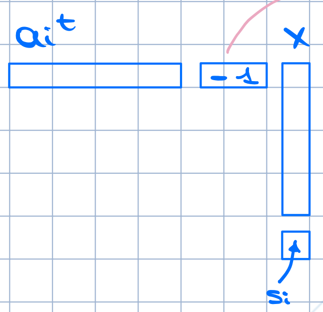
- PARTIAMO DAI VINCOLI:

(1) se abbiamo vincolo $\geq$ ⤳ $a_i^t x \geq b_i$, dobbiamo riportarlo ad un vincolo di uguaglianza

$$a_i^t x \geq b_i \qquad \begin{cases} a_i^t x - s_i = b_i \\ s_i \geq 0 \end{cases}$$

lo riscrivo — termine di eccedenza di





$$Ax \geq b$$
$$Ax - Is = b \quad \text{matrice identità}$$
$$I \in \mathbb{R}^{n \times m} \qquad s \in \mathbb{R}^m$$

ESEMPIO:

$$\min \; x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 5$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

avrò 2 variabili di surplus (s_1 e s_2)

matrice di partenza

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\sim\sim$

$$\min \; x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 5 \;\rightsquigarrow\; x_1 + 2x_2 - s_1 = 5$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6 \;\rightsquigarrow\; 2x_1 + 3x_2 + x_3 - s_2 = 6$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$
$$s_1, s_2 \geq 0$$

matrice identità

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) se abbiamo $\leq$ ⇝ $a_i^t x \leq b_i$

- $-a_i^t x \geq -b_i$ ⇝ $-a_i^t x - s_i = -b_i$

$a_i^t x + s_i = b_i$

- $a^t x + s_i = b_i$, con $s_i \geq 0$

SCARTO (SLACK)

- cosa succede se le variabili non rispettano i vincoli attesi

(1) $x_j \leq 0$ ⇝ $x_j^+ = -x_j \geq 0$

(2) $x_j \lesseqgtr 0$ ⇝ qua bisogna aumentare il numero delle variabili, perchè ogni variabile che non vincolata in segno deve essere riscritta come differenza di due variabili

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$

$$x_j^+ , x_j^- \geq 0$$

ESEMPIO:

$\min \; x_1 + 3x_2 + 4x_3$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$

$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$

$x_1, x_2 \geq 0$ ⇝ il problema non è in forma standard per l'assenza di un vincolo di non negatività su x_3

$x_3 = x_3^+ - x_3^-$

$x_3^+ , x_3^- \geq 0$

~~

$\min \; x_1 + 3x_2 + 4x_3^+ - 4x_3^-$

$x_1 + 2x_2 + x_3^+ - x_3^- = 5$

$4x_1 + 3x_2 + 2x_3^+ - 2x_3^- = 6$

$x_1, x_2, x_3^+, x_3^- \geq 0$

ASTRAZIONE DI CIÒ CHE ABBIAMO VISTO

$$\min \begin{bmatrix} c_1^t & c_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad\qquad \min \begin{bmatrix} c_1^t & c_2^t & -c_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y^+ \\ y^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & -A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y^+ \\ y^- \end{bmatrix} = b$$

$$x \geq 0 \qquad\qquad \begin{bmatrix} x \\ y^+ \\ y^- \end{bmatrix} \geq 0$$

- se abbiamo problemi di max:

durante l'ottimizzazione non si considera

$$\max \ c^t x \quad \rightsquigarrow \quad - \min \ -c^t x$$

FORMA CANONICA : i vincoli sono ≥ 0

$$\min \ c^t x$$
$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

- se io ho i vincoli che sono di uguaglianza :

$$\begin{array}{l} \min \ c^t x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \min \ c^t x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array}$$

FORMA STANDARD :

Hp che facciamo per lavorare nel mondo della programmazione lineare

$$\min \ c^t x \qquad x \in \mathbb{R}^n \text{ per le variabili}$$
$$Ax = b \qquad c \in \mathbb{R}^n$$
$$x \geq 0 \qquad \left.\begin{array}{l} A \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ b \in \mathbb{R}^m \end{array}\right\} \text{per i parametri}$$

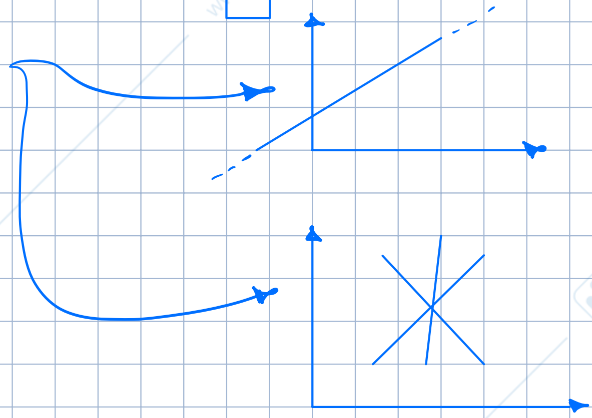
le ipotesi che facciamo sono ipotesi <u>non restrittive</u> e sono 2:

(Hp 1) $m < n$ numero vincoli < numero variabili

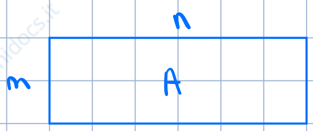
perchè questa ipotesi è non restrittiva ? →

se $m > n$ abbiamo una matrice $\boxed{}$ e il vettore delle variabili $\boxed{}$

$$\boxed{A}\ \boxed{x} = \boxed{b}$$



(Hp 2) rango(A) = m



se ce ne fossero meno di m uno dei vincoli sarebbe ridondante

TERMINOLOGIA DELLE SOLUZIONI:

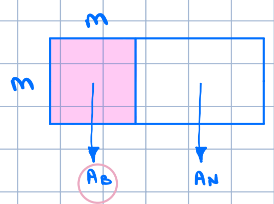
- $x \in \mathbb{R}^n$ è soluzione quando x è t.c. $Ax = b$ (soddisfa tutte le uguaglianze)
- $x \in \mathbb{R}^n$ è soluzione ammissibile se x è t.c. $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$
- $x \in \mathbb{R}^n$ è soluzione ottima se $c^t x \leq c^t y$ dove y è una soluzione che verifica $\begin{cases} Ay = \\ y \geq \end{cases}$

le otteniamo in virtù del fatto che il problema è in forma standard e con le 2 ipotesi

SOLUZIONI DI BASE: soluzioni ai vertici del poliedro

$$\begin{cases} \min c^t x = b \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} (Hp\ 1)\ m < n \\ (Hp\ 2)\ \text{rango}(A) = m \end{array}$$

- A è una matrice rettangolare
- rango$(A) = m$



deve essere linearmente indipendente

B = Base

N = Fuori Base

$A_B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ $\quad \det(A_B) \neq 0$

$A_N \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$

è invertibile perché $\det(A_B) \neq 0$

- consideriamo un sottosistema che è fatto da $A_B y = b \rightsquigarrow y = A_B^{-1} b$
- una volta ottenuto il sistema vediamo cosa succede se consideriamo una particolare soluzione $\bar{x}$ che è fatta da 2 componenti

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} A_B^{-1} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ma $\bar{x}$ è soluzione? ovvero $\bar{x}$ è t.c. $A\bar{x} = b$?

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} A_B & A_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_B^{-1} b \\ 0 \end{bmatrix} = b + A_N \cdot 0 = b$$

⇝ quello che capiamo come indicazione generale è che se ci focalizziamo sul m colonne linearmente indipendenti che fanno parte della matrice A e le chiamiamo A_B noi possiamo andare a costruire con queste componenti una soluzione che per un pezzo di dimensione m ha come valori quelli che si ottengono risolvendo un sistema ridotto e per il resto è completato con 0.

Quello che si ottiene è effettivamente una soluzione perché per la definizione è quella che soddisfa, per costruzione, tutti i vincoli di uguaglianza

Se voglio una soluzione ammissibile devo vedere se le m componenti sono ≥ 0

ESEMPIO:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_B}\!\!\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{matrix}}_{A_N} \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

con $m = 3$ e $n = 5$ $\rightsquigarrow$ $\begin{cases} Hp\ 1 \ ✓ \ (m < n) \\ Hp\ 2 \ ✓ \ (\text{rango}(A) = 3) \end{cases}$

$$\bar{x}_B = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

abbiamo costruito una soluzione $\bar{x}$ che è fatta da 2 pezzi $\bar{x} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2 \\ 12 \\ 18 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{matrix}$ un primo pezzo è fatto da un numero $m = 3$ componenti le altre sono le restanti di n che sta a 0

- la soluzione trovata è
  - una soluzione? sì! l'ho costruita in modo tale che soddisfi tutti i vincoli di uguaglianza
  - una soluzione ammissibile? no! non tutti i valori sono ≥ 0
  - una soluzione di base? sì! la sua Base è formata dall'in[...] che la corrispondono

$B = \{1, 2, 3\}$

1ª 2ª 3ª colonna che sono gli indici delle variabili che sono in base

LEZIONE 5

$\rightsquigarrow$ soluzione $\Rightarrow$ $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Ax = b$

$\rightsquigarrow$ soluzione ammissibile $\Rightarrow$ $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Ax = b$, $x \geq 0$

$\rightsquigarrow$ soluzione di base $\Rightarrow$ si identifica una base (pescare un certo numero di colonne nella matrice che potrebbero anche essere la terza la quinta e l'ultima) B. la base B quindi mi indica gli indici delle colonne della matrice. Se prendiamo la prima matrice come Base la chiamiamo a chiamarla A_B e l'altra A_N.

A_B deve essere
- quadrata $A_B \in \mathbb{R}^{m \times m}$
- invertibile $\det(A) \neq 0$

} le m colonne sono linearmente indipendenti grazie all'ipotesi 2

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1} b \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow A\bar{x} = A_B \bar{x}_B + A_N \bar{x}_N = \overbrace{A_B (A_B^{-1}}^{I \text{ (matrice identità)}} b) + 0 = $$

soluzione

rispetto alla domanda = verificare l'ammissibilità della soluzione, noi non dobbiamo andare a vedere se il prodotto di $A\bar{x} = b$ perché questo è vero per costruzione. io devo verificare solo che tutte le condizioni siano ≥ 0

ESEMPIO PRECEDENTE :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}}_{= A}$$

$m = 3$ $\quad m < n$

$n = 5$ $\quad$ rango $(A) = 3$ ⇝ nella matrice A ci devono essere 3 vettori linearmente indipendenti quindi se confrontiamo alle colonne della matrice identità riconosciamo sono linearmente indipendenti, e le prime 3 colonne rispecchiano questa caratteristica

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & \boxed{0 & 0 & 1} & 0 \\ 0 & \boxed{1 & 0 & 0} & 2 \\ 0 & \boxed{0 & 1 & 3} & 2 \end{bmatrix}}_{= A} x = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

A_B =

- se scelgo come base le colonne 2,3,4 ⇝ $B = \{2,3,4\}$

∼ queste 3 colonne sono linearmente indipendenti?

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ la matrice è invertibile

$$\bar{x} = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 \\ ? \\ ? \\ ? \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{array}$$ la 1 e la 5 sono le due variabili fuori base $\quad$ $\bar{x} = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{array}$

vado a inserirei

$$\bar{x}_B = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$ ⇝ abbiamo trovato la porzione di base della soluzione

∼ la soluzione è ammissibile? ⇝ $\bar{x}_B \geq 0$

$$\bar{x}_B = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \geq 0$$ sì!

∼ la soluzione è degenere?

nella soluzione c'è degenerazione quando sappiamo che la soluzione viene ad avere un numero di componenti nulle che è strettamente maggiore di $n-m$.

$n - m = 5 - 3 = 2$ in ogni soluzione di base almeno 2 componenti a 0 ci devono essere.

se ce ne fossero più di $n-m$ vorrebbe dire che una o più di queste componenti ottenute dal prodotto matrice vettore viene fuori come componente nulla e allora è un ulteriore zero ma è uno zero che sta in base. ⇝ questo però aggiunge una qualifica alla soluzione ovvero che è degenere

TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE

~ Hp 1 problema in forma standard ⇝ $\min c^t x$, $Ax = b$, $x \geq 0$

~ Hp 2 ipotesi non restrittive ⇝ ① $m < n$ ② rango $(A) = m$

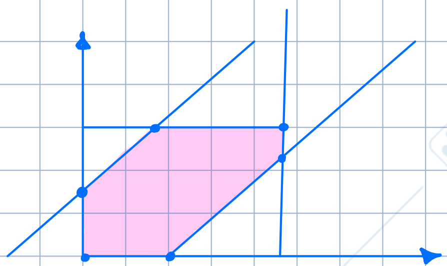
TESI ① "Esiste una soluzione ammissibile se e solo se esiste una soluzione ammissibile di base"

$\exists$ soluz amm $\Leftrightarrow$ $\exists$ soluz base amm

TESI ② "esiste una soluzione ottima se e solo se esiste una soluzione di base ottima"

$\exists$ soluz ottima $\Leftrightarrow$ $\exists$ soluz di base ottima

dimostrazione TESI ① da una soluzione qualunque in una soluzione di base



se abbiamo soluzioni di base noi dobbiamo considerare solo i vertici del poliedro

dimostrazione se $\exists$ una soluz $\bar{x}$ ammiss $\Rightarrow$ $\exists$ una soluz. di base amm

$\bar{x}$ è un vettore a n componenti

$A = [A_1, A_2, \dots, A_n]$ matrice a n componenti

$Ax = b$ ⇝ $\sum_{i=1}^{n} A_i \bar{x}_i = b$ (*)

sia $p \in [0; n]$ il numero di componenti $\neq 0$ di $\bar{x}$, supponiamo che siano le prime

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (*) \quad \sum_{i=1}^{p} A_i \bar{x}_i = b$$ perché le altre componenti sono nulle

- il teorema a questo punto si biforca e va ad analizzare 2 casi complementari e i casi che si vanno ad affrontare sono di ordine ad analizzare i vettori $A_1 \dots A_p$ e questi due vettori possono essere in una delle due posizioni alternative (o sono linearmente indipendenti o sono linearmente dipendenti)

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} A_i \bar{x}_i = b}$$

→ $A_1 .. A_p$ sono linearmente indipendenti (1)

→ A_1 A_p sono linearmente dipendenti (2)

(1) se $A_1 .. A_p$ sono linearmente indipendenti :

in questo caso al massimo possono essere m e quindi $p \leq m$

se $p = m$

$\bar{x}$ è già soluz. di base

↓

soluzione no degenere

tutte le componenti $\neq 0$

se $p < m$

abbiamo trovato p

vettori linearmente

indipendenti e quindi

dobbiamo trovare all

$m-p$ colonne la cui

proprietà è quella d

essere linearmente ind

e quando vado a for

il prodotto la comp

$\bar{x}_i = 0$

↓

in questo caso sol

base degenere

($m-p$ compon. $= 0$

(2) se $A_1 ... A_p$ sono linearmente dipendenti

dipendente lineare = esiste una combinazione lineare dei vettori non tutta fatta da coefficienti nulli che mi dà il vettore nullo

anche quando $y_1 ... y_p$ non sono nulli

$\exists y_1 ... y_p$ per cui se considero $\sum_{i=1}^{p} y_i A_i = 0 \Rightarrow \varepsilon \sum_{i=1} y_i A_i = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{p} \varepsilon y_i A_i}$

se metto in relazione $\boxed{}$ ottengo $\sum_{i=1}^{p} (\bar{x}_i + \varepsilon y_i) A_i = b$ (*)

vado a scrivere il vettore $y_1 ... y_p$ come un vettore che aveva p componenti lo faccio diventare un vettore a n componenti dove tutte quelle dalla $p+1$ in poi sono tutte 0

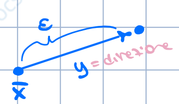
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

quindi (*) questa mi diventa :

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{x}_i + \varepsilon y_i) A_i = b$$

↓

$(\bar{x} + \varepsilon y) A = b$ ⟹ vettore che mi soddisfa il sistema di equazioni



Vado a verificare ora che il vettore trovato sia ammissibile

$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \rightsquigarrow \bar{x} + \varepsilon y \geq 0$?

~ quando $i > p$, sia $\bar{x}_i$ che $y_i = 0$ quindi poi $\bar{x}_i + \varepsilon y_i \geq 0$

~ quando $i \leq p$

per soluzione da cui sono partita ammissibile doveva più essere ≥ 0

- se $y_i = 0$ $\rightsquigarrow \bar{x}_i > 0$ $\quad \bar{x}_i + \varepsilon y_i = \bar{x}_i > 0$
- se $y_i > 0$ $\rightsquigarrow \bar{x}_i + \varepsilon y_i \overset{?}{\geq} 0$ $\quad \forall \varepsilon \geq -\bar{x}_i / y_i$ — opposto positivo

  condizione + stringente

  $\varepsilon_e = \max_{i \text{ t.c. } y_i > 0} \{-\bar{x}_i / y_i\}$

  opposto negativo
- se $y_i < 0$ $\rightsquigarrow \bar{x}_i + \varepsilon y_i \overset{?}{\geq} 0$ $\quad \forall \varepsilon \leq -\bar{x}_i / y_i$

  $\varepsilon_R = \min_{i \text{ t.c. } y_i < 0} \{-\bar{x}_i / y_i\}$

in questo range sto nell'ammissibilità

$\forall \varepsilon \in [\varepsilon_e ; \varepsilon_R] \rightsquigarrow \bar{x} + \varepsilon y \geq 0$

cosa succede se prendo come ε i valori agli estremi?
vuol dire che c'è almeno una componente che va a zero
quindi io sono riuscito da una soluzione che aveva p
componenti $\neq 0$ ad avere una soluzione con $p-1$ componenti $\neq 0$
ed è una soluzione che continua ad essere ammissibile

Possibili domande ~ dimostra il teorema fondamentale PL
~ data la soluzione $\bar{x}$ determina a partire da questa soluzione una soluzione di base

ESEMPIO :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array} x = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

viene data una soluzione $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 12 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

$m = 3 \quad n = 5 \quad p = 4$ (vettore con 4 componenti $\neq 0$ $\rightsquigarrow$ no sol base)

- la soluz. è ammissibile ? $\left.\begin{array}{l} A\bar{x} \overset{?}{=} b \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$ $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 12 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$ √ è ammissibile

- in questo caso $A_1 \dots A_p$ non sono linearm. indip. perché $p = 4$ ed è $> m$

$A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ sono linearm. dipendenti, allora esiste dei coefficienti lineari $y_1, y_2\ y_3\ y_4$ per cui la loro comb
lineare è nulla

$$y = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow -1/2 \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{A_1} + 0 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{A_2} + 3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{A_3} - 1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{A_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

aggiungo uno zero almeno arrivo a $n=5$

$\rightsquigarrow$ è il vettore nullo uscit[o] dalla combinazione linea[re] dei vettori pur in present[za] delle componenti di y c[he] non sono tutte zero

dimostrazione che $A_1 \ldots$ sono linearm. dipendenti

$A(\bar{x} + \varepsilon y) = b$ ma $(\bar{x} + \varepsilon y) \geq 0$?

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 12 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 - 1/2\,\varepsilon \\ 12 \\ 3 + 3\varepsilon \\ 5 - \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} \overset{?}{\geq} 0$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 - 1/2\,\varepsilon \\ 12 \\ 3 + 3\varepsilon \\ 5 - \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

$\varepsilon \leq 1$

$\varepsilon \geq -1 \rightsquigarrow \varepsilon_e = -1$

$\varepsilon \leq 5$

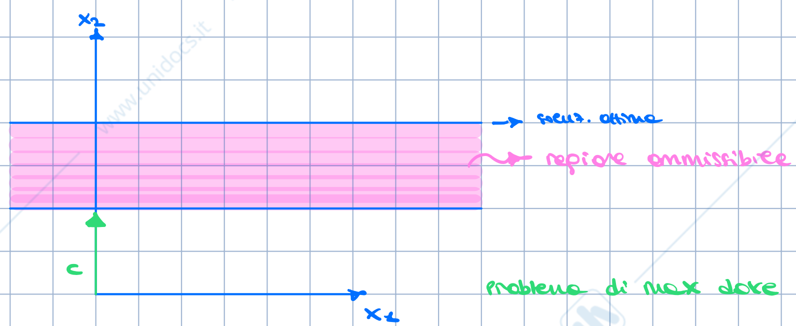
$\varepsilon_h = 1$

$\forall \varepsilon \in [-1; 1] \rightsquigarrow$ ho l'ammissibilità di tutte le soluzioni

se $\varepsilon = 1 \rightsquigarrow x = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

prendendo l'estremo di ε almeno una soluzione mi è andata a zero riuscend[o] così a trovarmi una soluzione di ba[se] in quanto ha $P = 3 = m$

Quesito $\rightsquigarrow$ il problema ha soluzione ottima? dov'è la soluzione di Base? (*) $\rightarrow$



problema di max dove il vettore gradiente è quello verde

la soluzione ottima è quella più alta ma esistono ∞ soluzioni ottime