es 7.1

Sia $\mathbb{R}_2[x]$ spazio dei polinomi. Si consideri $F: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ data da

$$F(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(-1) \\ p'(0) \end{pmatrix}$$ dove $p'(x)$ è la derivata di $p(x)$

1) dim e basi di nucleo e immagine. Si dica se F è iniettiva e/o suriettiva

→ base di $\ker(F)$

$p(x) = a + bx + cx^2$ $\quad p'(x) = b + 2cx$ $\quad F(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(-1) \\ p'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a-b+c \\ b \end{pmatrix}$

$F(p(x)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b+c=0 \\ b=0 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} b=0 \\ c=-a \end{matrix}$ $\quad \ker(F) = \{a - ax^2 \mid a \in \mathbb{R}\} = \langle 1-x^2 \rangle$ $\quad$ dim ker F = 1, base $\{1-x^2\}$

Im F $\quad$ dim Im F = 2 $\quad$ per teorema nullità più rango

$F: V \to W$ lin

$\dim \operatorname{Im} F = \underset{3}{\dim V} - \underset{1}{\dim \ker F} = 2.$

base Im F? se $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ base di $\mathbb{R}_2[x]$

$\operatorname{Im} F = \langle F(\underline{b}_1), F(\underline{b}_2), F(\underline{b}_3) \rangle$ $\quad$ scelgo come base $\{1, x, x^2\}$

$F(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad F(x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\text{generatori}}$ $\quad$ base: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ → generatori e l.i.

$F(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

→ F non è né iniett. né suriett.

dim ker F > 0 → non è iniettiva

dim F < 3 → non è suriettiva

($\dim$ di $\mathbb{R}^3$) dimensione dello spazio di arrivo (deve essere dim Im F = 3.)

2.) trovo controimmagine

$F^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ p(x) \mid F(p(x)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad F(p(x)) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a-b+c \\ b \end{pmatrix}$

$p(x) \in F^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=2 \\ a-b+c=0 \\ b=1 \end{cases} \to \begin{cases} a+c=1 \\ b=1 \end{cases} \to \begin{cases} b=1 \\ c=1-a \end{cases}$

$F^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \{a + x + (1-a)x^2 \mid a \in \mathbb{R}\} = \{x + x^2 + a\underbrace{(1-x^2)}_{\ker F} \mid a \in \mathbb{R}\}$

$x + x^2 + \ker F$

ovvero $F^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è dato dai polinomi che sono somma di un particolare elemento di $F^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (es: $x+x^2$) più tutti i polinomi nel ker F.

3. $F^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} a+b+c=1 \\ a-b+c=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a+c=0 \\ a+c=2 \end{cases}$ → sistema impossibile $\quad F^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \emptyset$

4. trovare un sistema cartesiano di Im F?

→ trovare un sistema lineare omogeneo le cui soluzioni coincidano con Im F

$\operatorname{Im} F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ il generico vettore $\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \in \operatorname{Im} F$ sse esistono soluzioni del sistema con mat. completa

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{\text{gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & \boxed{-x+y+2z} \end{array}\right)$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} F$ sse: $\boxed{-x+y+2z=0}$ → equazione cartesiana

esempio

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfa l'equazione $\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} F$

→ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non soddisfa l'equazione $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Im} F$

MATRICE RAPPRESENTATIVA

$f: \underset{\mathcal{a}}{V} \to \underset{\mathcal{B}}{W}$ lineare $\quad \mathcal{a} = \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ base di V

$\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ base di W

$f(\underline{a}_1) = \alpha_{11}\underline{b}_1 + \alpha_{21}\underline{b}_2 + \dots + \alpha_{m1}\underline{b}_m$

$\vdots$

$f(\underline{a}_j) = \alpha_{1j}\underline{b}_1 + \alpha_{2j}\underline{b}_2 + \dots + \alpha_{mj}\underline{b}_m$

$f(\underline{a}_n) = \alpha_{1n}\underline{b}_1 + \alpha_{2n}\underline{b}_2 + \dots + \alpha_{mn}\underline{b}_m$

la prima colonna della matrice sarà: $\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}$

la matrice completa invece sarà:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in Mat_{mn}(\mathbb{K})$$

$\quad f(\underline{a}_1) \quad f(\underline{a}_2) \quad f(\underline{a}_m)$

si ha che f "=" L_A ovvero

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_a"'] & W \arrow[d, "\phi_B"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_A"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

si denota anche $A = M^{\mathcal{a}}_{\mathcal{B}}(f)$ $\rightsquigarrow$ matrice rappresentativa di f dalla base $\mathcal{a}$ alla base $\mathcal{B}$.

PROPRIETÀ:

1) $\underset{\mathcal{a}}{V} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{B}}{W} \xrightarrow{g} \underset{\mathcal{C}}{Z} \qquad M^{\mathcal{a}}_{\mathcal{C}}(g \circ f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(g) \circ M^{\mathcal{a}}_{\mathcal{B}}(f)$

2) $V = W \Rightarrow \mathcal{a} = \mathcal{B} \Rightarrow M^{\mathcal{a}}_{\mathcal{a}}(Id_V) = I_n$

3) $f: \underset{\mathcal{a}}{V} \to \underset{\mathcal{B}}{W}$ isomorfismo, $\dim V = \dim W = n \qquad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{a}}(f^{-1}) = [M^{\mathcal{a}}_{\mathcal{B}}(f)]^{-1}$

es 7.2 nei seguenti casi di spazi vettoriali V e W e di applicazioni lineari $F: V \to W$ si determini la matrice rappresentativa $M^{A}_{B}(F)$ rispetto alle basi date (A nel dominio e B nel codominio.)

1) $V = W = Mat_{2\times2}(\mathbb{R}) \qquad F(A) = A^T$

$$A = B = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

2) $V = \mathbb{R}_1[x]$ e $W = \mathbb{R}_2[x]$, gli spazi di polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado al più rispettivamente 1 e 2.

$F(p(x)) = p(1+x^2)$

$A = \{1-x,\ 1+x\}$, $B = \{x^2,\ x^2-x,\ 1+x\}$

sol.

$\rightsquigarrow$ 1)

$$A = B = \left\{\underset{A_1}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\underset{A_2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}\underset{A_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}\underset{A_4}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}\right\}$$

$F(A_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_1 = \underline{1}A_1 + \underline{0}A_2 + \underline{0}A_3 + \underline{0}A_4$

$F(A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_2 - A_4 = \underline{0}A_1 + \underline{1}A_2 + \underline{0}A_3 \underline{-1}A_4$

$F(A_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_3 + A_4 = \underline{0}A_1 + \underline{0}A_2 + \underline{1}A_3 + \underline{1}A_4$

$F(A_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A_4 = \underline{0}A_1 + \underline{0}A_2 + \underline{0}A_3 \underline{-1}A_4$

inserisco i coefficienti nella matrice

$$M^{A}_{B}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) $F: \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_2[x] \qquad F(p(x)) = p(1+x^2)$

$A = \{\underset{p_1}{1-x},\ \underset{p_2}{1+x}\} \qquad B = \{\underset{q_1}{x^2},\ \underset{q_2}{x^2-x},\ \underset{q_3}{1+x}\}$

$F(p_1) = F(1-x) = 1-(1+x^2) = -x^2 = -q_1$

$F(p_2) = 1+(1+x^2) = 2+x^2 = 2q_3 + 2q_2 - q_1$

$$\Rightarrow M^{A}_{B}(F) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{es 7.3}}$ (dalla prova scritta del 7/06/2017) sia A la seguente matrice a coef. reali:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

1) trovare una base di $\ker(L_A)$ e una di $\mathrm{Im}(L_A)$

2) data la base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\} \in \mathbb{R}^4$ si considerino le seguenti basi di $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{A} = \{\underline{e}_4, \underline{e}_3, \underline{e}_2, \underline{e}_1 + \underline{e}_4\} \qquad \mathcal{C} = \{\underline{e}_3 + 2\underline{e}_4, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_1 + \underline{e}_3\}$$

⇝ trovare la matrice rappresentativa di L_A rispetto alla base $\mathcal{A}$ nel dominio e $\mathcal{C}$ nel codominio

3) determinare, se esiste, un'applicazione lineare $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \mid g \circ L_A = 0$ e $\mid \dim \mathrm{Im}(g) = 3$

4) determinare, se esiste, un'applicazione lineare $h: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \mid g \circ L_A = 0$ e $\mid \dim \mathrm{Im}(h) = 2$.

1) $L_A(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ quindi $\ker L_A = \mathrm{Sol}(A\underline{x} = 0)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{GAUSS}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{cases} x = -y - 3z = +s + t - 3s = -2s + t \\ y = -z - w = -s - t \\ z = s \\ w = t \end{cases}$$

quindi $\ker F = \left\{ \begin{pmatrix} -2s+t \\ -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

↳ base di $\ker L_A$

$\dim \ker L_A = 2$

$\mathrm{Im} L_A = \langle$colonne di $A\rangle$ $\quad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

l. i. ⇒ sono due costituiscono la base di $\mathrm{Im}\, L_A$

2) $\mathcal{A} = \{\overset{a_1}{\underline{e}_4}, \overset{a_2}{\underline{e}_3}, \overset{a_3}{\underline{e}_2}, \overset{a_4}{\underline{e}_1 + \underline{e}_4}\}$

$$\mathcal{C} = \{e_3 + 2e_4, e_2, e_3, e_1 + e_3\} = \left\{ \underset{c_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \underset{c_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{c_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{c_4}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$L_A(a_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2c_2 - 2c_3$$

$$L_A(a_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 3c_1 + 2c_2 + c_3$$

$$L_A(a_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 + 2c_2 - c_3$$

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}(L_A) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_A(a_4) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 + 2c_2 - c_3$$

3) $g \circ L_A = 0 \iff \mathrm{Im} L_A \subseteq \ker g \Rightarrow \dim \ker g \geq 2$
$\Rightarrow \dim I(g) \leq 4 - 2 = 2 \quad \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\, g = 3$ è IMPOSSIBILE
(per nullità più rango)

4) $h \circ L_A = 0$, $\dim \mathrm{Im}\, h = 2$ ⇝ una h t.c. $\exists!$

si possono costruire casi: dovremo avere $\ker h = \mathrm{Im} L_A$ poiché $\mathrm{Im} L_A \subseteq \ker h$ e hanno la stessa dimens.

$\mathrm{Im} L_A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ dobbiamo avere $h(\underline{v}_1) = 0$, $h(\underline{v}_2) = 0$

⇝ completo $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ a una base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ scelgo dunque due vettori l.i. $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ e pongo $h(\underline{v}_3) = \underline{w}_1$ $h(\underline{v}_4) = \underline{w}_2$

$\exists!\, h$ con queste proprietà $\Rightarrow Im\,h = \langle \underline{w}_1, \underline{w}_2 \rangle$ che ha dim = 2

$Im\, L_A = Ker\, h \Rightarrow h \circ L_A = 0$

il DETERMINANTE (⇝ SOLO per matrici QUADRATE!)

$A = (\alpha_{ij}) \in Mat_n(\mathbb{K})$ il determinante di A: $\det(A) = \sum_{\substack{\sigma: J_n \to J_n \\ \text{permutaz.}}} \varepsilon(\sigma) \cdot \alpha_{1\sigma(1)} \cdot \alpha_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)} \in \mathbb{K}$

⇝ PRIMO TEOREMA di LAPLACE

$\det A = \alpha_{i1} A_{i1} + \alpha_{i2} A_{i2} + \dots + \alpha_{in} A_{in}$ ⇝ sviluppo lungo la i-esima riga.

dove $A_{ij} = (-1)^{i+j} \boxed{\det M_{ij}}$ ⇝ si chiama MINORE. (A_{ij} = COFATTORE)

M_{ij} = sottomatrice ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

⇝ PROPRIETÀ del DETERMINANTE:

"interpreto" il determinante come: $\det(A) = \det(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ (numero all'apice indica le COLONNE)

$\det(A) = \det(A_{(1)}, \dots, A_{(n)})$ (numero a pedice indica le RIGHE)

1) $\det A^T = \det A$
2) il determinante è ALTERNANTE: se scambio due righe (o due colonne) cambia segno.
3) è lineare nelle righe (e nelle colonne) $\det(\dots, \lambda\underline{a} + \mu\underline{b}, \dots) = \lambda \det(\dots, \underline{a}, \dots) + \mu \det(\dots, \underline{b}, \dots)$
   ↳ MULTI LINEARE.
4) $\det(I_n) = 1$ ⇝ il determinante della matrice identica è sempre = 1
5) Teorema di Binet: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.
6) le colonne (righe) di A sono l.i. $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
7) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ (ricordo che det A non è lineare nella matrice: non vale $\det(A+B) = \det A + \det B$)
8) A è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

OSS: da 3 e 6 segue che se ad una riga (colonna) sommo il multiplo di un'altra riga il det. non cambia:

$\det(A_{(1)} + \lambda A_{(2)}, A_{(2)}, \dots, A_{(n)}) = \det(A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(n)}) + \lambda \det(A_{(2)}, A_{(2)}, \dots, A_{(n)}) =$

$\det(A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(n)}) = \det A$ ($A_{(2)}$ si ripete ⇒ i vettori sono l.d.)

es 8.1: calcolare il determinante delle seguenti matrici:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$

regola generale per $Mat_2(\mathbb{R})$: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot A_{31} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot A_{32} + (-1)^{3+3} \cdot 2 \cdot A_{33} =$

scelgo questa riga perché ha più zeri e mi semplifica i conti.

↳ per trovare A_{32} (riga, colonna) elimino la riga 3 e la colonna 2. e poi faccio il det.

quindi ho: (il primo contributo nullo)

$- -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -1(1-2) + 2(2-2) = 1$

3) $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = A$ $\det A = (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

RIPETO CON ENTRAMBE LE MATRICI

↳ scelgo qst. colonna perché contiene più zeri ⇝ mi evito dei conti.

$\left[(-1)^{2+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right] + \left[(-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\right] =$

$-1(2+5) + 1(2) - 1(2-15) - 1(-2+0)$

$-7 + 2 - 13 + 2 = -20$

in alternativa, MOOOLTO PIÙ COMODO: mi creo maggiori zeri su una determinata riga o colonna così da fare meno conti

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{R_3 - R_1}{⇝} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e il determinante non cambia.

avrò $(-1)^{3+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\, 5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 5(-4-0) = -20$

$\boxed{\text{es } 8.2}$: nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ siano dati i vettori in dipendenza dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e i vettori in $\mathbb{R}^4$ siano dati i vettori:

$$\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1) per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $F_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $F_\alpha(\underline{v}_i) = \underline{w}_i$ e per quali α questa appl. è UNICA.

2) verificato che nel caso $\alpha = 0$ l'applicazione F_0 al punto (1) è unica si determini $F_0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) si determini la dim e una base (se esiste) una base di $\ker F_\alpha$ per tutti gli α per cui F_α è unica.

1) $\leadsto$ quando $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ sono l.i. ($\Rightarrow$ base)?

uso il determinante: sono l.i. $\Leftrightarrow |v_1\ v_2\ v_3| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & \alpha+1 \\ 1 & -1 & -1 \\ \alpha+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \alpha+1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} \alpha & \alpha+1 \\ \alpha+1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+\alpha+1) - (\alpha - (\alpha+1)^2) = -\alpha - 2 - \alpha + \alpha^2 + 2\alpha + 1 = \alpha^2 - 1 = (\alpha+1)(\alpha-1)$$

il determinante deve essere diverso da 0 $\Rightarrow (\alpha-1)(\alpha+1) \neq 0$ sse $\alpha \neq 1, \alpha \neq -1 \Rightarrow \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ base $\Rightarrow F_\alpha \exists!$

ora verifico i casi in cui $\boxed{\bullet\ \alpha = 1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ sono l.d.

vedo che $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ sono l.i., $\underline{v}_3$ sarà comb. lineare dei due.

$$\underline{v}_3 = \frac{1}{2}\underline{v}_1 + \frac{3}{2}\underline{v}_2$$

se F esiste con $F(\underline{v}_i) = \underline{w}_i$ dobbiamo avere (per linearità) $\underline{w}_3 = \frac{1}{2}\underline{w}_1 + \frac{3}{2}\underline{w}_2$

verifichiamo che $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ e $\underline{w}_3$ soddisfino questa relazione $\Rightarrow$ NO, non la verificano x gli zeri.

F_α non esiste per $\alpha = 1$

$\boxed{\bullet\ \alpha = -1}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ sono l.d.

$\underline{v}_1 = -\underline{v}_2$

$\{\underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ sono l.i. $\Rightarrow \underline{v}_1$ comb. lineare di $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$

come prima verifico che esista questa relazione anche per $\underline{w}_1$ quindi $\underline{w}_1 = -\underline{w}_2$? sì $\Rightarrow \exists F_\alpha$ (ma non unica)

2) nel caso $\alpha = 0$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \underline{v}_3 \end{array}$$

$F_0\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_4}$ devo scrivere $\underline{v}_4$ come combinazione lineare degli altri tre. (USO GAUSS)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \end{array} \begin{cases} z = -1 \\ y = -2z = 2 \\ x = -z = 1 \end{cases}$$

$\underline{v}_4 = x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3$

$\underline{v}_4 = \underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 - \underline{v}_3$

$$F_0(\underline{v}_4) = F_0(\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 - \underline{v}_3) = \underline{w}_1 + 2\underline{w}_2 - \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3) $\alpha \neq 1, \alpha \neq -1$ $\ker F_\alpha$

$\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ è comb. lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ $\quad \underline{v} = x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3$

$\boxed{\underline{v} \in \ker F_\alpha \Leftrightarrow F(\underline{v}) = x\underline{w}_1 + y\underline{w}_2 + z\underline{w}_3 = \underline{0}}$ $\leadsto$ sistema omogeneo.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ x = y \end{cases} \quad \begin{matrix} x = s \\ y = s \\ z = 0 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} s \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\ker F_\alpha = \{t\underline{v}_1 + t\underline{v}_2 \mid t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \ker F_\alpha = \langle \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ 0 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad \dim \ker F_\alpha = 1 \quad (\alpha \neq -1)$

$\boxed{\text{es } 8.3:}$

data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sia $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare $F(\underline{x}) = A\,\underline{x}$. Dati i vettori

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sia $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'unica applicazione lineare t.c. $G(\underline{b}_j) = \underline{w}_j$ per $j = 1, 2$. sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}$ la base $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$

1) si determinino le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(Id)$ e $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id)$

2) si determinino le matrici rappresentative $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(G \circ F)$ e $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F \circ G)$

1) $\mathcal{B} = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{b}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\underline{b}_2} \Big\} \qquad \mathcal{E} = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{e}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{e}_2} \Big\} \qquad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(Id)$? scrivo $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ come combinazione lineare di $\underline{e}_1, \underline{e}_2$

$$\begin{aligned} \underline{b}_1 &= -\underline{e}_1 + \underline{e}_2 \\ \underline{b}_2 &= \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 \end{aligned} \implies M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(Id) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id)$? scrivo $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ come combinazione lineare di $\underline{b}_1, \underline{b}_2$

$$e_1 = -2\underline{b}_1 + \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\underline{b}_1 + \frac{1}{3}\underline{b}_2 \qquad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id) = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(Id)^{-1}$$

$$\underline{e}_2 = \frac{1}{3}\underline{b}_1 + \frac{1}{3}\underline{b}_2$$

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F)$$

2) $F(\underline{x}) = A\,\underline{x}$

$G(\underline{b}_1) = \underline{w}_1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2$

$G(\underline{b}_2) = \underline{w}_2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e}_1$

$\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$

$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(G \circ F) \qquad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(G \circ F) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(G) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(F)$

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(F)$? $\rightsquigarrow F = Id \cdot F \qquad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(F) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id \circ F) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F) \rightsquigarrow A$

dato che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id) = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ allora avremo $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(F) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id) \cdot A = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(G \circ F) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(G) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F \circ G) = \overset{\hookrightarrow A}{M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F)} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(G)$$

$G = G \circ Id \qquad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(G) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(G \circ Id) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(G) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id)$

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id) = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F \circ G) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 & 5/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

METODO di CRAMER:

$A\underline{x}=\underline{b} \rightsquigarrow A^{-1}\cdot A\,\underline{x}=A^{-1}\underline{b} \Rightarrow \underline{x}=A^{-1}\underline{b}$

sistema $A\underline{x}=\underline{b}$ $A\in M_n(\mathbb{K})$ QUADRATA! se $\det A\neq 0$ il sistema si dice crameriano

soluzione $\underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ SOLUZIONE ESISTE UNICA, sistema DETERMINATO

$\hookrightarrow x_j=\dfrac{\det(A^{(1)},\dots,\boxed{\underline{b}},\dots,A^{(n)})}{\det(A)}$ nella j-esima posizione

es 8.4: risolvere il seguente sistema con il metodo di Cramer

$$\begin{cases}x+y+2z=10\\ x-z=1\\ 2x+y-z=5\end{cases}$$

$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix}10\\1\\5\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ la soluzione si calcola: $x_1=\dfrac{\det(\underline{b},A^{(2)},A^{(3)})}{\det A}$

$\rightsquigarrow$ per prima cosa calcolo i vari determinanti

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&0&-1\\2&1&-1\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&-1\\2&-1\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\end{vmatrix}=-(-1+2)-(-1-2)=-1+3=2$$

$$\det(\underline{b},A^{(2)},A^{(3)})=\begin{vmatrix}10&1&2\\1&0&-1\\5&1&-1\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&-1\\5&-1\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}10&2\\1&-1\end{vmatrix}=-(-1+5)-(-10-2)=-4+12=8$$

$$\det(A^{(1)},\underline{b},A^{(3)})=\begin{vmatrix}1&10&2\\1&1&-1\\2&5&-1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-1\\5&-1\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}10&2\\5&-1\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}10&2\\1&-1\end{vmatrix}=4+20-24=0$$

$-1+5=4$ $-1(-10-10)=20$ $-2(-10-2)=-24$

$$\det(A^1,A^2,\underline{b})=\begin{vmatrix}1&1&10\\1&0&1\\2&1&5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1\\2&5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&10\\1&1\end{vmatrix}=-3+9=6$$

$x=8/2=4$
$y=0$
$z=6/2=3$

$\underline{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$

IL RANGO:

il rango di una matrice $M\in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ può essere definito in diversi modi:

1) dimensione del sottospazio di $\mathbb{K}^m$ generato dalle colonne $c(M)$
2) dimensione del sottospazio di $\mathbb{K}^n$ generato dalle righe di M: $r(M)$
3) il massimo ordine $\mu(M)$ di minori non nulli estratti da M.

$\hookrightarrow$ il minore è il det di una sottomatrice quadrata.

$\rightsquigarrow$ se un minore è non nullo le righe e le colonne di M corrispondenti a quel minore sono l.i.

inoltre $c(M)=r(M)=\mu(M)=car(M)$.

es 9.1: calcolare il rango della matrice:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&5&7\\-1&-1&0&2&0\\1&0&1&2&2\\1&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l}\det\square\neq 0\\ \det\square\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow rk\,A\geq 2$

dato che $\det\square\neq 0\Rightarrow c_1,c_2$ sono l.i.

ora mi chiedo se c_1,c_2 e c_3 sono l.i. ma $c_3=c_1-c_2\rightsquigarrow$ sono l.d. c_3 lo scarto

c_1,c_2,c_4 sono l.i?

$$\det\begin{vmatrix}-1&-1&2\\1&0&2\\1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow rk(A)\geq 3$$ i 3 vettori considerati sono l.i.

c_1,c_2,c_4,c_5 sono l.i? $\det(c_1,c_2,c_4,c_5)=\begin{vmatrix}1&1&5&7\\-1&-1&2&0\\1&0&2&2\\1&0&1&1\end{vmatrix}=0$ i quattro vettori sono l.d. $rk(A)=3$

MATRICI EQUIVALENTI:

$f: V \to W \quad \dim V = n \quad \dim W = m$

B, B' sono due basi in V e C, C' sono due basi in W

$$\underset{A'}{M^{B'}_{C'}(f)} = \underbrace{\underset{C}{M^{C}_{C'}(Id_W)}}_{\text{cambiamento di base}} \cdot \underset{A}{M^{B}_{C}(f)} \cdot \underset{B}{M^{B'}_{B}(Id_V)} \rightsquigarrow \text{ovvero } A' = C \cdot A \cdot B$$

DEFINIZIONE: $A, A' \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ sono equivalenti se $A' = CAB$ con $C \in GL(m, \mathbb{K})$ e $B \in GL(n, \mathbb{K})$ ovvero se A' e A rappresentano la stessa applicazione

ogni matrice $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ di rango k è equivalente a una matrice del tipo

$\left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ quindi A e $A' \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ sono equivalenti $\iff rk(A) = rk(A')$

$\boxed{\text{es } 9.2}$: (dall'esame del 19/02/2024) si consideri l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

definito da $f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ e le matrici: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) dimostrare che $\nexists$ B e C (basi) in $\mathbb{R}^3$ t.c. M sia la matrice rappresentativa di f rispetto alla base B in dominio e C in codominio.

b) determinare due basi B' e C' in $\mathbb{R}^3$ t.c. N sia la matrice rappresentativa di f rispetto alla base B' in dominio e C' in codominio

a) $f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad (f = L_A) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{E}$ base canonica $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = A \qquad M^{B}_{C}(f) = M$? dimostrare che B e C non possono esistere: se B e C esistessero allora A e M sarebbero equivalenti

ma $rk(A) = 2 \neq 1 = rk(M)$

$\Rightarrow$ M e A non sono equivalenti.

b) trovare basi B' e C' t.c. $M^{B'}_{C'}(f) = N \quad rk(N) = 2 = rk(A) \Rightarrow$ esistono basi B' e C' t.c. $M^{B'}_{C'}(f) = N$.

come trovare B' e C' $\rightsquigarrow f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ base canonica $\mathcal{E} = \left\{\underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$f(\underline{e}_1) = \underline{e}_1$ | $f(b'_1) = 3c'_1$
$f(\underline{e}_2) = \underline{e}_3$ | $\Rightarrow f(b'_2) = \underline{0}$ $\rightsquigarrow$ dato che $f(b'_2)$ manda nel vettore nullo allora $b'_2 \in \ker f$
$f(\underline{e}_3) = \underline{e}_1$ | $f(b'_3) = -c'_3$

e dato che $\ker f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow b'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$f(\underline{e}_1) = \underline{e}_1 \Rightarrow f(\underline{e}_1) = \frac{1}{3}(3\underline{e}_1)$ poniamo $\underline{b}'_1 = \underline{e}_1$ e $c'_2 = \frac{1}{3}\underline{e}_1$

$f(\underline{e}_2) = \underline{e}_3 = -(-\underline{e}_3) \Rightarrow \underline{b}'_3 = \underline{e}_2$ e $c'_3 = -\underline{e}_3$ scrivo tutti i vettori che ho trovato

$b'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad c'_1 =$ di questo non sappiamo nulla basta che sia l.i. dagli altri. es: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$b'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad c'_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$b'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad c'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

AUTOVETTORI e AUTOVALORI

$f: V \to V$ endomorfismo

- $\underline{v} \neq 0$ è AUTOVETTORE riferito all'AUTOVALORE λ se $f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$
- se λ autovalore, l'autospazio riferito a λ $\quad V_\lambda = \{\underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}\}$ $\rightsquigarrow$ λ autovalore $\quad \dim V_\lambda \geq 1$

calcolo degli autovalori e degli autospazi:

A è la matrice rappresentativa di f, rispetto alla stessa base in dominio e codominio

- polinomio caratteristico

$$P(t) = \det(A - tI) \qquad \lambda \text{ è autovalore} \iff P_f(\lambda) = 0$$

- autospazi $\quad V_\lambda = \ker(f - \lambda Id_V)$

$\rightsquigarrow$ si trova il sistema omogeneo $(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$

- $f: V \to V$ è diagonalizzabile se esiste una base di autovettori.

molteplicità algebrica e geometrica:

λ autovalore di f

- la molteplicità algebrica di λ $\; m_a(\lambda)$ è la molteplicità di λ come radice di $P_f(t)$ $\quad$ $\left(\text{es } \begin{array}{l} m_a(x-7) = 1 \\ m_a((x-7)^2) = 2 \quad \text{etc.} \end{array}\right)$
- la molteplicità geometrica è la $\dim V_\lambda$ $\quad m_g(\lambda) = \dim V_\lambda$ $\quad$ si ha quindi $\quad 1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$

TEOREMA: V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ $\quad f \in End(V)$

$$f \text{ diagonalizzabile} \iff \begin{cases} i) \text{ tutte le radici } P_f(t) \text{ sono in } \mathbb{K} \\ ii) \; \forall \text{ autovalore } \lambda \;\; m_a(\lambda) = m_g(\lambda) \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ quando si verifica questo λ è detto AUTOVALORE REGOLARE

$\boxed{\text{es } 9.3}$: calcolare autovalori e autospazi dell'endomorfismo $L_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L_A è diagonalizzabile?

- A è matrice rappresentativa di L_A
- cerco il polinomio caratteristico :

$$P_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 3-t & 1 & 1 \\ 5 & -1-t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)\left[(3-t)(-1-t) - 5\right] = (1-t)(t^2 - 2t - 8) =$$

sviluppo questa riga

$$= (1-t)^1 (t+2)^1 (t-4)^1$$

le radici di questo polinomio sono lo SPETTRO di A (insieme degli AUTOVALORI) $\quad \sigma = \{1, -2, 4\}$

$\Rightarrow$ $m_a(1) = m_a(-2) = m_a(4) = 1$

$\Rightarrow 1 \leq m_g(1) \leq m_a(1)$
$\quad 1 \leq m_g(1) \leq 1 \quad \Rightarrow m_g(1) = 1$

$\rightsquigarrow$ allo stesso modo $\quad m_g(-2) = m_a(-2)$
$\quad m_g(4) = m_a(4)$

si evince che

- tutti gli autovalori sono in $\mathbb{R}$
- tutti gli autovalori sono regolari

$\Rightarrow f$ è diagonalizzabile

- ora cerco gli autospazi per capire se è diagonalizzabile

$\boxed{V_\lambda = \ker(A - \lambda I)}$ $\rightsquigarrow$ regola generale

$V_1 = \ker(A - I) \qquad A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = y \\ 2x + y + z = 0 \\ y = s \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = s \\ y = s \\ z = -3s \end{array} \qquad V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_{-2} = \ker(A + 2I) \qquad A + 2I = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} z = 0 \\ y = s \\ 5x = -y - z = -s \\ x = -\frac{1}{5}s \end{array} \qquad \left\langle \begin{pmatrix} -1/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = V_{-2}$

$V_4 = \ker(A - 4I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} z = 0 \\ y = s \\ x = s \end{array} \qquad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = V_4$

L_A è diagonalizzabile e la sua base di vettori è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\rightsquigarrow$ implica che A è simile alla matrice diagonale ★

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

★ ovvero che esiste P matrice invertibile t.c. $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-5&1\\-3&0&0\end{pmatrix}$ ↪ le sue colonne sono gli autovettori.

es 10.1 : calcolare autovalori e autospazi dell'endomorfismo $L_A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ associato alla matrice A:

$A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\2&-1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ si dica se L_A è diagonalizzabile.

$$P_A(t)=\begin{vmatrix}3-t&-2&1\\2&-1-t&1\\0&0&2-t\end{vmatrix}=(2-t)\begin{vmatrix}3-t&-2\\2&-1-t\end{vmatrix}=(2-t)[(3-t)(-1-t)+4]=(2-t)(t^2-2t+1)=(2-t)(t-1)^2$$

lo spettro σ è dato dalle radici del polinomio σ = {2, 1}

studio della molteplicità : $m_a(2)=1$ ↳ regolare $1\le m_g(2)\le m_a(2)$, $1\le m_g(2)\le 1 \Rightarrow m_g(2)=1$

$m_a(1)=2$ ↳ bisogna calcolare $\dim(V_1)$ passando dagli AUTOSPAZI.

• AUTOSPAZI

$V_1=\ker(A-I) \rightsquigarrow (A-I)=\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&-2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2&-2&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $<\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}>$ $\dim V_1=1$

$m_g(1)=1\neq m_a(1)=2 \rightsquigarrow$ non è regolare

$\Rightarrow L_A$ non è diagonalizzabile

es 10.2 : al variare di $k\in\mathbb{R}$ sia data la matrice $M_k=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\k&2&0\\0&0&k\end{pmatrix}$

1) determinare i valori di k t.c. 3 sia un autovalore di M_k
2) tra i valori di k trovati al punto precedente, si trovino quelli per cui la matrice M_k è diagonalizzabile e per tali valori si trovi una matrice invertibile t.c. $P^{-1}M_kP$ sia diagonale.

1) Impongo che 3 sia radice del polinomio caratteristico

$$P_{M_k}(t)=\begin{vmatrix}3-t&-1&-1\\k&2-t&0\\0&0&k-t\end{vmatrix}=(k-t)\begin{vmatrix}3-t&-1\\k&2-t\end{vmatrix}=(k-t)((3-t)(2-t)+k)=(k-t)(6+t^2-2t-3t+k)=(k-t)(t^2-5t+6+k)$$

• se k = 3 ⇝ 3 è autovalore
• 3 deve essere radice del polinomio caratteristico

$t=3$ $9-5\cdot3+6+k=0 \Rightarrow k=0$

$\Rightarrow$ 3 è autovalore $\Leftrightarrow$ k = 3 o k = 0

2) per quali valori k = 3 o k = 0 M_k è diagonalizzabile?

$k=3$ $P_{M_3}(t)=(3-t)(t^2-5t+9)$

AUTOVALORI : $\lambda=3$ oppure $t^2-5t+9=0$ $\Delta=25-36<0$

M_3 non è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$) poiché $P_{M_3}(t)$ non ha tutte le radici in $\mathbb{R}$

$k=0$ $P_{M_0}(t)=-t(t^2-5t+6)$ $M_0=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow M_0$ è diagonalizzabile

↳ è una matrice triangolare caratterizzata da tutti zeri sotto la diagonale

nelle matrici triangolari i valori sulla diagonale sono gli autovalori della matrice.

$\Rightarrow$ spettro σ = {0, 2, 3}

M_0 è diagonalizzabile ed è quindi simile alla matrice diagonale $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \exists P$ t.c. $P^{-1}M_0P=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

P ha come colonne una base di autovettori

$V_3=<\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}>$ $V_2=<\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}>$ $V_0=<\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}>$ $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{es 10.3}}$: sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi a coefficienti reali e di grado massimo 2. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si considera l'endomorfismo $F_\alpha : V \to V$

$F_\alpha(p(x)) = p(1+\alpha x)$ determinare α t.c. F_α DIAGONALIZZABILE e trovare una base di autovalori.

⇝ occorre la matrice rappresentativa di F_α rispetto a qualche base
$\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ base

$F_\alpha(1) = 1$
$F_\alpha(x) = 1 + \alpha x$
$F_\alpha(x^2) = (1+\alpha x)^2 = 1 + 2\alpha x + \alpha^2 x^2$

$M_\mathcal{E}^\mathcal{E}(F_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$ ⇝ è una matrice TRIANGOLARE
il suo spettro è la diagonale spettro $\sigma : \{1, \alpha, \alpha^2\}$ (autovalori

MOLTEPLICITÀ:
$m_a(1) = ?$
$m_a(\alpha) = ?$
$m_a(\alpha^2) = ?$
] dipendono dal valore di α

studio i casi:
- se $\alpha \neq 0, 1, -1$ tutti gli autovalori sono distinti e F_α è diagonalizzabile
- se $\alpha = 0$ $M_\mathcal{E}^\mathcal{E}(F_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ lo spettro è $\sigma : \{1, 0\}$ $m_a(1) = 1$, $m_a(2) = 2$ ⇝ $V_0 = \ker F_0$

$p(x) = a + bx + cx^2$ ⇝ $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_\mathcal{E}$

$\ker F_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix}_\mathcal{E} \right\} = \langle x-1, x^2-1 \rangle$

$\dim V_0 = 2 = m_g(0) = m_a(0)$
$\Rightarrow F_0$ è diagonalizzabile
$\{\underset{1}{1}, \underset{0}{x^2-1}, \underset{0}{x-1}\}$ base di autovalori

- se $\alpha = 1$ $A = M_\mathcal{E}^\mathcal{E}(F_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ spettro $\sigma : \{1\}$
$m_a(1) = 3$
$\dim V_1$? $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\dim V_1 = \dim \ker(A-I) = 3 - rk(A-I) = 1$
$m_g(1) = 1 < m_a(1)$
$\Rightarrow F_1$ NON è DIAGONALIZZABILE

- se $\alpha = -1$
$A = M_\mathcal{E}^\mathcal{E}(F_{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ spettro $= \{1, -1\}$
$m_a(1) = 2$ $m_a(-1) = 1$ $V_1 = \ker(A-I)$

$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $rk(A-I) = 1$ $\dim V_1 = 3 - 1 = 2$
$\Rightarrow m_a(1) = 2 = m_g(1)$
F_{-1} è DIAGONALIZZABILE.

⇝ AUTOVETTORI: $V_1 = \{1, x - x^2\}$
$V_{-1} = \ker(A+I)$ $(A+I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow V_{-1} = \langle 1 - 2x \rangle$

base di autovettori: $\{\underset{1}{1}, \underset{1}{x - x^2}, \underset{-1}{1 - 2x}\}$

nel caso di $\alpha \neq 0, 1, -1$ qual è una base di autovettori? $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$ $(\alpha \neq 0, 1, -1)$

$\boxed{V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}$

$V_\alpha : A - \alpha I = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 - \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha z = 0 \\ (1-\alpha)x + y + z = 0 \end{cases} \overset{\alpha \neq 0}{\Rightarrow} \begin{cases} z = 0 \\ y = -(1-\alpha)x \end{cases} \Rightarrow \boxed{V_\alpha = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}$

$V_{\alpha^2} : A - \alpha^2 I = \begin{pmatrix} 1-\alpha^2 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha - \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \alpha - \alpha^2 y + 2\alpha x = 0 \\ (1-\alpha^2)x + y + z \end{cases}$

$x = -\frac{(1-\alpha)}{2} y$
$z = -(1-\alpha^2)x - y = \frac{(1-\alpha^2)(1-\alpha)}{2} y - y = \frac{(1-\alpha^2)(1-\alpha) - 2}{2} y$

$\boxed{V_{\alpha^2} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha - 1}{2} \\ 1 \\ \frac{(1-\alpha^2)(1-\alpha) - 2}{2} \end{pmatrix}}$

MATRICI SIMILI:

$f: V \to V$ $\quad a$ e a' basi di V

$\underbrace{M_a^a(f)}_{A} = \underbrace{M_a^{a'}(Id)}_{C^{-1}} \cdot \underbrace{M_{a'}^{a'}(f)}_{A'} \cdot \underbrace{M_{a'}^{a}(Id)}_{C} \Rightarrow A = C^{-1}A'C$ $\quad A$ e A' sono simili ($A \sim_{sim} A'$)

es 10.4: si dimostri che le seguenti matrici non sono simili

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

• le matrici simili hanno la stessa TRACCIA $\quad A \sim_{sim} A' \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} tr(A) = tr(A')$

$tr(A) = -2 \neq t(B) = -7$

↳ le due matrici non sono simili

• $A \sim_{sim} A' \Rightarrow \det(A) = \det(A')$

• $A \sim_{sim} A' \Rightarrow P_A(t) = P_{A'}(t)$ ⇝ in particolare $A \sim_{sim} A' \Rightarrow$ hanno gli stessi autovalori con stesse molteplicità (algebriche e geometriche)

es 11.1: Stabilire per quali valori dei parametri reali h e k le due matrici A e B siano simili:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & h & 0 \\ k-2 & 3 & 0 \\ 0 & k-1 & 2 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

• studiamo B : – spettro di $B = \{2,2,3\}$ $\quad m_a(2) = 2$, $m_a(3) = 1$

matrice triangolare

• $B - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ⇝ $m_g(2) = 3 - rk(B-2I) = 2 = m_a(2)$ $\quad$ B è DIAGONALIZZABILE $\Rightarrow B \sim_{sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Quindi $A \sim_{sim} B \iff A \sim_{sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (in particolare anche A deve essere diagonalizzabile)

• studiamo $A = \begin{pmatrix} 2 & h & 0 \\ k-2 & 3 & 0 \\ 0 & k-1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad P_A(t) = (2-t)((2-t)(3-t) - h(k-2))$

• dobbiamo imporre $P_A(t) = P_B(t) = (2-t)(2-t)(3-t) \iff h(k-2) = 0$ (ovvero che $h=0$ o $k=2$) : studio i casi

. $h = 0$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k-2 & 3 & 0 \\ 0 & k-1 & 2 \end{pmatrix}$ ⇝ matrice diagonale ⇒ spettro $= \{2,2,3\}$
ora voglio studiare per quali k è diagonalizzabile

$\dim V_2 = 3 - rk(A - 2I)$ $\quad A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k-2 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad rk(A-2I) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \neq 2,1 \\ 2 & \text{se } k = 2 \text{ o } 1 \end{cases}$

⇒ nel caso $h = 0$ $\quad A \sim_{sim} B \sim_{sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \iff k = 1$ o 2

caso $k = 2$

$A = \begin{pmatrix} 2 & h & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma = \{2,2,3\}$ $\quad \dim V_2 = 3 - (A - 2I)$ $\quad A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim V_2 = 2 \quad \forall h$

$A \sim B \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \forall h$

riassunto $A \sim_{sim} B \iff \begin{matrix} \bullet\, k = 2 & \forall h \\ \bullet\, h = 0 & k = 1 \end{matrix}$

es 11.2: in $\mathbb{R}^2$ si considerino la base $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Sia $f \in End(\mathbb{R}^2)$ l'endomorfismo rappresentato dalla matrice

$D = M_A^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alle basi B in partenza e A in arrivo

la matrice è diagonale, ma non significa che è diagonalizzabile!

• si dica se f è diagonalizzabile.

⇝ bisogna calcolare una matrice rappresentativa di f con stessa base in arrivo e partenza

$B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b_1} ; \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{b_2} \right\}$ $\quad$ • $f(b_1) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -b_1 - 2b_2$

• $f(b_2) = 2e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2(b_1 + b_2)$

$\Rightarrow M_B^B(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = B$

$P_B(t) = (-1-t)(2-t) + 4 = t^2 - t + 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = -7 < 0$ $\quad$ non è fattorizzabile su $\mathbb{R}$
⇒ non diagonalizzabile.

SPAZI VETTORIALI EUCLIDEI $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$

- V sp. vettoriale su $\mathbb{R}$
- $\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineare, simmetrica, definita positiva $\boxed{\langle v,v\rangle \geq 0 \ \forall v \in V \text{ con } \langle v,v\rangle = 0 \iff v = 0}$
  (prodotto scalare o prodotto interno
  - su $\mathbb{R}^n$ prodotto interno standard: $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x}^T \cdot \underline{y} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$
  - fissata una base $\mathcal{A} = \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ di V: $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \underline{x}^T A \underline{y}$ ⇝ dove $\underline{x}, \underline{y}$ coordinate di $\underline{v}$ e $\underline{w}$ rispetto ad $\mathcal{A}$
  - $A = (\langle a_j, a_i \rangle)$ matrice associata (simmetrica)

    $\langle , \rangle$ definita positiva $\iff$ tutti gli autovalori di A sono >0

BASI ORTONORMALI:

⇝ norma di un vettore: $\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle}$

$\mathcal{A} = \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ base di $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$

- si dice ortogonale se: $\langle \underline{a}_i, \underline{a}_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$ $\quad (\underline{a}_i \perp \underline{a}_j) \Rightarrow$ matrice associata diagonale
- si dice ortonormale se è ortogonale e inoltre $\|\underline{a}_j\|^2 = \langle \underline{a}_j, \underline{a}_j \rangle = 1 \ \forall j$ (versori) (matrice associata è I)

COMPLEMENTO ORTOGONALE:

$\underline{u} \perp \underline{v} \iff \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = 0$

$U \subseteq V$ sottospazio $\dim V = n$, $\dim U = k < n$

- il complemento ortogonale di U è: $U^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = 0 \ \forall \underline{u} \in U\}$
- si ha che
  - $V = U \oplus U^\perp$
  - $\dim U^\perp + \dim U = \dim V$

ENDOMORFISMI SIMMETRICI:

$(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ sp. vett. euclideo

$f \in \mathrm{End}(V)$ simmetrico (autoaggiunto) se: $\langle f(u), v \rangle = \langle u, f(v) \rangle \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in V$

- $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ base di V
  - P matrice associata a $\langle , \rangle$ rispetto ad $\mathcal{A}$
  - A " " " f rispetto ad $\mathcal{A}$

f simmetrico $\iff A^T P = PA \iff A^T P$ è matrice simmetrica

⇝ in particolare se $\mathcal{A}$ è base ortonormale, f simmetrico $\iff A$ matrice simmetrica.

↳ PROPRIETÀ: f endomorfismo simmetrico di $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$

→ il polinomio caratteristico di f è totalmente fattorizzabile

→ autovettori riferiti ad autovalori distinti sono ortogonali.

TEOREMA SPETTRALE:

$(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ spazio vettoriale euclideo $f \in \mathrm{End}(V)$ è simmetrico $\iff$ esiste base ortonormale di autovettori.

$\boxed{\text{es } 11.3}$ sullo spazio vettoriale $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ sia $\psi: V \times V \to \mathbb{R}$ l'applicazione data da $\psi(A,B) = \mathrm{tr}(AB^T)$ e sia $g: V \to V$ l'applicazione lineare data da $g(A) = \mathrm{cof}(A^T)$

1) provare che ψ è un prodotto interno su V
2) Dimostrare che g è un endomorfismo simmetrico rispetto al prodotto interno ψ
3) Determinare una base di autovettori di g ortonormale rispetto a ψ
4) determinare il complemento ortonormale del sottospazio vettoriale di V costituito dalle matrici antisimmetriche; ossia dalle matrici B t.c. $B^T = -B$

Base $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = \underline{x}$

1) $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$

$$\psi(A,B) = \mathrm{tr}(AB^T) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_2 & y_4 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 = \underline{x}^T \cdot \underline{y}$$ prodotto interno standard

$\Rightarrow \psi$ è prodotto interno inoltre $\mathcal{E}$ è base ortonormale

2) $\mathrm{cof}(A^T) = \begin{pmatrix} x_4 & -x_2 \\ -x_3 & x_1 \end{pmatrix}$

$g\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_4 & -x_2 \\ -x_3 & x_1 \end{pmatrix}$ $\qquad g: \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$

la matrice rappresentativa di g rispetto alla base $\mathcal{E}$ è:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(g)$$ ⇝ è simmetrica, perché $\mathcal{E}$ è BASE ORTONORMALE, g è endomorfismo simmetrico.

3) Dobbiamo calcolare gli autovalori e gli autovettori di φ ⇝ quindi di G

→ POLINOMIO CARATTERISTICO

$$P_\varphi(t) = (t-1)(t+1)^3 \qquad \text{spettro} = \{1,-1,-1,-1\}$$

AUTOSPAZI:

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \right\rangle = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{A_1} \right\rangle$$

$$V_{-1} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}_{A_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}_{A_3}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}_{A_4} \right\rangle \qquad \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$ · base di autovettori? · ortonormale?

· $\psi(A_1, A_j) = 0 \quad \forall j = 2,3,4$ (autovettori riferiti ad autovalori distinti sono ortogonali poiché φ è simmetrica)

↳ dobbiamo verificare se $\langle A_i, A_j\rangle = 0 \quad \forall i \neq j$ e $i, j \in \{2,3,4\}$

si verifica che $\langle A_2, A_3\rangle = (1\ 0\ -1\ 0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \underline{0}$

similmente $\langle A_2, A_4\rangle = 0$, $\langle A_3, A_4\rangle = 0$, la base è ortogonale

NORMALIZZO: $A_j' = \dfrac{A_j}{\|A_j\|}$

$A_1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\quad \|A_1\| = \sqrt{2}$

$A_2 = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $\quad \|A_2\| = \sqrt{2}$

$A_3 = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $\quad \|A_3\| = 1$

$A_4 = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ $\quad \|A_4\| = 1$

⇒ base ortonormale di autovettori di φ:

$$\left\{ \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0\\0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0\\0&-1/\sqrt{2}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \right\}$$

4) $W = \{\text{matrici antisimmetriche}\} = A \in Mat_2(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$ ⇝ trovare complemento ortogonale $W^\perp$

$A = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ $\quad A \in W$ se: $\underbrace{\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}}_{A^T} = \underbrace{\begin{pmatrix}-a&-b\\-c&-d\end{pmatrix}}_{-A}$ ⇒ $\begin{cases}a=d=0\\c=-d\end{cases}$ ⇒ $A = \begin{pmatrix}0&b\\-b&0\end{pmatrix}$ $\quad W = \left\langle \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} \right\rangle$

$W^T = \{B \in Mat_2(\mathbb{R}) \mid \psi(B, A) = 0 \ \forall A \in W\}$ (ortogonali a ogni elemento della basi di W)

$B = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ $\qquad \psi\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right) = b-c$

$W^\perp$: $b-c=0$ ⇒ $b=c$ $\qquad W^\perp = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&d\end{pmatrix}\right\}$ = matrici simetriche

11.4) Si consideri la famiglia di applicazioni lineari $f_h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dipendenti dal parametro reale h così assegnata:

$$f_h\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}hx+2z\\hy\\2x+hz\end{pmatrix}$$

1) al variare di $h \in \mathbb{R}$, si determini una base di autovettori di f_h ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare standard

2) si indichi con $\langle,\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$; per quali $h \in \mathbb{R}$ la forma bilineare $(u,v)_h := \langle u, f_h(v)\rangle$ è un prodotto scalare definito positivo?

1) $\mathcal{E} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ base canonica ortonormale $\qquad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_h) = \underbrace{\begin{pmatrix}h&0&2\\0&h&0\\2&0&h\end{pmatrix}}_{A_h}$ (simmetrica)

$$P_{A_h}(t) = (h-t)(h-t)(h-t) - 2(2(h-t)) = (h-t)[(h-t)^2-4] = (h-t)(h-t-2)(h-t+2) = (h-t)((h-2)-t)(h+2-t)$$

⇝ spettro $\{h, h-2, h+2\}$

↳ calcolo degli autospazi

V_h: $A - hI = \begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}$ $\qquad V_h = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\underline{u}_1} \right\rangle$ $\qquad \underline{u}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$V_{h-2} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$ $\qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$V_{h+2} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ $\qquad \underline{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ è base ortogonale di autovettori

normalizzo $\underline{u}_j' = \dfrac{\underline{u}_j}{\|\underline{u}_j\|}$ $\qquad \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\}$

$P^{-1}A_hP = \begin{pmatrix}h&0&0\\0&h-2&0\\0&0&h+2\end{pmatrix}$ $\qquad$ P matrice ortogonale: $P \in O(3)$? $\qquad P^{-1} = P^T \qquad PP^T = I$

2) $\langle , \rangle$ prodotto interno standard su $\mathbb{R}^3$. Forma bilineare:

$(\underline{u}, \underline{v})_h := \langle \underline{u}, f_h(\underline{v}) \rangle$ $\quad f_h(\underline{v}) = A_h \underline{v}$ $\quad \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x}^T \cdot \underline{y}$

$(\underline{u}, \underline{v})_h : \underline{u}^T (A_h \underline{v}) = \underline{u}^T \cdot A_h \cdot \underline{y}$

la matrice associata a $(,)_h$ rispetto alla base canonica è:

$$A_h = \begin{pmatrix} h & 0 & 2 \\ 0 & h & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ che è simmetrica $\Rightarrow (,)_h$ è forma bilineare simmetrica

È anche definita positiva se tutti gli autovalori sono >0 dobbiamo imporre $\begin{cases} h>0 \\ h-2>0 \\ h+2>0 \end{cases}$

$\Rightarrow h>2$ per questi h $(,)_h$ è prodotto interno

es 12.1 sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$\varphi(x,y) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_3$$

sia f_b l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rappresentato, rispetto alla base canonica della matrice

$$A_b = \begin{pmatrix} 3 & -b & b \\ 1 & 2-b & b \\ 1 & 1-b & 1+b \end{pmatrix}$$

1) dimostrare che φ è un prodotto scalare
2) determinare gli eventuali valori di b per cui l'endomorfismo f_b è simmetrico rispetto a φ
3) Posto $b=0$ determinare una base di $\mathbb{R}^3$, ortonormale rispetto al prodotto scalare φ e costituita da autovettori di f_0

1) Matrice associata a φ rispetto a una base canonica

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^t \cdot Q \cdot \underline{y}$$ poiché Q è simmetrica φ è bilineare simmetrica.

φ è definita positiva? $\varphi(\underline{x}, \underline{x}) \geq 0$ e $\varphi(\underline{x}, \underline{x}) = 0 \iff \underline{x} = 0$

$$\varphi(\underline{x}, \underline{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 = x_1^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 =$$
$$= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \geq 0$$ $\rightsquigarrow$ perché SOMMA di QUADRATI

$=0 \iff x_1 = x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = 0$
$\iff x_1 = x_2 = x_3 = 0$ $\Big\} \Rightarrow \varphi$ è prodotto interno

2) $f_b(\underline{x}) = A_b \cdot \underline{x}$

per quali b f_b è simmetrico rispetto a φ? bisogna verificare quando $Q \cdot A_b$ è simmetrica
↳ Q matrice associata a φ

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q A_b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -b & b \\ 1 & 2-b & b \\ 1 & 1-b & 1+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -b-2 & b \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

↳ DEVE ESSERE SIMMETRICA

$\begin{cases} -b-2 = -2 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow b=0$

3) $b=0$ base di autovettori di f_0 ortonormale rispetto a φ

$b=0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ spettro: $\{3, 2, 1\}$

$V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \to \underline{u}_1$

$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \to \underline{u}_2$

$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \to \underline{u}_3$

osserviamo che $\varphi(\underline{u}_1, \underline{u}_2) = (1\ 1\ 1)\, Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$
$= (1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$
$= (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\varphi(\underline{u}_1, \underline{u}_2) = \varphi(\underline{u}_2, \underline{u}_3) = \varphi(\underline{u}_1, \underline{u}_3) = 0$ perché autovettori riferiti ad autovalori distinti

$\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ è base ortogonale $\quad$ normalizzo $\underline{u}_j' = \dfrac{u_j}{\|u_j\|}$

Dove $\|u_j\| = \sqrt{\varphi(u_j, u_j)} = \sqrt{u_j^t Q \underline{u}_j}$

• $\|\underline{u}_1\|^2 = (1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

• $\|\underline{u}_2\|^2 = u_2^t Q \underline{u}_2 = 1$

è ortonormale $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Leftarrow$ • $\|\underline{u}_3\|^2 = \underline{u}_3^t Q \underline{u}_3 = 1$

es 12.2 sia $a \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice $B_a = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con a parametro reale

a) Determinare al variare di a la segnatura della forma bilineare simmetrica $<,>_a$ definita su $\mathbb{R}^3$ da B_a. Per quali valori di a tale forma definisce un prodotto scalare?

b) Determinare una base rispetto alla quale la forma simmetrica definita B_a è espressa in forma canonica

c) nel caso $a=1$ in $(\mathbb{R}^3, <,>_1)$ determinare una base ortogonale del sottospazio

$S = <\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}>^{\perp}$

a)

segnatura $<\underline{u}, \underline{v}>_a = \underline{u}^t B_a \underline{v}$ forma bilineare simmetrica

↳ la segnatura di $<,>_a$ è la coppia (p,q) $p = \#$ autovalori >0 di B_a, $q = \#$ autovalori <0 di B_a

lo spettro di $B_a = \{1, 2-a, 2+a\}$

$1>0$

$2-a>0$ se $a<2$

$2+a>0$ se $a<-2$

		-2		2	
$2-a$	$+$		$+$		$-$
$2+a$	$-$		$+$		$+$

	segnature	
$a<-2$	$(2,1)$	$\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1 \end{pmatrix}$
$-2<a<2$	$(3,0)$	← prodotto scalare $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$
$a>2$	$(2,1)$	
$a=2$	$(2,0)$	casi degeneri $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1 \end{pmatrix}$
$a=-2$	$(2,0)$	$\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$

b) forma canonica $\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

• Autospazi di B_a $V_1 = <\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{u}_1}>$ $V_{2-a} = <\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\underline{u}_2}>$ $V_{2+a} = <\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{u}_3}>$

$<\underline{u}_1, \underline{u}_2>_a = \underline{u}_1^t B_a \underline{u}_2 = (2-a)\, \underline{u}_1^t \underline{u}_2 = 0$ perché ORTOGON.

similmente: $<\underline{u}_2, \underline{u}_3>_a = <\underline{u}_1, \underline{u}_3>_a = 0$

⇒ la matrice associata a $<,>_a$ rispetto a base di autovalori è diagonale

$<\underline{u}_1, u_1>_a = \underline{u}_1^t B_a \underline{u}_1 = u_1^t u_1 = 1$

$<u_2, u_2>_a = \underline{u}_2^t B_a \underline{u}_2 = (2-a)\underline{u}_2^t \underline{u}_2 = (2-a)\, \|u_2\|^2 = 2\cdot(2-a)$

(norma rispetto a prodotto standard.

$<\underline{u}_3, \underline{u}_3>_a = (2+a)2$

Normalizzo: $u_j' = \begin{cases} \dfrac{u_j}{\sqrt{|d_j|}\, \|u_j\|} & \text{se } d_j \neq 0 \\ u_j & \text{se } d_j = 0 \end{cases}$

rispetto a $\{u_1', u_2', u_3'\}$ la matrice associata a $<,>_a$ è in forma canonica, infatti:

$<\underline{u}_i', \underline{u}_i'>_a = (\underline{u}_i')^t B_a \underline{u}_i' = \dfrac{d_j}{|d_j|} = \pm 1$ è il segno di d_j.

se $d_j = 0$: $<\underline{u}_i', \underline{u}_i'>_a = 0$

$\underline{u}_1' = \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{u}_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2|2-a|}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2|2-a|}} \end{pmatrix}$ se $2-a \neq 0$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se $2-a=0$

rispetto $\{\underline{u}_1', \underline{u}_2', \underline{u}_3'\}$ $<,>_a$ ha forma canonica.

$\underline{u}_3' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2|2+a|}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2|2-a|}} \end{pmatrix}$ se $2+a \neq 0$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ se $2+a=0$

c) $S=\{ \underline{v} = \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} \mid \underline{v}^T B_1 \begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix} = 0 \}$ $\quad B_1 \begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2&0&1\\0&1&0\\1&0&2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\1\\1 \end{pmatrix}$

$S: \ v^T B_1 \begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix} = (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 2\\1\\1 \end{pmatrix} = 2x+y+z$

$S = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1\\0\\-2 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0\\1\\-1 \end{pmatrix}}_{u_2} \rangle$ base ortogonale? Applico Gram-Smith alla base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$.

$u_1' = u_1$

$u_2' = u_2 - \dfrac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\|u_1\|^2} \cdot u_1$ (Gram-Smith)

$\langle u_1, u_2 \rangle = u_1^T B_1 u_2$ il prodotto è definito usando la matrice B_1

$u_1^T B = (1\ 0\ -2) \begin{pmatrix} 2&0&1\\0&1&0\\1&0&2 \end{pmatrix} = (0, 0, -3)$

$\langle u_1, u_2 \rangle = (0,0,-3) \cdot \begin{pmatrix} 0\\1\\-1 \end{pmatrix} = 3$

$\|u_1\|^2 = u_1^T B u_1 = (0,0,-3) \begin{pmatrix} 1\\0\\-2 \end{pmatrix} = 6$

$u_2' = u_2 - \dfrac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix} 0\\1\\-1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1\\0\\2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2\\1\\0 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ base ortogonale: $\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2\\1\\0 \end{pmatrix} \right\}$

es 12.3: sia V uno spazio vettoriale di dim 4, con prodotto interno $\langle , \rangle$, e sia $U \subset V$ un suo sottospazio di dim 2. sia $\{u_1\ u_2\}$ una base ortonormale di U e $\{w_1, w_2\}$ una base ortogonale del complemento ortog. $U^\perp$.
si consideri $f \in End(V)$ t.c. $f(u_i) = w_i$ e $f(w_i) = u_i$ per $i = 1,2$

1) sotto quali condizioni f è un operatore simmetrico? e un'isometria
2) nei casi in cui f sia simmetrico, determinare una base ortonormale di V costituita da autovettori di f.

1) $V = U \oplus U^\perp$

$\{u_1, u_2\}$ base ortonormale di U
$\{w_1, w_2\}$ base ortogonale di $U^\perp$ $\Rightarrow \{u_1, u_2, w_1, w_2\}$ base ortogonale di V

siano $\alpha = \|w_1\| > 0$

$\beta = \|w_2\| > 0$ $\qquad B = \{u_1, u_2, \frac{1}{\alpha} w_1, \frac{1}{\beta} w_2\}$ base ortonormale di V (ho normalizzato)

$\leadsto$ calcolo matrice rappresentativa $M_B^B(f)$:

$f(u_1) = w_1 = \alpha \left(\frac{1}{\alpha} w_1\right)$ $\qquad f\left(\frac{1}{\alpha} w_1\right) = \frac{1}{\alpha} u_1$

$f(u_2) = w_2 = \beta \left(\frac{1}{\beta} w_2\right)$ $\qquad f\left(\frac{1}{\beta} w_2\right) = \frac{1}{\beta} u_2$

$\Rightarrow M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0&0&1/\alpha&0\\0&0&0&1/\beta\\ \alpha&0&0&0\\0&\beta&0&0 \end{pmatrix}$

f simmetrico $\Leftrightarrow M_B^B(f)$ simmetrica
$\Leftrightarrow \alpha = 1/\alpha,\ \beta = 1/\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta = 1 \Rightarrow (\alpha, \beta > 0)$ $\qquad M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix} = A$

f simmetrico $\Leftrightarrow \|w_1\| = \|w_2\| = 1$
f è isometria $\Leftrightarrow$ f manda base ortonormale in base ortonormale
$\Leftrightarrow \alpha = \beta = 1$

2) autovettori:

$P(t) = \begin{vmatrix} -t&0&1&0\\0&-t&0&1\\1&0&-t&0\\0&1&0&-t \end{vmatrix} = t^2(t^2-1) + \begin{vmatrix} 0&-t&1\\1&0&0\\0&1&-t \end{vmatrix} = t^2(t^2-1) - (t^2-1) = (t^2-1)^2 = (t-1)^2(t+1)^2$

$V_1: \langle \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1 \end{pmatrix} \rangle = \langle u_1 + w_1, u_2 + w_2 \rangle$ $\qquad V_{-1} = \langle \begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix} \rangle = \langle u_1 - w_1, u_2 - w_2 \rangle$

$\{\underbrace{u_1 + w_1}_{a_1'}, \underbrace{u_2 + w_2}_{a_2'}, \underbrace{u_1 - w_1}_{a_3'}, \underbrace{u_2 - w_2}_{a_4'}\}$ è base ortogonale, ma non ortonormale di autovettori.

$\|a_j'\| = \sqrt{2}$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{u}_1 + \underline{w}_1)$$
$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{u}_2 + \underline{w}_2)$$
$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{u}_1 - \underline{w}_1)$$
$$a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{u}_2 - \underline{w}_2)$$

è base o.n.

es 12.4: si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ con prodotto scalare standard (definito da $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u}^T \underline{v}$). Fissato un versore $\underline{u}$ si consideri la matrice $n \times n$ data da $A_{\underline{u}} = I_n - 2uu^T$ (dove I_n indica la matrice identità di ordine n e il suffisso T indica la trasposizione).

1) dimostrare che $A_{\underline{u}}$ è una matrice ortogonale (ossia che soddisfa $A_{\underline{u}}^T \cdot A_{\underline{u}} = I_n$)
2) verificare che $\underline{u}$ è un autovettore di $A_{\underline{u}}$ (riferito a quale autovalore?)
3) dimostrare che qualunque vettore $\underline{v}$ ortogonale a $\underline{u}$ è autovettore di $A_{\underline{u}}$
4) Nel caso $n=3$ e $\underline{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ trovare una base ortonormale di autovettori di $A_{\underline{u}'}$, dove $\underline{u}' = \frac{u}{\|u\|}$

- $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ versore se $\|u\| = 1$ cioè $\underline{u}^T \cdot \underline{u} = 1$
- $A_{\underline{u}} = I_n - 2\underline{u}\underline{u}^T$

oss = $\underline{u} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ $\quad \underline{u} \cdot \underline{u}^T = \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}(x_1 \dots x_n) = \begin{matrix} x_1^2 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \dots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & \dots & x_n^2 \end{matrix}$

le matrici ortogonali: $O(n) = \{A \in Mat_n(\mathbb{R}) \mid A^TA = I_n\}$ rappresentano le isometrie.

1) $A_{\underline{u}}$ è ortogonale? $A_{\underline{u}}^T \cdot A_{\underline{u}} = (I_n - 2\underline{u}\cdot\underline{u}^T)^T \cdot (I_n - 2\underline{u}\cdot\underline{u}^T) = (I_n - 2(\underline{u}\cdot\underline{u}^T)^T)(I_n - 2\underline{u}\cdot\underline{u}^T) =$
$= (I_n - 2\underline{u}\cdot\underline{u}^T)(I_n - 2\underline{u}\cdot\underline{u}^T) = I_n - 4\underline{u}\cdot\underline{u}^T + 4(\underline{u}\cdot\underline{u}^T)(\underline{u}\cdot\underline{u}^T) =$
$I_n - 4\underline{u}\cdot\underline{u}^T + 4\underline{u}(\underline{u}^T\cdot\underline{u})\underline{u}^T = I_n - 4\underline{u}\underline{u}^T + 4\underline{u}\underline{u}^T = I_n \Rightarrow A_{\underline{u}}$ è ortogonale

2) $\underline{u}$ è autovettore di $A_{\underline{u}}$?

$A_{\underline{u}} \cdot \underline{u} = (I_n - 2\underline{u}\cdot\underline{u}^T)\cdot\underline{u} = I_n\cdot\underline{u} - 2(\underline{u}\cdot\underline{u}^T)\cdot\underline{u} = \underline{u} - 2\underline{u}(\underline{u}^T\cdot\underline{u}) = \underline{u} - 2\underline{u} = -\underline{u}$ $\Rightarrow$ $\underline{u}$ è autovettore riferito all'autovalore $\lambda = -1$

3) $\underline{v}$ ortogonale a $\underline{u} \Rightarrow \underline{v}$ autovettore di $A_{\underline{u}}$ $\quad$. $\underline{v} \perp \underline{u}$ se $\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = 0$
$\underline{v}^T \cdot \underline{u} = 0$
(oppure $\underline{u}^T \cdot \underline{v} = 0$)

$A_{\underline{u}} \cdot \underline{v} = (I_n - 2\underline{u}\cdot\underline{u}^T)\cdot\underline{v} = \underline{v} - 2\underline{u}\cdot(\underline{u}^T\cdot\underline{v}) = \underline{v}$

$\Rightarrow$ $\underline{v}$ è autovettore riferito all'autovalore $\lambda = 1$

$A_{\underline{u}}$ è diagonalizzabile perché se $\{\underline{v}_1, \dots \underline{v}_{n-1}\}$ base di $\underline{u}^\perp$ allora $\{\underline{u}, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}\}$ è base di autovettori
se $w_1, \dots, v_{n-1}$ è base ortonormale di $\underline{u}^\perp$ anche $\{u, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ è base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

4) $n=3$, $\underline{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ trovare base ortonormale di autovettori di $A_{\underline{u}}$

$\|\underline{u}\| = \sqrt{11}$ $\quad \underline{u}' = \begin{pmatrix}1/\sqrt{11}\\1/\sqrt{11}\\3/\sqrt{11}\end{pmatrix} \rightsquigarrow A_{\underline{u}'}$

$V_{-1} = \langle \underline{u} \rangle$
$V_1 = \underline{u}^\perp$ dobbiamo trovare una base ortonormale di $\underline{u}^\perp$.

$\underline{u}^\perp = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{u}^T\underline{v} = 0\}$ $\quad \underline{v} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{u}^T\cdot\underline{v} = x + y + 3z$

$\underline{u}^\perp$: $x + y + 3z = 0$ $\rightsquigarrow$ usando $\underline{u}'$ $\left(\frac{1}{\sqrt{11}}x + \frac{1}{\sqrt{11}}y + \frac{3}{\sqrt{11}}z = 0\right)$

base di $\underline{u}^\perp$: $\left\{ \underset{x_1}{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}, \underset{x_2}{\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}} \right\}$ $\rightsquigarrow$ non è ortonormale $\Rightarrow$ USIAMO GRAN-SCHMIT:

$\underline{v}_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ $\quad x_2' = x_2 - \langle x_2, \underline{v}_1 \rangle \cdot \underline{v}_1$ $\quad \langle x_2, \underline{v}_1 \rangle = -3/\sqrt{2}$ $\quad x_2' = \begin{matrix}-3\\0\\1\end{matrix} + \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/2\\-3/2\\1\end{pmatrix}$

$\langle x_2', \underline{v}_1 \rangle = 0$

$\underline{v}_2 = \frac{x_2'}{\|x_2'\|} = \begin{pmatrix}\sqrt{2/11}\cdot 3/2\\-\sqrt{2/11}\cdot 3/2\\\sqrt{2/11}\end{pmatrix}$ $\quad \{\underline{u}', \underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base ortonormale di autovettori di $A_{\underline{u}}$