TEORIA FRO

FORMA STANDARD:

- VINCOLI DI UGUAGLIANZA
- CONDIZIONI DI NON NEGATIVITÀ SULLE VARIABILI
- FUNZIONE OBIETTIVO DI MINIMO

$$\boxed{\begin{aligned} \min\ & c^t x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}}$$

SE VOGLIAMO PORTARE IL PROBLEMA IN FORMA STANDARD:

- SE HO VINCOLO DI $\geq$, TOLGO UNA VAR DI SCARTO $\ldots - s = \ldots$
- SE HO VINCOLO DI $\leq$, AGGIUNGO UNA VAR. DI SURPLUS $\ldots + s = \ldots$
- SE NON HO VINCOLO DI $\geq$ SULLE VAR. LO IMPONGO es. $x_1 = x_1^+ + x_1^-$, $x_1^+, x_1^- \geq 0$

FORMA CANONICA

SE VOGLIO PASSARE DALLA F.S. ALLA CANONICA:

$$\begin{aligned} \min\ & c^t x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$Ax = b \rightarrow \begin{cases} Ax \leq b \\ Ax \geq b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -Ax \geq -b \\ Ax \geq b \end{cases}$$

DEF. SOLUZIONE $\rightarrow$ $x \in \mathbb{R}^n$ È SOLUZIONE SE x È T.C. VERIFICA TUTTI I VINCOLI $Ax = b$.

SOLUZIONE AMMISSIBILE $\rightarrow$ $x \in \mathbb{R}^n$ È SOLUZIONE AMMISSIBILE SE x È T.C. VERIFICA $Ax = b$ e $x \geq 0$.

SOLUZIONE OTTIMA $\rightarrow$ $x \in \mathbb{R}^n$ È SOLUZIONE OTTIMA SE IL COSTO DI UNA QUALSIASI SOLUZIONE x È $\leq$ DEL COSTO DI UNA QUALSIASI SOLUZIONE y. $c^t x \leq c^t y \quad \forall\, y$ T.C. $Ay = b$ e $y \geq 0$

SOLUZIONE DI BASE $\rightarrow$ Hp. rango$(A) = m \leq n$ VUOL DIRE CHE NELLA MATRICE A ABBIAMO UNA SOTTOMATRICE A_B DI VETTORI L.I., QUINDI IL DETERMINANTE DI A_B È DIVERSO DA ZERO E LA MATRICE È INVERTIBILE.

$A_B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ $\quad \det(A_B) \neq 0 \quad$ $A_N \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$

A_B	A_N

A_B È QUINDI LA MATRICE DI BASE.

RICORDANDO CHE IL TERMINE NOTO b È m-DIMENSIONALE, SI HA CHE IL SISTEMA DI EQUAZIONI $A_B x = b$ AMMETTERÀ SEMPRE UNA E UNA SOLA SOLUZIONE $\bar{x}_B = A_B^{-1} b \in \mathbb{R}^m$. IL VETTORE n-DIMENSIONALE $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B \\ 0 \end{bmatrix}$ È SOLUZIONE DEL SISTEMA $Ax = b$ INFATTI:

$$A\bar{x} = [A_B\ A_N] \begin{bmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{bmatrix} = A_B \underbrace{\bar{x}_B}_{= A_B^{-1} b} + A_N \underbrace{\bar{x}_N}_{= 0} = A_B A_B^{-1} b + 0 = b$$

SOLUZIONE DEGENERE $\Rightarrow$ QUANDO UNA SOLUZIONE DI BASE HA PIÙ DI $n-m$ COMPONENTI PARI A ZERO È UNA SOLUZIONE DEGENERE.

SOLUZIONE DI BASE AMMISSIBILE $\Rightarrow$ UNA SOLUZIONE DI BASE SI DICE ANCHE AMMISSIBILE SE TUTTI I COMPONENTI DELLA SOLUZIONE SONO ≥ 0.

THM FONDAMENTALE DELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE

$\min c^t x$ Hp. ① $m < n$

$Ax = b$ ② Rango $(A) = m$

$x \geq 0$

Tesi 1) $\exists$ una soluzione ammissibile $\Leftrightarrow$ $\exists$ una soluzione di base ammissibile

2) $\exists$ una soluzione ottima $\Leftrightarrow$ $\exists$ una soluzione di base ottima.

DIM 1) $Ax = b$ posso scriverlo come $\sum_{i=1}^{n} A_i \bar{x}_i = b$

Se consideriamo p il n° di componenti $\neq 0$ di $\bar{x}$, $p \in [0, n]$ $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \\ 0 \end{bmatrix}$

$\sum_{i=1}^{p} A_i \bar{x}_i = b$ $\rightarrow$ 1° CASO $A_1 \dots A_p$ sono L.I.

$\rightarrow$ 2° CASO $A_1 \dots A_p$ sono L.D.

CASO 1 LI $p \leq m$

- $p = m \Rightarrow \bar{x}$ È SOL. DI BASE
- $p < m \Rightarrow$ ESISTERANNO $m-p$ COMPONENTI $= 0$ IN BASE E AVRÒ QUINDI UNA SOLUZIONE DI BASE DEGENERE.

CASO 2 LD

$\exists\, y_1 \dots y_p$ non tutti nulli

T.c. $\sum_{i=1}^{p} y_i A_i = 0 \Rightarrow \varepsilon \sum_{i=1}^{p} y_i A_i = 0$

$p \in [0, n]$

$\sum_{i=1}^{p} A_i \bar{x}_i = b + \sum_{i=1}^{p} \varepsilon y_i A_i = 0$

$\sum_{i=1}^{p} (\bar{x}_i + \varepsilon y_i) A_i = b$

Posso trasformare un vettore da p componenti a n componenti, aggiungendo da $p+1$ in poi degli zeri.

$\bar{x}^t = [\bar{x}_1 \dots \bar{x}_p\, 000 \dots 0]$ $\quad y^t = [y_1 \dots y_p\, 000 \dots 0]$ $\quad \bar{x} + \varepsilon y = b$

Quindi il nuovo vettore è soluzione di $Ax = b \Rightarrow A(\bar{x} + \varepsilon y) = b$

È ammissibile? Se $i > p \Rightarrow \bar{x}_i = y_i = 0$

Se $i \leq p \Rightarrow \begin{cases} y_i = 0 \quad \bar{x}_i \geq 0 \\ \bar{x}_i + \varepsilon y_i = \bar{x}_i \geq 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y_i > 0 \quad \bar{x}_i > 0 \\ \bar{x}_i + \varepsilon y_i \geq 0 \Rightarrow \forall \varepsilon \geq -\frac{\bar{x}_i}{y_i} \end{cases}$

$\begin{cases} y_i < 0 \\ \bar{x}_i + \varepsilon y_i \geq 0 \Rightarrow \forall \varepsilon \leq -\frac{\bar{x}_i}{y_i} \end{cases}$

Quindi $\varepsilon_L = \max_{i \text{ t.c. } y_i > 0} \left\{ -\frac{\bar{x}_i}{y_i} \right\}$, $\varepsilon_R = \min_{y_i < 0} \left\{ -\frac{\bar{x}_i}{y_i} \right\}$

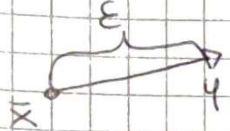
$\bar{x} + \varepsilon y$ è ≥ 0 $\forall \varepsilon \in [\varepsilon_L, \varepsilon_R]$ Amm.

DIM 2) $\exists \bar{x}$ T.C. $A\bar{x} = b$ $\bar{x} \geq 0$ $\quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

CASO 1 VETTORI L.I. SI OPERA COME NELLA DIM. DELL'AMMISSIBILITÀ.

CASO 2 VETTORI L.D. $A_1 \dots A_p$

QUELLO CHE ABBIAMO FATTO X L'AMMISSIBILITÀ ERA:



$\bar{x} \to \varepsilon y + \bar{x}$ SOLUZIONE AMMISSIBILE $\forall \varepsilon \in [\varepsilon_e, \varepsilon_R]$

$\varepsilon_R > 0 \quad \varepsilon_e < 0$

PER L'OTTIMALITÀ OCCORRE STUDIARE IL COSTO DELLA NUOVA SOLUZIONE $\bar{x} + \varepsilon y$, RISPETTO ALLA VECCHIA $\bar{x}$. QUESTE DOVREBBERO AVERE PARI COSTO

$c^t(\bar{x} + \varepsilon y) = c^t\bar{x} + \varepsilon c^t y \Rightarrow$ CONCLUSIONI $c^t y$ Poiché partiamo dall'Hp. che la vecchia sol. è ottima.

Se $c^t y > 0 \Rightarrow$ Potrei scegliere un $\varepsilon < 0$ e quindi otterrei il costo $c^t\bar{x}$ - QTà, il che sarebbe un assurdo poiché $\bar{x}$ è già sol. ottima.

Se $c^t y < 0 \Rightarrow$ Potrei scegliere un $\varepsilon > 0$ e quindi otterrei il costo $c^t\bar{x}$ - Qtà, il che è di nuovo un assurdo.

Affermo quindi che c^t e y sono L.I. e quindi il loro prodotto scalare fa zero $c^t y = 0$

Quindi $\to \quad c^t(\bar{x} + \varepsilon y) = c^t\bar{x}$

GEOMETRIA DELLA PL

DEF SOTTOSPAZIO $\to$ È UN QUALUNQUE $S \subseteq \mathbb{R}^n$ CHE SIA CHIUSO RISPETTO A:

1. SOMMA VETTORIALE 2. PRODOTTO VETTORE · SCALARE

$S = \{(x, y) \text{ T.C. } Ax = 0\}$

DIMENSIONE SOTTOSPAZIO $\to$ COINCIDE CON IL MAX N° DI VETTORI L.I. CONTENUTI IN S.

THM $\to$ DATO $S = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ T.C. } Ax = 0\}$ LA $\dim(S) = n - \text{rango}(A)$

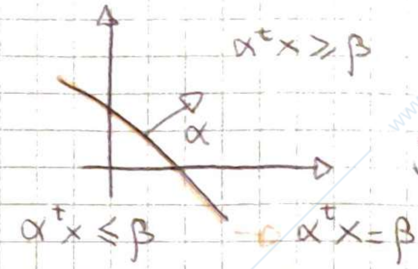
SOTTOSPAZIO AFFINE $\to$ OTTENUTO PER TRASFORMAZIONE DI UN SOTTOSPAZIO

$S = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ T.C. } Ax = b\}$

DIM. SOTTOSPAZIO AFFINE $\to$ COINCIDE CON LA DIM DEL SOTTOSPAZIO

IPERPIANO → È UN SOTTOSPAZIO AFFINE DI DIMENSIONE $n-1$

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ T.C. } \alpha^t x = \beta\}$$



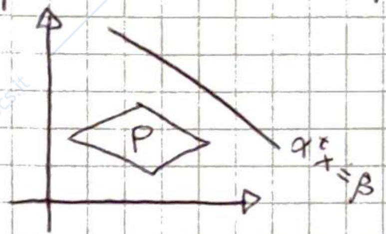
$$\alpha^t(\bar{x} + \alpha\varepsilon) = \underbrace{\alpha^t \bar{x}}_{=\beta} + \varepsilon \underbrace{\alpha^t \alpha}_{\text{NORMA} \geq 0}$$

POLIEDRO → INTERSEZIONE DI UN NUMERO FINITO DI SEMISPAZI AFFINI.

È UNA REGIONE CONVESSA.

DISUGUAGLIANZA VALIDA → $\alpha^t x \leq \beta$ È D.V. PER POLIEDRO P QUANDO

$$P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha^t x \leq \beta\}$$



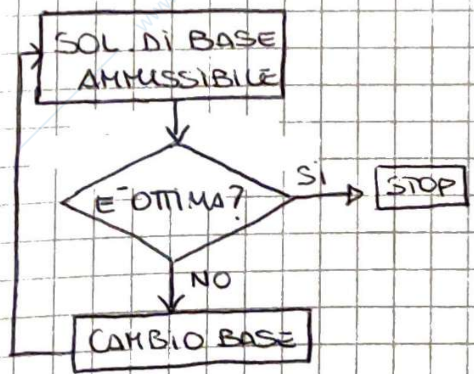
TUTTI I PUNTI DEL POLIEDRO STANNO NEL SOTTOSPAZIO $\alpha^t x \leq \beta$

VERTICE → CONSIDERANDO UN POLIEDRO $P = \{Ax \leq b\}$. DATA $\bar{x} \in P$, $A^=$ VINCOLI T.C. $A^= \bar{x} = b$. SE IL RANGO $(A^=) = n$, ALLORA $\bar{x}$ È VERTICE.

OGNI SOLUZIONE DI BASE È UN VERTICE DEL POLIEDRO. NON È VERO L'INVERSO. SE ABBIAMO LA DEGENERAZIONE QUESTA CORRISPONDENZA NON È BIUNIVOCA

SIMPLESSO

IL SIMPLESSO PARTE DA UNA SOLUZIONE CHE SIA DI BASE E AMMISSIBILE E MANTIENE L'AMMISSIBILITÀ. IL SIMPLESSO SI SPOSTA SUI VERTICI ADIACENTI.



• CONDIZIONE SUFFICIENTE DI OTTIMALITÀ:

IL SIMPLESSO LAVORA IN FORMA STANDARD.

$$\min c^t \bar{x} \qquad \text{Hp. } m \leq n$$
$$Ax = b \qquad \text{Rango}(A) = m$$
$$x \geq 0$$

DOBBIAMO COSTRUIRE LA SOLUZIONE DI BASE. AVENDO A COME MATRICE POSSO PRENDERE A_B CON $A_B \in \mathbb{R}^{m}$, $\det(A_B) \neq 0$, QUINDI INVERTIBILE. LA SOLUZIONE ASSOCIATA A TALE BASE È $\bar{x} = \begin{bmatrix} A_B^{-1} b \\ 0 \end{bmatrix}$. VOGLIAMO VALUTARE IL COSTO DI QUESTA SOLUZIONE:

$$c^t \bar{x} = \begin{bmatrix} c_B^t & c_N^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_B^{-1} b \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \bar{x}_B \\ \to \bar{x}_N \end{matrix} = c_B^t \bar{x}_B$$

POSSIAMO CONFRONTARLA CON UNA QUALUNQUE ALTRA SOLUZIONE x AMMISSI.

$$\begin{bmatrix} A_B & A_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \qquad A_B x_B + A_N x_N = b \qquad x_B = (b - A_N x_N) A_B^{-1}$$

$$x_B = A_B^{-1} b - A_N x_N A_B^{-1}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$$

QUINDI POSSIAMO VALUTARE IL COSTO DI x E CONFRONTARLO CON $\bar{x}$ PER VEDERE SE È LA SOL. OTTIMA.

$$c^t x = \begin{bmatrix} c_B^t & c_N^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_B^{-1} b - A_N x_N A_B^{-1} \\ x_N \end{bmatrix} = c_B^t A_B^{-1} b - c_B^t A_N x_N A_B^{-1} + c_N^t x_N$$

$$= \underbrace{c^t \bar{x}}_{\text{COSTO VECCHIA SOLUZIONE}} + \underbrace{(c_N^t - c_B^t A_B^{-1} A_N)}_{\hat{c}_N \text{ COEFFICIENTI DI COSTO RIDOTTO}} x_N = c^t \bar{x} + \hat{c}_N x_N$$

PER LE SOLUZIONI AMMISSIBILI $x_N \geq 0$. SE $\hat{c}_N \geq 0$ IL COSTO DELLA NUOVA SOLUZIONE È $\geq$ DI QUELLA VECCHIA. QUINDI SE $\hat{c}_N \geq 0$ POSSIAMO CONCLUDERE CHE LA $\bar{x}$ È OTTIMA.

DIZIONARIO DEL SIMPLESSO

$$z = c^t \bar{x} + \hat{c}_N x_N$$

$$x_B = \ldots$$

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE DI OTTIMALITÀ $\rightarrow$ $\hat{c}_N \geq 0$ E NON DEGENERAZIONE

DIREZIONE DI CRESCITA AMMISSIBILE E DI DECRESCITA

COSA SUCCEDE SE $\exists\, j \in N$ (FUORI BASE) T.C. $\hat{c}_j < 0$?

LA CONDIZIONE SUFFICIENTE DI OTTIMALITÀ CI SUGGERISCE QUALE VARIABILE SAREBBE OPPORTUNO PROVARE A AUMENTARNE IL VALORE, QUINDI PORTARLA IN BASE, PER MIGLIORARE LA FUNZIONE OBIETTIVO.

$$\bar{x} + \delta d \qquad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A_B & A_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \qquad A_B x_B + A_N x_N = b$$

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$$

$$x = \begin{bmatrix} A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \\ x_N \end{bmatrix}$$

SCEGLIAMO UN x_j DI x_N

$$x_N(\delta_j) = \delta_j \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \delta_j e_j$$

$\downarrow$ SOSTITUENDO $x_N(\delta_j)$

$$x = \begin{bmatrix} A_B^{-1} b - \delta_j A_B^{-1} A_N e_j \\ \delta_j e_j \end{bmatrix}$$

QUINDI LA NUOVA x E' SOLUZIONE DI $Ax=b$. MA E' AMMISSIBILE? DEVO VEDERE SE TUTTE LE COMPONENTI SONO ≥ 0. CONSIDERANDO $y = A_B^{-1} A_N e_j$

$$x = \begin{bmatrix} \bar{x}_B + \delta_j y \\ \delta_j e_j \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} \delta_j \geq 0 \\ \\ \bar{x}_B + \delta_j y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{SE QUESTO E' VERO HO AMMISSIBILITA'}$$

$\underbrace{\bar{x}_{Bi}}_{\geq 0 \text{ PER AMMISSIBILITA'}} + \delta_j y_i \geq 0$

- Se $y_i \geq 0$ HO AMMISSIBILITA' GARANTITA
- Se $y_i \leq 0$ DEVO SCEGLIERE $\delta_j \leq -\frac{\bar{x}_{Bi}}{y_i}$

SCELGO IL PASSO $\delta_j \leq \min_{i \text{ t.c. } y_i < 0} \left\{ -\frac{\bar{x}_{Bi}}{y_i} \right\}$

VALUTANDO I COSTI, E QUINDI IL MAX MIGLIORAMENTO:

$$c^t x = c^t \bar{x} + \hat{c}_N x_N = c^t \bar{x} + \underbrace{\hat{c}_j}_{<0} \delta_j$$

δ_j ESSENDO >0 E ESSENDO CONTENUTO IN UN RANGE, MI CONVIENE PRENDERE δ_j MAX, PER MINIMIZZARE I COSTI.

CHIARAMENTE SE ENTRA IN BASE UNA NUOVA VARIABILE, QUALCHE ALTRO ESCE DALLA BASE ED E' QUELLO CHE HA LA CONDIZIONE DEL PASSO PIU' STRINGENTE.

CORRETTEZZA DELL'OPERAZIONE DI PIVOT

PIVOT $B = \{ \ldots i^* \ldots \}$

$N = \{ \ldots j \ldots \}$

LA VARIABILE CHE ENTRA IN BASE GARANTISCE I VETTORI LI?

L'OPERAZIONE DI PIVOT PRESERVA L'INDIPENDENZA LINEARE DEI VETTORI SELEZIONATI.

$A_B = [A_1 \quad i^* \quad A_m]$ MATRICE DI BASE $\qquad x_j \Rightarrow$ VAR ENTRANTE $(j \in N)$

$x_{i^*} \Rightarrow$ VAR USCENTE $(i^* \in B)$ $\qquad A_{B'} = [A_1 \quad A_{i^*+1} \quad A_j \quad A_{j+1} \quad A_m]$

VOGLIAMO QUINDI AFFERMARE CHE $A_{B'}$ E' UNA MATRICE DI BASE.

THM $\quad v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i$ (v nel simplesso coincide con A_j)

v può essere scambiato con A_{i^*} se e solo se $\lambda_{i^*} \neq 0$

CONDIZIONE SUFFICIENTE $\Rightarrow$ SE $\lambda_{i^*} \neq 0$ ALLORA $A_{B'}$ E' UNA BASE

Dati m moltiplicatori μ_i l'unica combinazione lineare che annulla $\sum_{i=1}^{m} \mu_i A_i = 0$ è quella con $\mu_i = 0 \; \forall i$.

DIM $\quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i^*}}^{m} \mu_i A_i + \mu_i v = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i^*}}^{m} \mu_i A_i + \mu_{i^*} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i = 0$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i^*}}^{m} (\mu_i + \mu_{i^*} \lambda_i) A_i + \mu_{i^*} \lambda_{i^*} A_{i^*} = 0$$

$\mu_i + \mu_{i^*} \lambda_i = 0 \rightarrow \mu_i = 0 \quad \forall i \neq i^*$

$\mu_{i^*} \lambda_{i^*} = 0 \rightarrow$ Per Hp. $\lambda_{i^*} \neq 0 \rightarrow$ Quindi $\mu_{i^*} = 0$

Quindi μ_i sono tutti nulli e i vettori r di A_B' sono una base.

CONDIZIONE NECESSARIA $\rightarrow$ Se A_B' È UNA BASE ALLORA $\lambda_{i^*} \neq 0$ DIM

$r = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i$ PROVIAMO PER ASSURDO A NEGARE LA TESI, OSSIA PONIAMO $\lambda_{i^*} = 0$

OTTERREMO $r = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i^*}}^{m} \lambda_i A_i$ E QUINDI AVREMO $A_B' [A_1 \dots r \dots A_m]$

CHE NON PUÒ ESSERE POICHÉ r È COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI VETTORI.

LA FUNZIONE DI PIVOT QUINDI PARTE DA UNA BASE E ARRIVA A UNA BASE.

IL PIVOT IN BASE AL COSTO: $c^t x = c^t \bar{x} + \hat{c}_j \delta^*$ $\quad \delta^*$ PASSO OTTIMO

- $\delta^* > 0$ COSTO DIMINUISCE
- $\delta^* = 0$ RISCHIO CICLO INFINITO.

ALGORITMO DEL SIMPLESSO

TORNO QUI

1. $A_B \quad \det(A_B) \neq 0 \quad \bar{x}_B = A_B^{-1} b \geq 0$
2. $\hat{c}_N^t = c_N^t - c_B^t A_B^{-1} A_N$
3. SE $\hat{c}_N \geq 0$ ALLORA STOP (COSTO OTTIMO), ALTRIMENTI VADO AL (4)
4. SCELGO UN INDICE $j \in N$ T.C. $\hat{c}_j < 0$
5. $y = -A_B^{-1} A_N e_j$
6. Se $y \geq 0$ ALLORA STOP (PROBLEMA ILLIMITATO), ALTRIMENTI VADO AL (7)
7. DETERMINO $i^* = \arg\min \left\{ -\frac{\bar{x}_{Bi}}{y_i} \right\}$ CON $y_i < 0$
8. PIVOT TRA j e i^*

ALGORITMO DEL SIMPLESSO A PAROLE

1. BASE DI PARTENZA
2. CALCOLO I COSTI RIDOTTI
3. CONTROLLO I COSTI RIDOTTI
4. SCELGO LA VAR. ENTRANTE
5. CALCOLO LA DIREZIONE
6. VEDO SE IL PROBLEMA È ILLIMITATO (PASSO)
7. SCELGO LA VAR. USCENTE
8. FACCIO IL PIVOT

SCELTA DELLA VARIABILE ENTRANTE

1) REGOLA ANTICICLO DI BLAND (SI BASA SOLO SULL'INDICE DELLA VARIABILE)

$j \min \{ j \text{ T.C. } \hat{c}_j < 0 \}$

2) SCELGO LA VAR. CON COSTO RIDOTTO PIÙ NEGATIVO

$j = \arg\min \{ \hat{c}_j \text{ con } \hat{c}_j < 0 \}$ (DEVO CONTROLLARLI TUTTI)

3) COMPROMESSO → SCELTA DEL COEFFICIENTE DI COSTO RIDOTTO MIN TRA I PRIMI K NEGATIVI.

4) CONTROLLO $\hat{c}_j \delta_j$ E PRENDO IL PIÙ GRANDE DI QUESTI PRODOTTI PER OTTENERE IL MAX MIGLIORAMENTO.

SCELTA DELLA VARIABILE USCENTE

DOBBIAMO TROVARE LA CONDIZIONE PIÙ STRINGENTE SUL PASSO. $\min_{y_i < 0} \left\{ -\frac{\bar{x}_{Bi}}{y_i} \right\}$

SE AVESSIMO PIÙ VARIABILI CHE CI DANNO LO STESSO PASSO MINIMO POSSO USARE LA REGOLA ANTICICLO DI BLAND $i^* = \min \text{ T.C. } \left\{ \min_{y_i < 0} \left\{ -\frac{\bar{x}_{Bi}}{y_i} \right\} \right\}$

SIMPLESSO 2 FASI

APPLICO UN SIMPLESSO A 2 FASI QUANDO PER UN PROBLEMA DI PL IN FS NON HO UNA SOLUZIONE DI BASE DI PARTENZA.

$$(P) \quad \min c^T x \quad Ax = b \quad x \geq 0$$

MI CHIEDO SE $b \geq 0$, SE NON LO È MOLTIPLICO PER -1.

POSSO POI ASSOCIARE DELLE VARIABILI AUSILIARIE, UNA PER VINCOLO DEL PROBLEMA P, GENERANDO COSÌ IL PROBLEMA AUSILIARIO P.A. VADO A STUDIARE IL P.A. IN CUI SI MINIMIZZA LA SOMMA DELLE VARIABILI AUSILIARIE. $\min \sum_i x_a^i$

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{VAR. ORIGINARIE} \\ \leftarrow \text{VAR. AUSILIARIE} \end{matrix} \qquad Ax + Ix_a = b \quad x \geq 0 \quad x_a \geq 0$$

ESSENDO UNA FUNZIONE OBIETTIVO CHE MINIMIZZA VARIABILI ≥ 0 NON POSSO OTTENERE CHE IL PROBLEMA AUSILIARIO SIA ILLIMITATO, POICHÉ IL VALORE MINIMO CHE POSSO OTTENERE È ZERO. IL SIMPLESSO 1° FASE DA 2 ESITI:

1) FUNZIONE OBIETTIVO P.A $> 0 \Rightarrow$ P È VUOTO

DIM PER ASSURDO SUPPONIAMO CHE $\exists \bar{x} \quad A\bar{x} = b \quad \bar{x} \geq 0$

$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{bmatrix}$ ASSUMENDO QUESTA SOLUZIONE DEL P.A., LA F.O. SAREBBE $= 0$ CHE VA CONTRO LA TESI F.O. > 0.

2) FUNZIONE OBIETTIVO P.A $= 0$, ABBIAMO 3 CASI:

A) SOL. DI BASE OTTIMA DEL PROBLEMA A., NON CI SONO x_a IN BASE, QUINDI È SOLUZIONE DI BASE AMMISSIBILE PER P.

SOL. DI BASE OTTIMA DEL P.A., MA PRESENZA VAR. AUSILIARIE IN BASE. PIVOT DEGENERE → SI COSTRUISCE UNA SOL. AMMISSIBILE PER P.

C) SONO PRESENTI SULLA SOL. VARIABILI X_a CHE NON RIUSCIAMO A RIMUOVERE, Rango (A) NON E' PIENO. DOBBIAMO RIMUOVERE UN VINCOLO DA P.

DUALITA'

THM DI DUALITA' DEBOLE

Hp. PRIMALE DI min, DUALE DI max, $\bar{x}$ AMM. PER P, $\bar{\lambda}$ AMM. PER D

TESI $\bar{\lambda}^t b \leq c^t \bar{x}$

DIM
$$\min c^t x \quad Ax = b \quad x \geq 0 \qquad\qquad \max \lambda^t b \quad \lambda^t A \leq c^t$$

$$b = Ax \quad \lambda^t b = \lambda^t A x \rightarrow \bar{\lambda}^t b = \lambda^t A \bar{x} \leq c^t \bar{x} \rightarrow \lambda^t b \leq c^t \bar{x}$$

COROLLARIO SE $\bar{\lambda}^t b = c^t \bar{x}$ ALLORA $\bar{x}$ e $\bar{\lambda}$ SONO RISPETTIVAMENTE OTTIME PER P e D.

THM DI DUALITA' FORTE

$\exists$ SOLUZIONE OTTIMA FINITA PER P $\Leftrightarrow$ $\exists$ UNA SOLUZIONE OTTIMA FINITA X D E I LORO VALORI COINCIDONO.

DIM Hp. X^* SOL. OTTIMALE PER P ASSOCIATA A B T.C. $\hat{C}_N \geq 0$

ALLORA POSSIAMO DEFINIRE UNA SOLUZIONE λ^* OTTENUTA COME $\lambda^* = C_B^t A_B^{-1}$.

QUESTA E' AMMISSIBILE PER D. CALCOLIAMO IL VALORE DELLA SOLUZIONE:

$$\lambda^{*t} b = C_B^t A_B^{-1} = c^t x^*$$

PER IL COROLLARIO SI OTTIENE LA TESI.

THM DEGLI SCARTI COMPLEMENTARI

DATI DUE PROBLEMI P e D Hp. $\bar{x}$ AMM. PER P, $\bar{\lambda}$ AMM. PER D

TESI $\bar{x}$ e $\bar{\lambda}$ SONO SOL. OTTIME $\Leftrightarrow$ $\bar{x}_j (c_j - \bar{\lambda}^t A_j) = 0 \quad \forall j$

DIM
$$c^t \bar{x} - \bar{\lambda}^t b = 0$$
$$c^t \bar{x} - \bar{\lambda}^t A \bar{x} = 0$$
$$\underbrace{\bar{x}}_{\geq 0} \underbrace{(c^t - \bar{\lambda}^t A)}_{\geq 0} = 0$$

X AMMISS.

ESSENDO LE COMPONENTI ≥ 0 NON POSSONO ANNULLARSI PER DIFFERENZA, QUINDI SONO X FORZA ZERO.

IL PRODOTTO GENERICO E' ZERO PERCHE' SOMMA DI TANTI ZERI.