

Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Anno Accademico: 2021/2022



CORSO DI GASDINAMICA **Relazioni di laboratorio**

Studente: Jacopo Grogardi

Matricola: 295561

SOMMARIO

LABORATORIO 1.....	1
1.1 Descrizione e obiettivi dell'attività.....	1
1.2 Flusso attorno ad un profilo alare	1
1.2.1 Coefficiente di pressione e numero di Reynolds	1
1.2.2 Rapporto tra velocità locale e velocità di corrente	2
1.2.3 Coefficiente di portanza.....	2
1.2.4 Influenza del profilo e dell'angolo di incidenza	3
1.3 Strumentazione e raccolta dati.....	4
1.4 Dati sperimentali e ambientali	5
1.5 Elaborazione dati	6
1.5.1 Calcolo di c_p e U_e/U_∞ per $0 \leq x/c \leq 0,8$	6
1.5.2 Calcolo di c_p e U_e/U_∞ per $x/c = 1$	7
1.5.3 Calcolo del coefficiente di portanza	7
1.5.4 Calcolo del numero di Reynolds	8
1.6 Risultati e conclusioni	9
LABORATORIO 2.....	11
2.1 Descrizione e obiettivi dell'attività.....	11
2.2 Urto conico	11
2.3 Strumentazione e raccolta dati.....	12
2.4 Dati sperimentali	13
2.5 Elaborazione dei dati	14
2.5.1 Valutazione del numero di Mach della corrente a monte	14
2.5.2 Equiparazione all'urto obliquo e soluzione	15
2.6 Risultati.....	17
LABORATORIO 3.....	18
3.1 Descrizione e obiettivi dell'attività.....	18
3.2 Analogia idrodinamica	18
3.3 Strumentazione e raccolta dati.....	21
3.4 Dati sperimentali	22
3.5 Elaborazione dei dati e risultati	23
Riferimenti	24

LABORATORIO 1

Misura della distribuzione di pressione attorno ad un profilo NACA 0015

1.1 Descrizione e obiettivi dell'attività

La presente attività di laboratorio consiste nella misura, in galleria del vento, della distribuzione delle pressioni attorno ad un profilo alare NACA 0015 ad un'incidenza di 8° . A partire da tale misura, si calcoleranno il numero di Reynolds caratteristico della corrente, le distribuzioni dei coefficienti di pressione, gli andamenti del rapporto tra velocità esterna allo strato limite U_e e velocità della corrente indisturbata U_∞ e il coefficiente di portanza. Il valore dei diversi parametri e i loro grafici in funzione della coordinata adimensionale x/c sono riportati al termine dell'elaborato.

1.2 Flusso attorno ad un profilo alare

Si fornisce ora una breve descrizione del fenomeno studiato. Alcune delle relazioni illustrate verranno usate in seguito per illustrare l'elaborazione dei dati sperimentali.

1.2.1 Coefficiente di pressione e numero di Reynolds

Quando una corrente fluida investe un corpo si viene a creare una forza aerodinamica agente su quest'ultimo, pari alla somma dei contributi infinitesimi locali in termini di pressione e attrito viscoso. Trascurando gli sforzi di attrito, avremo una forza aerodinamica dipendente solo delle pressioni relative attorno al profilo:

$$F_a = \int_S (p + \tau) dS \approx \int_S p dS \quad (1.1)$$

Il principale parametro adimensionale usato per studiare la distribuzione di pressioni intorno ad un corpo è il **coefficiente di pressione**, definito come il rapporto tra la differenza di pressione statica agente su un punto della superficie del profilo – pressione relativa – e la pressione dinamica della corrente che lo investe:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad (1.2)$$

dove p è la pressione locale, p_∞ la pressione della corrente indisturbata e U_∞ la sua velocità.

Altro parametro adimensionale fondamentale per lo studio di un profilo alare è il **numero di Reynolds**, definito come il rapporto tra le proprietà cinetiche e le proprietà viscosive della corrente:

$$Re = \frac{\rho U_{\infty} L}{\mu} \quad (1.3)$$

dove μ è la viscosità dinamica dell'aria e L la lunghezza caratteristica del fenomeno, che, nel caso di un profilo alare, coincide con la corda c .

1.2.2 Rapporto tra velocità locale e velocità di corrente

La distribuzione delle pressioni è generata dalla distribuzione di velocità attorno al profilo. A regolare la dipendenza tra le due grandezze è l'equazione di Bernoulli, secondo il quale per ogni linea di corrente vale:

$$p_{0\infty} = p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2 = p + \frac{1}{2}\rho U_e^2 \quad (1.4)$$

dove $p_{0\infty}$ indica la pressione totale della corrente indisturbata e U_e è la velocità del fluido esterna allo strato limite cinetico. Non avrebbe senso parlare di velocità "sul profilo" poiché a parete la velocità è sempre nulla.

Dalla (1.4) si ha

$$p - p_{\infty} = \frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2 - \frac{1}{2}\rho U_e^2 \quad (1.5)$$

dividiamo ogni membro per la pressione dinamica della corrente:

$$\frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2} = 1 - \left(\frac{U_e}{U_{\infty}}\right)^2 \quad (1.6)$$

da cui, per la (1.2), si ottiene il rapporto tra la velocità della corrente e la velocità locale in funzione del C_p :

$$1 - \left(\frac{U_e}{U_{\infty}}\right)^2 = c_p \quad \rightarrow \quad \frac{U_e}{U_{\infty}} = \sqrt{1 - c_p} \quad (1.7)$$

1.2.3 Coefficiente di portanza

Per piccoli valori di incidenza, tali che $\sin(\alpha) \approx \alpha$, possiamo scrivere la portanza elementare agente su una porzione infinitesima del profilo come

$$dL = [(p_v - p_{\infty}) - (p_d - p_{\infty})] dx \quad (1.8)$$

dove p_v e p_d sono le pressioni statiche agenti su ventre e dorso del profilo [1].

Integrando la (1.8) lungo l'intera corda c del profilo si ottiene la portanza totale

$$L = \int_0^c [(p_v - p_{\infty}) - (p_d - p_{\infty})] dx \quad (1.9)$$

Si definisce **coefficiente di portanza** il rapporto

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 S} \quad (1.10)$$

dove S , indicante la superficie alare, può essere sostituita da $S = c \cdot 1$ nel caso di un profilo alare in geometria bidimensionale [1]. La relazione (1.10) diventa quindi

$$c_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c} \quad (1.11)$$

Sostituendo la (1.8) all'interno della (1.10) si può ottenere l'espressione del coefficiente di portanza in funzione della coordinata adimensionale x/c :

$$c_L = \int_0^1 (c_{p,v} - c_{p,d}) d\left(\frac{x}{c}\right) = \int_0^1 \Delta c_p d\left(\frac{x}{c}\right) \quad (1.12)$$

1.2.4 Influenza della forma del profilo e dell'angolo di incidenza

La Figura (1.1) illustra il profilo NACA 0015: i primi due "0" lo identificano come profilo simmetrico, mentre il "15" si riferisce al rapporto percentuale tra il massimo spessore e la corda.

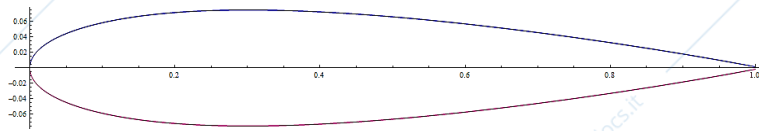


Figura 1.1: il profilo alare NACA 0015 [2]

I profili simmetrici come il NACA 0015 sono incapaci di generare portanza a incidenza nulla: il fluido investe il profilo simmetricamente, creando la medesima distribuzione di velocità – e dunque di pressione relativa – su dorso e ventre; i contributi statici si annullano vicendevolmente e per la (1.8) la portanza risulta nulla.

A mano a mano che l'angolo di incidenza aumenta, aumenta anche la portanza. Ad un preciso valore di incidenza, dipendente dalla geometria del profilo e dalla velocità della corrente, si assiste alla separazione dello strato limite dal dorso del profilo e alla nascita di una zona di ricircolo a valle del profilo, che comporta un notevole aumento della scia e della resistenza aerodinamica e un repentino crollo della portanza.

La Figura (1.2) illustra in maniera semplificata il fenomeno dello stallo aerodinamico per un profilo asimmetrico con valore d'incidenza critico pari a 15° .

L'angolo di incidenza utilizzato (8°) si posiziona al disotto del valore di incidenza critico, per cui non si assiste ad alcuna separazione del fluido.

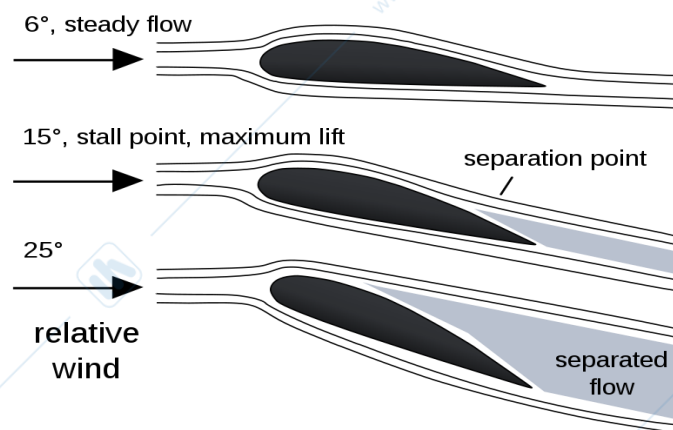


Figura 1.2: stallo aerodinamico su un generico profilo alare [3]

1.3 Strumentazione e raccolta dati

In galleria del vento è posto un troncone d'ala con profilo NACA 0015 di corda $c = 10$ cm. Nella parte centrale del troncone sono posizionate 11 prese di pressione collegate ad un multi-manometro. Le prese di pressione sono posizionate solamente su un lato del profilo, motivo per cui il troncone viene orientato di 8° per misurare le pressioni agenti sul dorso e di -8° per quelle agenti sul ventre.

Le colonnine manometriche d'interesse ai fini dell'attività sono 13 e sono così numerate:

- colonnina 1 → misura della pressione statica della corrente indisturbata p_∞
- colonnina 2 → misura della pressione totale della corrente indisturbata $p_{0\infty}$
- colonnine da 5 a 15 → misura delle pressioni locali attorno al profilo

Le colonnine 3 e 4 sono intenzionalmente lasciate “vuote” – cioè riferite alla pressione ambiente – per meglio distinguere le colonnine relative alle pressioni attorno al profilo. Le coordinate adimensionali rispetto alla corda delle prese di pressione da 5 a 15 sono le seguenti:

numero presa	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
posizione x/c	0	0,025	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8

La modalità di raccolta dati è la seguente: il profilo viene ruotato dell'opportuno angolo di incidenza; la galleria del vento viene chiusa e messa in funzione; quando la galleria del vento ha raggiunto il regime – si può notare lo stabilizzarsi del fluido manometrico – si scatta una fotografia al multi-manometro, dalla quale si ricavano successivamente i dati servendosi della scala millimetrica posta a fianco delle colonnine.

I dati di nostro interesse sono le diverse altezze indicate dalle colonnine, poiché la differenza tra pressioni può essere espressa in funzione della differenza tra due altezze piezometriche dalla legge di Stevino:

$$p_B - p_A = \rho_f g (H_B - H_A) \quad (1.13)$$

dove $\rho_f = 825 \text{ kg/m}^3$ è la densità del fluido manometrico, g l'accelerazione di gravità e H l'altezza piezometrica. Poiché il multi-manometro risulta inclinato di un angolo $\beta = 30^\circ$ è necessario introdurre un fattore correttivo pari a $\sin \beta$. Inoltre, la scala millimetrica procede in verso opposto all'azione delle diverse pressioni sul fluido manometrico. Per questo motivo, per semplificare l'elaborazione dei dati, si inserisce un secondo fattore correttivo pari a -1.

Alla luce di queste considerazioni, ogni differenza di pressioni può essere espressa come:

$$p_B - p_A = -\rho_f g \sin \beta (h_B - h_A) = \rho_f g \sin \beta (h_A - h_B) \quad (1.14)$$

dove h è l'effettiva lunghezza della colonna di fluido manometrico letta sulla scala millimetrica.

1.4 Dati sperimentali e ambientali

La raccolta dati è avvenuta presso il Laboratorio di Aerodinamica "Modesto Panetti" del Politecnico di Torino il 10 novembre 2021 alle ore 17.30. I dati ambientali registrati sono i seguenti:

- pressione: $p_a = 999 \text{ hPa}$
- temperatura: $T_a = 21,1 \text{ }^\circ\text{C}$
- umidità: $\phi = 39\%$

Le Figure (1.3) e (1.4) riportano la configurazione delle colonnine manometriche osservata durante le misurazioni relative al dorso e al ventre del profilo. I dati sperimentali sono riportati nella Tabella (1.1).

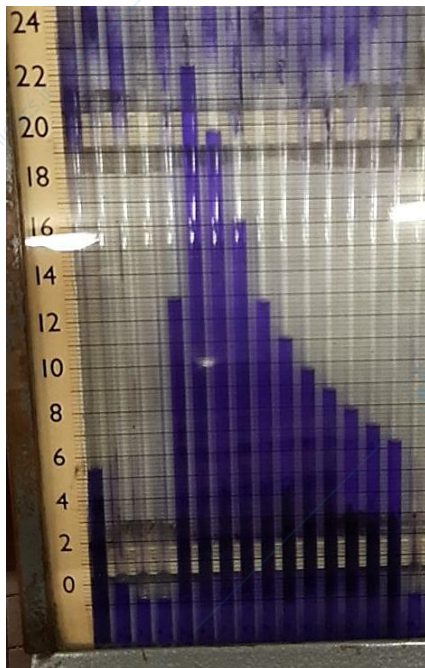


Figura 1.3: risultati relativi al dorso del profilo

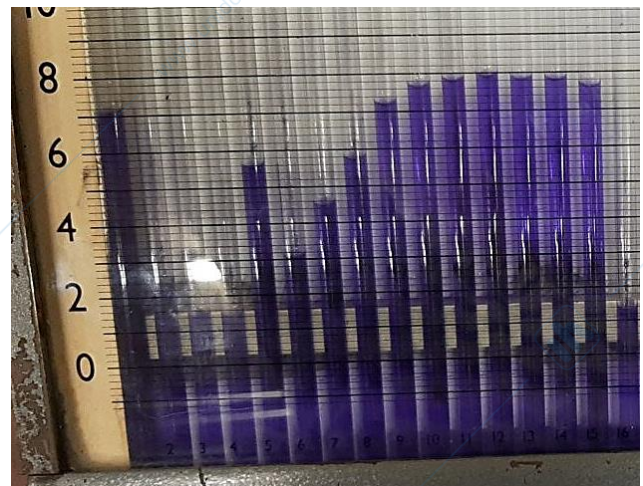


Figura 1.4: risultati relativi al ventre del profilo

N° presa	posizione x/c	DORSO	VENTRE
		h (cm)	h (cm)
1	-	5,4	7
2	-	0	2,4
5	0	12,8	5,6
6	0,025	22,2	3,2
7	0,05	19,6	4,4
8	0,1	16,2	5,6
9	0,2	12,6	7,2
10	0,3	11	7,6
11	0,4	9,6	7,8
12	0,5	8,6	8
13	0,6	7,8	7,8
14	0,7	7	7,8
15	0,8	6,2	7,6

Tabella 1.1: risultati sperimentali

1.5 Elaborazione dati

1.5.1 Calcolo di c_p e U_e/U_∞ per $0 \leq x/c \leq 0,8$

Per l'equazione di Bernoulli (cfr. equazione (1.4)), la relazione (1.2) è riscrivibile come

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = \frac{p - p_\infty}{p_{0\infty} - p_\infty} \quad (1.15)$$

Per la (1.14), la (1.15) diventa

$$c_p \left(\frac{x}{c} \right) = \frac{\rho_f g \sin \beta \left(h_\infty - h \left(\frac{x}{c} \right) \right)}{\rho_f g \sin \beta (h_\infty - h_{0\infty})} = \frac{h_\infty - h \left(\frac{x}{c} \right)}{h_\infty - h_{0\infty}} \quad (1.16)$$

dove si è esplicitata la dipendenza di h e quindi di c_p dalla coordinata adimensionale x/c e dove le altezze h_∞ e $h_{0\infty}$ rappresentano rispettivamente le altezze delle colonnine 1 e 2.

Per dorso e ventre del profilo, si calcola il c_p di ogni stazione x/c usando i valori di h riportati nella Tabella (1.1). In seguito, si sfrutta la relazione (1.7) per calcolare il valore U_e/U_∞ in ogni stazione:

$$\frac{U_e}{U_\infty} \left(\frac{x}{c} \right) = \sqrt{1 - c_p \left(\frac{x}{c} \right)} \quad (1.17)$$

Una volta in possesso dei valori locali di c_p e U_e/U_∞ (ottenuti, per semplicità, attraverso l'impiego di un foglio di calcolo Microsoft Excel) si diagrammano su Matlab in funzione della coordinata x/c .

1.5.2 Calcolo di c_p e U_e/U_∞ per $x/c = 1$

Possiamo stimare il valore del coefficiente di pressione sul bordo di fuga individuando, per dorso e ventre separatamente, il valore che avrebbe c_p per $x/c = 1$ se l'incremento lineare tra i valori registrati nelle ultime due stazioni (x/c pari a 0,7 e 0,8) rimanesse costante. Avremo:

$$\tilde{c}_{p,v} = \frac{c_{p,v}(0,8) - c_{p,v}(0,7)}{0,8 - 0,7} \cdot (1 - 0,7) + c_{p,v}(0,7) \quad (1.18)$$

$$\tilde{c}_{p,d} = \frac{c_{p,d}(0,8) - c_{p,d}(0,7)}{0,8 - 0,7} \cdot (1 - 0,7) + c_{p,d}(0,7) \quad (1.19)$$

Facendo la media di questi valori si trova $c_p(1)$:

$$c_p(1) = \frac{\tilde{c}_{p,v} + \tilde{c}_{p,d}}{2} \quad (1.20)$$

Noto $c_p(1)$, si può calcolare il valore di U_e/U_∞ sul bordo di fuga usando la relazione (1.17).

1.5.3 Calcolo del coefficiente di portanza

Richiamiamo la relazione (1.11):

$$c_L = \int_0^1 (c_{p,v} - c_{p,d}) d \left(\frac{x}{c} \right) = \int_0^1 \Delta c_p d \left(\frac{x}{c} \right) \quad (1.21)$$

Per ogni stazione x/c si calcola la funzione Δc_p come

$$\Delta c_p \left(\frac{x}{c} \right) = c_{p,v} \left(\frac{x}{c} \right) - c_{p,d} \left(\frac{x}{c} \right) \quad (1.22)$$

Poiché non si dispone di una funzione continua ma solamente di una distribuzione discreta, per l'integrazione di Δc_p si utilizza la regola dei trapezi:

$$c_L = \int_0^1 \Delta c_p d \left(\frac{x}{c} \right) \approx \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \left[\left(\left(\frac{x}{c} \right)_i - \left(\frac{x}{c} \right)_{i-1} \right) \cdot \left((\Delta c_p)_{i-1} + (\Delta c_p)_i \right) \right] \quad (1.23)$$

Il calcolo della (1.23) è implementato dal seguente *script* Matlab:

```
somma=0;
%coordinata adimensionale x/c
x=[0; 0.025; 0.05; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 1];
%coefficienti pressione dorso
cpd=[-1.3704; -3.1111; -2.6296; -2.0000; -1.3333; -1.0370; -0.7778; -0.5926;
-0.4444; -0.2963; -0.1481; 0.0523];
%coefficienti pressione ventre
cpv=[0.3043; 0.8261; 0.5652; 0.3043; -0.0435; -0.1304; -0.1739; -0.2174;
-0.1739; -0.1739; -0.1304; 0.0523]; %c_p ventre
%differenza coefficienti di pressione
deltacp=cpv-cpd;
%ciclo di sommatoria
for i=2:12
    a=(x(i)-x(i-1))*(deltacp(i)+deltacp(i-1));
    somma=somma+a;
end
%coefficiente di portanza
cl=0.5*somma
```

1.5.4 Calcolo del numero di Reynolds

Calcoliamo in ultimo il numero di Reynolds della corrente. Per l'aria umida, alle condizioni ambiente riportate nel Paragrafo 1.4, abbiamo [4]:

- densità dell'aria: $\rho \cong 1.179 \text{ kg/m}^3$
- viscosità dinamica dell'aria: $\mu \cong 1.826 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$

Sappiamo inoltre che la corda del profilo alare vale $c = 0,1 \text{ m}$, che la densità del fluido manometrico è $\rho_f = 825 \text{ kg/m}^3$ e che l'inclinazione del multi-manometro vale $\beta = 30^\circ$. Per la (1.14) si ha che:

$$\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = p_{0\infty} - p_\infty = \rho_f g \sin \beta (h_\infty - h_{0\infty}) \quad (1.24)$$

Da cui

$$U_\infty = \sqrt{2 \frac{\rho_f}{\rho} g \sin \beta (h_\infty - h_{0\infty})} \quad (1.25)$$

Il numero di Reynolds risulta quindi essere pari a

$$Re = \frac{c}{\mu} \sqrt{2 \rho_f \rho g \sin \beta (h_\infty - h_{0\infty})} \quad (1.26)$$

1.6 Risultati e conclusioni

- Numero di Reynolds per il test del dorso: $Re_d = 124\,312$
- Numero di Reynolds per il test del ventre: $Re_v = 114\,735$
- Coefficiente di portanza: $c_L = 0,7715$

I valori di c_p e U_e/U_∞ sono riportati nella Tabella (1.2) insieme alle proprie coordinate adimensionali e sono rappresentati graficamente nelle Figure (1.5) e (1.6).

posizione x/c	DORSO		VENTRE	
	c_p	U_e/U_∞	c_p	U_e/U_∞
0	-1,3704	1,5396	0,3043	0,8341
0,025	-3,1111	2,0276	0,8261	0,4170
0,05	-2,6296	1,9052	0,5652	0,6594
0,1	-2,0000	1,7321	0,3043	0,8341
0,2	-1,3333	1,5275	-0,0435	1,0215
0,3	-1,0370	1,4272	-0,1304	1,0632
0,4	-0,7778	1,3333	-0,1739	1,0835
0,5	-0,5926	1,2620	-0,2174	1,1034
0,6	-0,4444	1,2019	-0,1739	1,0835
0,7	-0,2963	1,1386	-0,1739	1,0835
0,8	-0,1481	1,0715	-0,1304	1,0632
1	0,0523	0,9735	0,0523	0,9735

Tabella 1.2: risultati dell'elaborazione dati

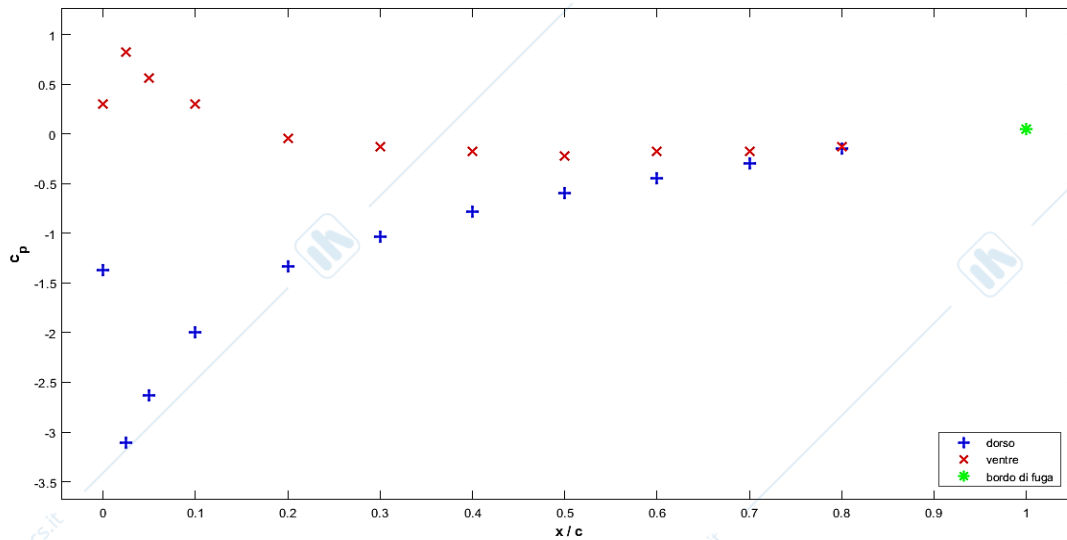


Figura 1.5: valori del coefficiente di pressione in funzione della coordinata adimensionale x/c

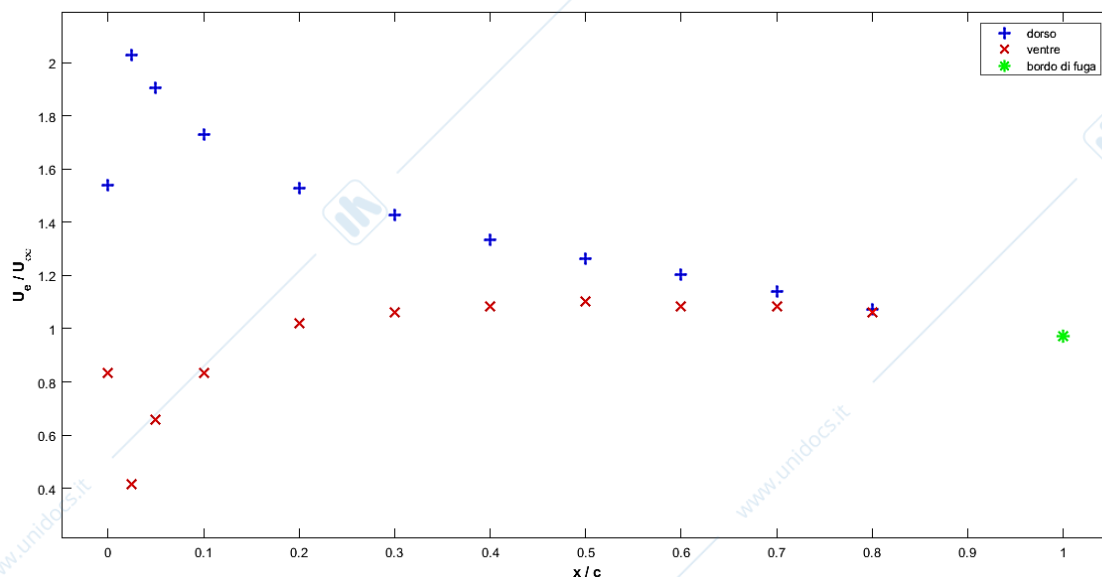


Figura 1.6: valori di U_e/U_∞ in funzione della coordinata adimensionale x/c

Si noti come, in accordo alla relazione (1.7), a più alti valori di U_e/U_∞ corrispondono valori più bassi di c_p e come i valori più negativi di c_p – indice di una depressione locale – si concentrino sul dorso del profilo: è proprio questo che rende possibile la generazione di portanza, intesa come la risultante totale delle pressioni agenti sul profilo alare.

La discrepanza tra i valori di $c_p(x/c = 0)$ per dorso e ventre sono con molta probabilità dovuti a un piccolo errore nella posizione della presa di pressione numero 5. Si può considerare come valore indicativo del coefficiente di pressione sul bordo d'attacco il valor medio dei dati di dorso e ventre: $c_p \approx -0,5330$

LABORATORIO 2

Visualizzazione di onde d'urto coniche mediante la tecnica Schlieren

2.1 Descrizione e obiettivi dell'attività

Punto di partenza di questa esperienza di laboratorio è la visualizzazione, tramite tecnica Schlieren, dell'onda d'urto che si viene a creare in prossimità di un corpo conico esposto a corrente supersonica.

Noto l'angolo di semi-apertura del cono, pari a $\theta_c = 30^\circ$, è possibile – partendo dalla digitalizzazione delle immagini Schlieren – misurare l'angolo di inclinazione dell'onda d'urto conica β e, attraverso la comparazione con un urto obliquo bidimensionale, risalire al numero di Mach M_1 della corrente a monte.

2.2 Urto conico

L'urto conico si forma quando una corrente supersonica investe un corpo conico. Come tutti gli urti, rappresenta una discontinuità per velocità, pressione, temperatura e densità della corrente, andando a determinare due campi nettamente distinti che chiameremo per semplicità campo 1 – a monte dell'urto, corrispondente alla corrente fluida indisturbata – e campo 2 – a valle dell'urto.

L'urto conico è di tipo attaccato, sviluppandosi dal vertice del corpo investito dalla corrente. Consideriamo dunque un sistema di riferimento con origine nel vertice del corpo, identificato dalle coordinate coniche $\{r, \theta, \phi\}$ e orientato come mostrato nella Figura (2.1).

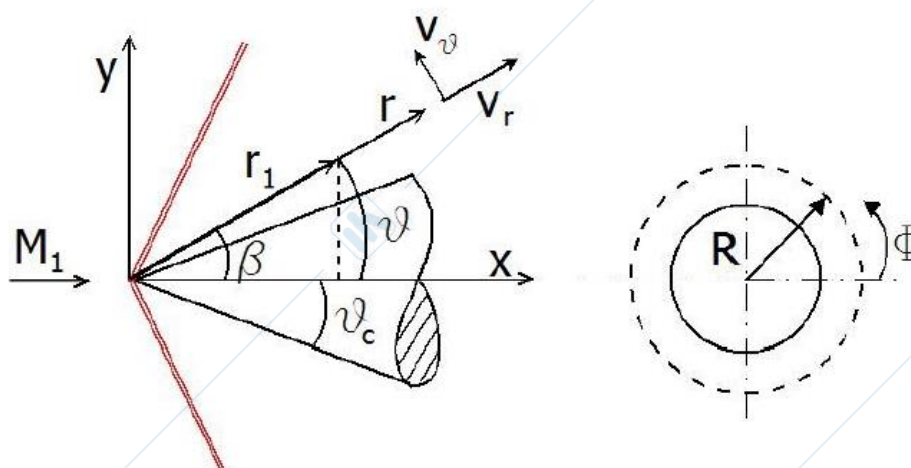


Figura 2.1: vista laterale e frontale di un urto conico [5]

Per la simmetria assiale di corpo e flusso – che deve rispettare la condizione di tangenza – è possibile concludere che le proprietà dell'urto varino solamente per diversi valori dell'angolo $\theta \geq \theta_c$ e siano distribuite in maniera omogenea rispetto alla distanza lineare dal vertice r e dall'angolo azimutale ϕ . Si ha quindi che

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \neq 0 \quad (2.1)$$

Il flusso a valle dell'urto è in comunicazione attorto a tutto il corpo che circonda; a differenza del flusso a valle dell'urto obliquo che investe un cuneo bidimensionale, dopo a valle dell'urto si creano due campi che, per quanto possano condividere le stesse proprietà, rimangono divisi. Questo fa sì che le linee di corrente curvino e che le proprietà del campo varino in maniera continua e isoentropica a valle dell'onda (“effetto 3D”)

Tuttavia, immediatamente a valle dell'urto conico è ancora valida la soluzione dell'urto obliquo. La specificità dell'urto conico fa sì che, a parità di angolo di semi-apertura di cuneo 2D e cono, l'urto risulti meno intenso su quest'ultimo ($\beta_{cono} < \beta_{cuneo}$) [5].

2.3 Strumentazione e raccolta dati

Per l'attività è stata utilizzata la galleria supersonica didattica del Laboratorio di Aerodinamica “Modesto Panetti” del Politecnico di Torino, mostrata in Figura (2.2). La galleria è alimentata tramite un sistema *blow-down*. L'aria ($\gamma = 1,4$) compressa in arrivo dal sistema entra nella camera di tranquillizzazione – dove vengono smorzate le turbolenze del gas e creato un flusso quasi unidimensionale – per poi essere espansa in un condotto convergente-divergente, investire il modello di prova ed essere rallentata ed espulsa attraverso un diffusore. Il numero di Mach della corrente che investe il modello è regolabile attraverso un meccanismo che alza o abbassa la base della sezione di gola, variandone quindi le dimensioni.

La galleria dispone inoltre di una camera Schlieren che permette, sfruttando la variazione dell'indice di rifrazione dell'aria nelle superfici di discontinuità, di visualizzare le onde d'urto che circondano il corpo, un modello conico con semi-apertura $\theta_c = 30^\circ$.

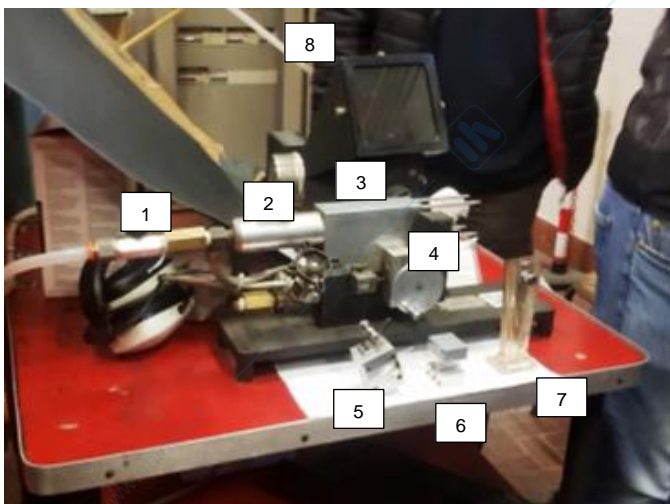


Figura 2.2:

apparato sperimentale

1. condotto di mandata,
2. camera di tranquillizzazione,
3. ugello supersonico,
4. manovella regolazione Mach,
5. sistema posizionamento modello,
6. camera di prova,
7. diffusore,
8. camera Schlieren.

2.4 Dati sperimentali

Unico dato è l'immagine mostrata dalla camera Schlieren durante l'attività di laboratorio, Figura (2.3).

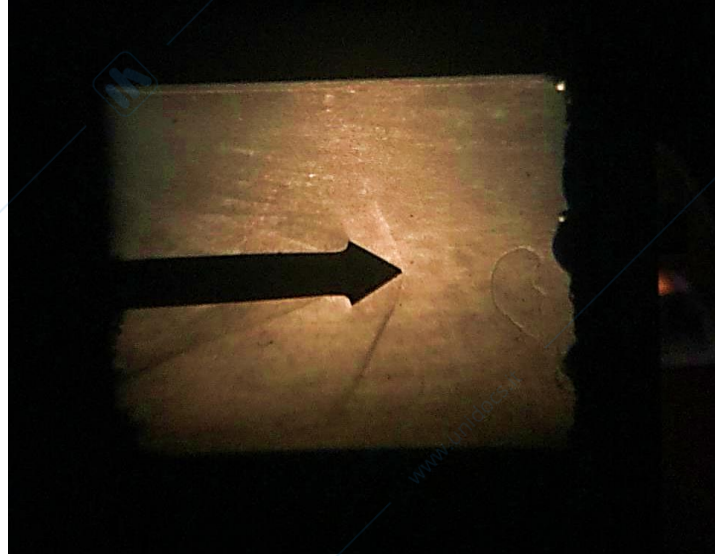


Figura 2.3: immagine dell'urto mostrata dal sistema di visualizzazione; per l'ottica alla base della tecnica Schlieren, essa appare capovolta rispetto al vero orientamento del modello.

Dall'immagine dell'urto è possibile risalire al valore dell'angolo di inclinazione dell'urto β , misurato a partire dalla direzione della corrente di monte. La misura dell'angolo β deve essere fatta il più vicino possibile al vertice del cono, sia per ridurre l'imprecisione derivante dal progressivo incurvarsi dell'onda d'urto conica – dovuto alle interazioni col fluido e con le pareti della camera – sia per avvicinarsi il più possibile alle condizioni in cui vale il modello dell'urto obliquo che sarà in seguito utilizzato per risalire alle condizioni del campo 2.

La Figura (2.4) mostra la misurazione degli angoli effettuata attraverso il software Geogebra.

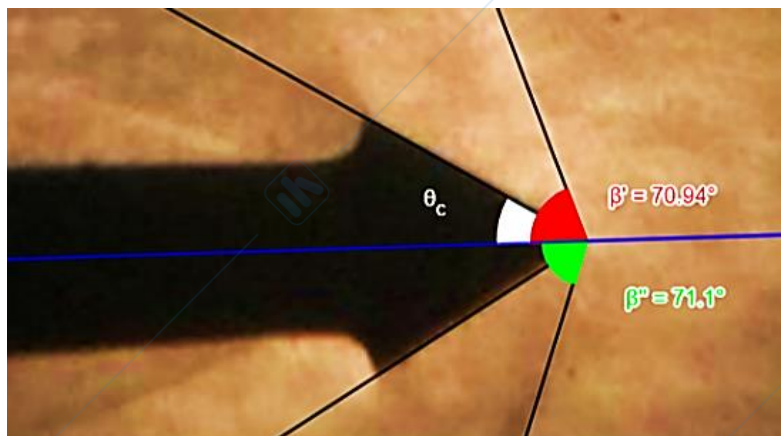


Figura 2.4: misurazione degli angoli degli urti; l'angolo θ_c misura 30° .

Le misure dei due angoli mostrati dalla camera Schlieren sono $\beta' = 70,94^\circ$ e $\beta'' = 71,10^\circ$.

La differenza nei valori dei due angoli è da imputare al processo di misura, per cui possiamo assumere come dato di riferimento il valore medio $\beta = (\beta' + \beta'')/2 = 71,02^\circ \approx 71^\circ$.

2.5 Elaborazione dei dati

2.5.1 Valutazione del numero di Mach della corrente a monte

Conoscendo i valori di θ_c e β è possibile risalire al valore di M_1 , numero di Mach della corrente a monte dell'urto. Per farlo, si utilizzano le curve $\theta(\beta)$ a M costante del grafico riportato in Figura (2.5).

Interpolando adeguatamente i dati, dal grafico si ottiene che $M_1 \approx 1,49$.

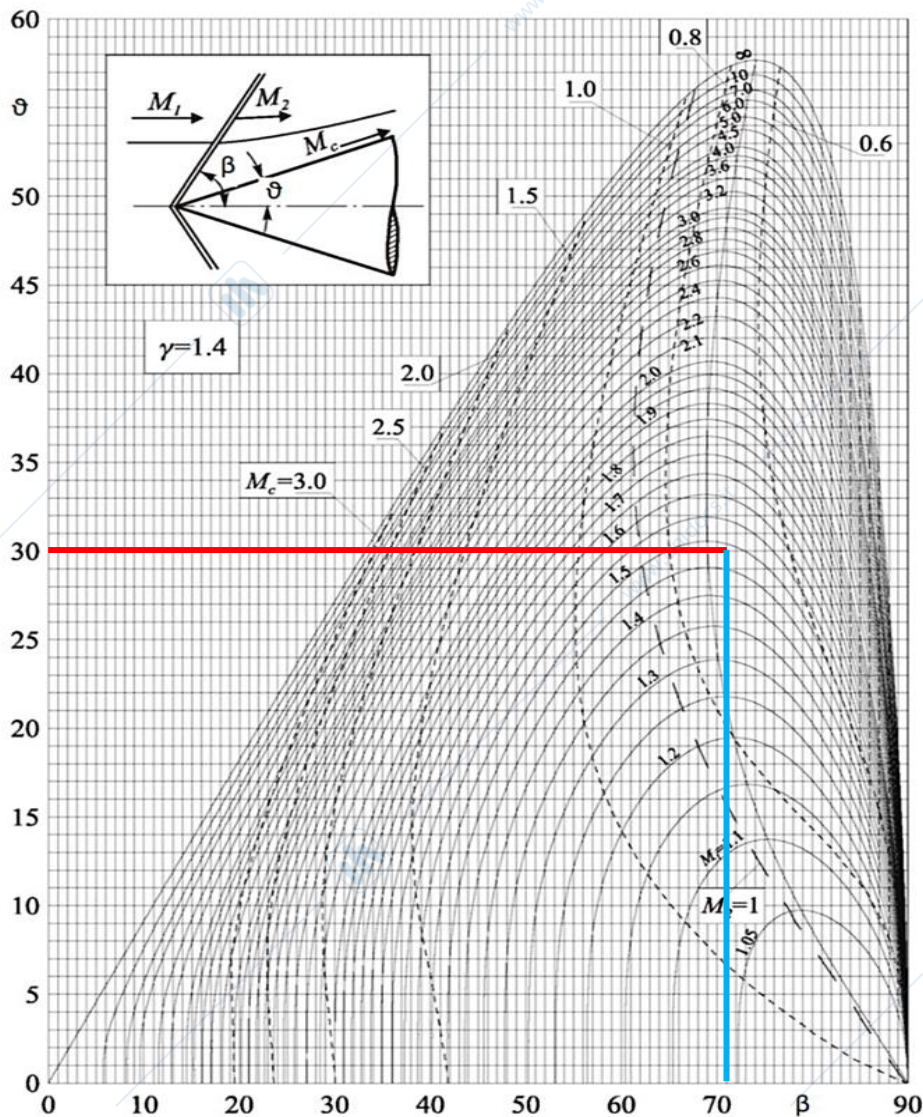


Figura 2.5: grafico $\theta - \beta - M$ per l'urto conico con riportati i dati del problema [6].

2.5.2 Equiparazione all'urto obliquo e soluzione

Come detto, immediatamente a valle dell'urto conico valgono ancora le soluzioni dell'urto obliquo. Ciò significa che possiamo assumere $\beta \approx \beta_{2D}$, dove β_{2D} è l'angolo dell'urto obliquo piano.

Disponendo di β_{2D} e di M_1 si ricava dalla Figura (2.6) il valore di θ_{2D} , angolo di deflessione di un cuneo piano in grado di generare le stesse proprietà del campo 2 a parità di numero di Mach e inclinazione dell'urto.

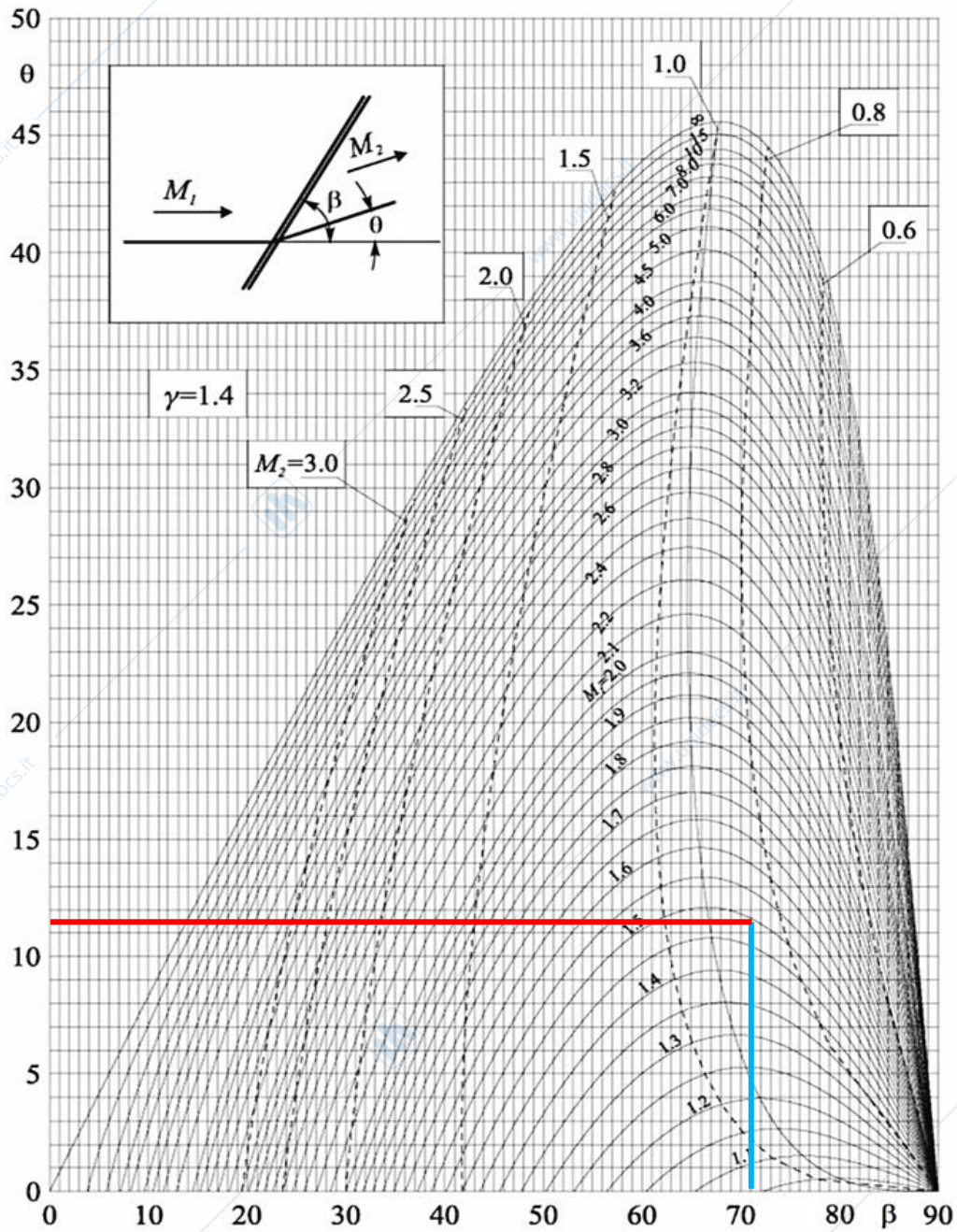


Figura 2.6: grafico $\theta - \beta - M$ per l'urto obliquo, riportante i dati del problema [6].

Il valore trovato è $\theta_{2D} \approx 11,5^\circ$.

Si noti come, a parità di condizioni, l'angolo di deflessione del cuneo bidimensionale sia notevolmente più piccolo di quello di semi-apertura del cono (circa un terzo). Questo perché, come già spiegato, l'urto sviluppato dal cuneo è più forte di quello sviluppato dal cono e dunque al cuneo basterà un angolo di deflessione minore per sviluppare gli stessi effetti sul campo 2.

Il confronto tra i due urti, quello conico e quello obliquo, è mostrato a titolo esemplificativo in Figura (2.7).

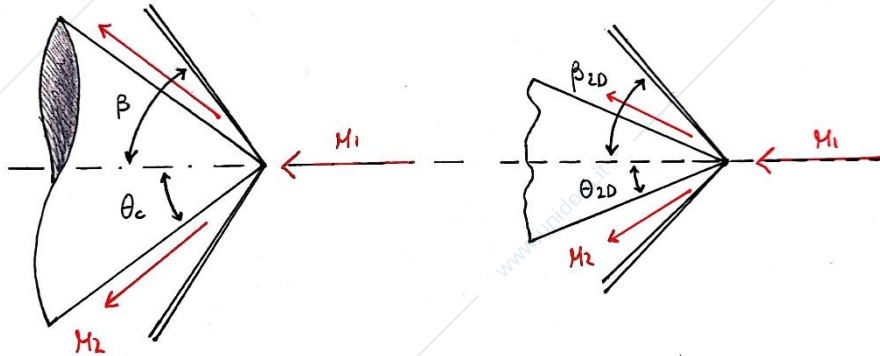


Figura 2.7: confronto tra l'urto conico (a sinistra) e un equivalente urto obliquo (a destra).

Volendo risolvere l'urto conico usando la sua approssimazione al modello obliquo, è necessario prima di tutto calcolare il numero di Mach della componente della velocità normale alla superficie di discontinuità:

$$M_{1n} = M_1 \sin \beta_{2D} \approx 1,41 \quad (2.2)$$

Ottenuta la componente M_{1n} è possibile inserirla all'interno delle relazioni valide per l'urto retto, sostituendola al generico M_1 riferito alla corrente a monte. Otteniamo dunque le seguenti relazioni:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1)M_{1n}^2}{(\gamma - 1)M_{1n}^2 + 2} \quad (2.3)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_{1n}^2 - 1) \quad (2.4)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_{1n}^2 - 1) \right] \cdot \left[\frac{(\gamma - 1)M_{1n}^2 + 2}{(\gamma + 1)M_{1n}^2} \right] \quad (2.5)$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_{1n}^2 - 1) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \left[\frac{(\gamma + 1)M_{1n}^2}{(\gamma - 1)M_{1n}^2 + 2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.6)$$

Il flusso è adiabatico e anche isoentalpico, ragion per cui

$$T_{01} = T_{02} \quad \leftrightarrow \quad H_{01} = H_{02} \quad (2.7)$$

È inoltre possibile risalire al Mach della corrente a valle dell'urto attraverso la relazione

$$M_{2n}^2 = \frac{1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) M_{1n}^2}{\gamma M_{1n}^2 - \frac{\gamma - 1}{2}} \quad (2.8)$$

Nota la sua componente normale alla superficie di discontinuità, è possibile risalire a M_2 usando la relazione

$$M_2 = \frac{M_{2n}}{\sin(\beta_{2D} - \theta_{2D})} \approx \frac{M_{2n}}{0,862} \quad (2.9)$$

2.6 Risultati

Sono riportati infine tutti i risultati numerici trovati.

- Inclinazione dell'urto rispetto alla corrente di monte: $\beta = \beta_{2D} = 71^\circ$
- Angolo di deflessione del cono: $\theta_c = 30^\circ$
- Angolo di deflessione del cuneo 2D (urto obliquo equivalente): $\theta_{2D} = 11,5^\circ$
- Numero di Mach della corrente a monte dell'urto: $M_1 = 1,49$
- Componente del numero di Mach a monte, normale alla superficie dell'urto: $M_{1n} = 1,41$
- Componente del numero di Mach a valle, normale alla superficie dell'urto: $M_{2n} = 0,7355$
- Numero di Mach della corrente a valle dell'urto: $M_2 = 0,8532$
- Rapporto tra le pressioni statiche: $p_2/p_1 = 2,1528$
- Rapporto tra le densità: $\rho_2/\rho_1 = 1,7070$
- Rapporto tra le temperature: $T_2/T_1 = 1,2612$
- Rapporto tra le pressioni totali: $p_{02}/p_{01} = 0,9557$

LABORATORIO 3

Analogia idrodinamica tra flussi idraulici e flussi compressibili

3.1 Descrizione e obiettivi dell'attività

Inserendo un filo di acciaio all'interno di un flusso idraulico in condizioni di acqua poco profonda si osserva la creazione di onde di Froude. Sfruttando il concetto di analogia idrodinamica, è possibile risalire alla velocità del flusso liquido attraverso la misurazione dell'angolo di inclinazione delle onde.

3.2 Analogia idrodinamica

In gasdinamica, per analogia idrodinamica si intende la similitudine esistente tra una **corrente gassosa bidimensionale** e una **corrente d'acqua a pelo libero** che scorre in un canale in condizione di acqua poco profonda. In particolare, è possibile porre in analogia le seguenti proprietà:

GAS	FLUSSO D'ACQUA
compressibile	incompressibile
velocità della corrente u	velocità della corrente u
velocità del suono a	velocità propagazione onda: velocità di fase c
densità ρ	profondità h
pressione p	pressione $gh^2/2$
esponente adiabatico γ	esponente adiabatico $\gamma = 2$
Temperatura T	Profondità h
calore specifico c_p	costante di gravità g

Tabella 3.1: analogia tra i parametri della corrente gassosa e del flusso d'acqua

È inoltre possibile definire un gruppo adimensionale analogo al numero di Mach, il **numero di Froude**:

$$Fr = \frac{u}{c} \quad (3.1)$$

dove c è la velocità di fase con la quale si propagano le onde sul pelo libero della corrente, grandezza analoga alla velocità del suono usata per definire il numero di Mach. La velocità di fase è definita dalla relazione

$$c = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi} \tan\left(h \frac{2\pi h}{\lambda}\right)} \quad (3.2)$$

dove g è l'accelerazione di gravità, λ è la distanza tra due creste consecutive dell'onda (lunghezza d'onda) e h la profondità media dell'acqua, come mostrato nella Figura (3.1).

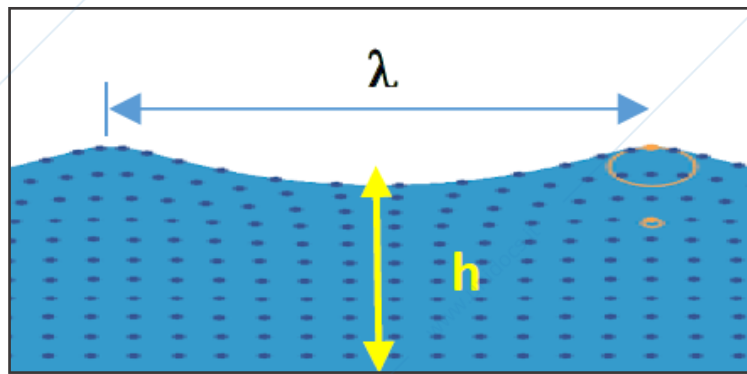


Figura 3.1: parametri geometrici dell'onda a pelo libero [7].

Nei casi in cui $h \gg \lambda$ la relazione (3.2) può essere semplificata nella forma

$$c = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}} \quad (3.3)$$

Quando si ha $h \ll \lambda$ si è invece in condizione di **acqua poco profonda** e la (3.2) diventa

$$c = \sqrt{gh} \quad (3.4)$$

Analogamente a quanto avviene per un gas compressibile, è possibile distinguere in una corrente liquida diversi regimi in base al numero di Froude:

Numero di Mach	
$M < 1$	flusso subsonico
$M = 1$	flusso sonico
$M > 1$	flusso supersonico

Numero di Froude	
$Fr < 1$	flusso subcritico
$Fr = 1$	flusso critico
$Fr > 1$	flusso supercritico

Richiamiamo le equazioni di un flusso gassoso compressibile:

$$\rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} + a^2 \frac{\nabla \rho}{\rho} = 0 \quad (3.6)$$

In condizione di acqua poco profonda, per l'analogo liquido si può scrivere che

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\vec{u}) = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} + gh \frac{\nabla h}{h} = 0 \quad (3.8)$$

L'analogia continua anche sul piano fenomenologico, con la similitudine tra le **onde d'urto** di una corrente supersonica e i **salti di acqua** di un flusso supercritico. Così come le onde d'urto rappresentano una discontinuità nella densità, nella pressione e nella temperatura della corrente gassosa, i salti d'acqua rappresentano una discontinuità nella profondità della corrente liquida, parametro legato dalla analogia idrodinamica proprio a densità, pressione e temperatura del gas. In entrambi i casi, alla discontinuità fa seguito una netta riduzione della velocità della corrente. La Figura (3.2) mostra questa analogia.

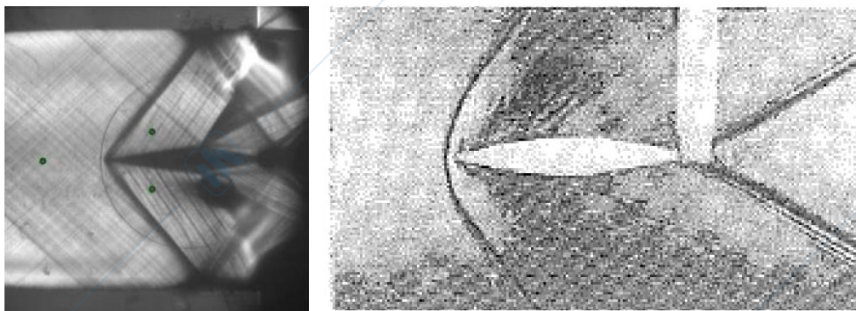


Figura 3.2: a sinistra, onde d'urto di una corrente gassosa supersonica; a destra, i salti d'acqua formati in un flusso idrodinamico supercritico

Un'altra analogia fenomenologica sussiste tra le **onde di Mach** e le cosiddette **onde di Froude**. Queste ultime si formano in un flusso liquido a pelo liquido in seguito a piccole perturbazioni e, come le onde di Mach, attraverso di esse le proprietà del fluido variano in maniera infinitesima [7]. Nel caso delle onde di Mach, l'angolo formato con la direzione della corrente indisturbata è funzione del numero di Mach:

$$\sin \mu = \frac{1}{M} \quad (3.9)$$

Analogamente, l'inclinazione delle onde di Froude rispetto alla corrente indisturbata sarà

$$\sin \mu_{Fr} = \frac{1}{Fr} \quad (3.10)$$

La Figura (3.3) mostra la proiezione di alcune onde di Froude ottenute attraverso l'inserimento di un sottile filo di acciaio in una corrente di acqua.

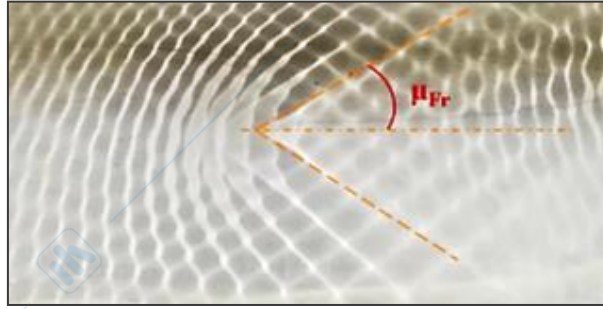


Figura 3.3: proiezione di onde di Froude su un foglio bianco, con evidenziato l'angolo μ_F [7].

3.3 Strumentazione e raccolta dati

Per l'attività è stata utilizzato l'impianto idrodinamico a pelo libero presente nel Laboratorio di Aerodinamica "Modesto Panetti" del Politecnico di Torino, mostrato nella Figura (3.4).

Nello strumento, un motore elettrico aziona un'elica che pone in circolazione una portata d'acqua in senso orario, in accordo con il numero di giri. Nella parte superiore del macchinario – realizzata in plastica trasparente – un graduale restringimento del canale permette l'accelerazione della corrente e il raggiungimento della condizione di supercriticità $F_r > 1$.

Nell'esperimento, mediante un filo di acciaio armonico di diametro $d = 0,2$ mm, è creata una piccola perturbazione nel flusso d'acqua. Questa propaga verso valle formando due onde di Froude simmetriche. A quel punto, una fonte di luce è posta al disotto del condotto e un foglio di carta bianca viene appoggiato al disopra di esso.

È infine nota la profondità media del flusso di acqua, pari a $h = 15$ mm.

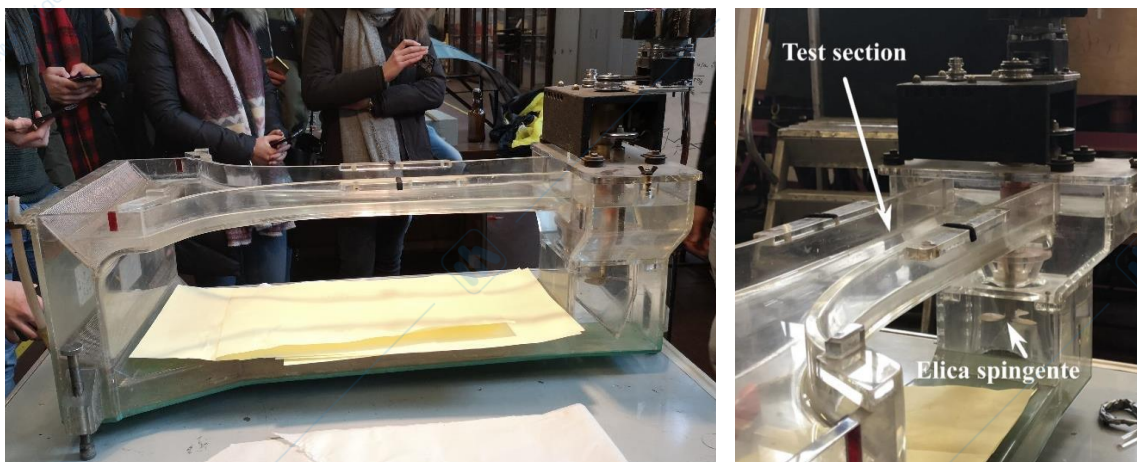


Figura 3.4: apparato sperimentale

3.4 Dati sperimentali

La Figura (3.5) mostra l'immagine proiettata dalle onde sul foglio.



Figura 3.5: immagine delle onde di Froude create durante l'esperimento

Dall'immagine delle onde è possibile risalire al valore dell'angolo di inclinazione delle stesse μ_{Fr} , misurato a partire dalla direzione della corrente di monte. Il valore ricavato dalla misurazione è di circa $2\mu_{Fr} = 88,51^\circ$, da cui, per simmetria, otteniamo $\mu_{Fr} \approx 44,25^\circ$.

La Figura (3.6) riporta la misurazione dell'angolo $2\mu_{Fr}$ effettuata con l'aiuto del software Geogebra.

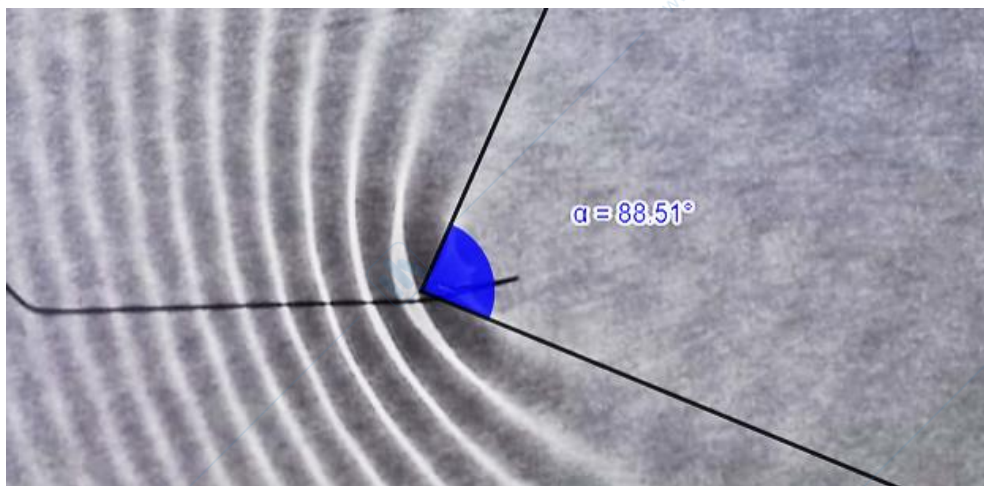


Figura 3.6: misurazione dell'angolo compreso tra le due onde di Froude.

3.5 Elaborazione dei dati e risultati

Il numero di Froude della corrente è pari a

$$Fr = \frac{u}{c} = \frac{1}{\sin \mu_{Fr}} \approx \frac{1}{0,6978} = 1,4331 \quad (3.11)$$

Poiché siamo in condizioni di acqua bassa, il numero di Froude è esprimibile come

$$Fr = \frac{u}{c} = \frac{u}{\sqrt{gh}} \quad (3.12)$$

Per cui la velocità della corrente a monte sarà circa pari a

$$u = Fr \sqrt{gh} = 0,5496 \text{ m/s} \quad (3.13)$$

Riferimenti

- [1] ARINA R., *Fondamenti di aerodinamica*, Torino, Levrotto & Bella, 2015, pp. 33, 35.
- [2] https://it.wikipedia.org/wiki/Stallo_aerodinamico, consultato il 17/11/2021
- [3] https://it.wikipedia.org/wiki/Profilo_alare_NACA, consultato il 17/11/2021
- [4] <http://www.ethermo.us/>, *Calculation platform for thermodynamics & transport properties*
- [5] IUSO G., *Dispense di Gasdinamica, Onde Oblique*, Politecnico di Torino, A.A. 2021/2022, pp. 24-25
- [6] CAFIERO G., *Dispense dei laboratori di Gasdinamica, Laboratorio 2: urto conico*, Politecnico di Torino, A.A. 2021/2022, pp. 7-8.
- [7] IUSO G., CAFIERO G., *Dispense dei laboratori di Gasdinamica, Laboratorio 3: analogia idrodinamica fra flussi idraulici e flussi compressibili*, Politecnico di Torino, A.A. 2021/2022, pp. 1, 5.