

GEOMETRIA 1

prima parte

Gilberto Bini - Cristina Turrini

2017/2018



- 1 Relazioni in un insieme
- 2 Gruppi, anelli, campi
- 3 Matrici
- 4 Risoluzione dei sistemi di equazioni lineari
- 5 Spazi vettoriali
- 6 Sottospazi
- 7 Sistemi di generatori
- 8 Dipendenza e indipendenza lineare
- 9 Basi
- 10 Teoria della base per spazi finitamente generati
- 11 Formula di Grassmann

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Navigation icons: back, forward, search, etc.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Una *relazione* R tra due insiemi A e B è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

Sia $R \subset A \times B$ una relazione. Se $(a, b) \in R$ si dice che a è *in relazione con* b (spesso si scrive aRb , invece di $(a, b) \in R$).

ESEMPLI:

- 1 $A = \{\text{punti del piano}\}$, $B = \{\text{rette del piano}\}$, $R = \{(a, b) | a \in b\}$; relazione di appartenenza;
- 2 $A = B = \{\text{rette del piano}\}$, $R = \{(a, b) | a \perp b\}$; relazione di perpendicolarità;
- 3 $A = B = \{\text{rette del piano}\}$, $R = \{(a, b) | a \parallel b\}$; relazione di parallelismo;
- 4 $A = B = \text{umanità}$, $R = \{(a, b) | a \text{ è genitore di } b\}$;
- 5 $A = B = \text{umanità}$, $R = \{(a, b) | a \text{ è fratello o sorella di } b\}$ (da parte di almeno un genitore);
- 6 $A = B = \text{umanità}$, $R = \{(a, b) | a \text{ ha almeno un genitore in comune con } b\}$;

Una relazione tra A e A viene anche detta *relazione in A* .

Sia $R \subset A \times A$ una relazione in A .

Si dice che R è una *relazione di equivalenza* in A se verifica

- i) $aRa, \forall a \in A$ (proprietà riflessiva);
- ii) $aRb \Leftrightarrow bRa, \forall a, b \in A$ (proprietà simmetrica);
- iii) $aRb, bRc \Rightarrow aRc, \forall a, b, c \in A$ (proprietà transitiva);

Gli esempi 2, 3, 4, 5 visti sopra sono di equivalenza? Di quali proprietà tra i), ii), iii) godono?

Se R è una relazione di equivalenza in A , l'insieme $[a]_R = \{b \in A \mid bRa\}$ si dice *classe di equivalenza* individuata da a .

Si ha: $[a]_R = [b]_R \Leftrightarrow aRb$.

Le classi di equivalenza individuano una *partizione* di A (ogni elemento di A appartiene a una e una sola classe di equivalenza; le classi di equivalenza sono sottoinsiemi a due a due disgiunti la cui unione è A). (Verificarlo)

L'insieme delle classi di equivalenza

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

viene detto *insieme quoziente* di A modulo R .

Ad esempio, nell'insieme A delle bottiglie di vino, con la relazione (di equivalenza) aRb se e solo se a e b sono dello stesso anno di produzione, le classi di equivalenza sono le annate.

Ad esempio, nel caso delle rette del piano con la relazione di parallelismo (con la convenzione $a \parallel a$ che la rende relazione di equivalenza) le classi di equivalenza sono le *direzioni*.



Ad esempio, in $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ con la relazione (di equivalenza) $(h, k)R(m, n)$ se e solo se $hn = km$ le classi di equivalenza sono i numeri razionali. L'insieme quoziente è l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali:

$$\frac{p}{q} = [(p, q)].$$

$$\frac{3}{5} = [(3, 5)] = [(21, 35)] = \frac{21}{35}.$$

OSSERVAZIONE - Le tre proprietà *i*), *ii*), *iii*) della relazione di equivalenza sono indipendenti.

Cioè esistono esempi di relazioni che soddisfano *i*) + *ii*), ma non *iii*),

ovvero *i*) + *iii*), ma non *ii*),

o ancora *ii*) + *iii*), ma non *i*). (Verificarlo)



La relazione di congruenza modulo n

Sia $A = \mathbb{Z} = \{ \text{numeri interi relativi} \}$ e $n > 0$ un intero positivo.

Si dice che $a, b \in \mathbb{Z}$ sono *congrui modulo n* , e si scrive

$$a \sim b \pmod{n}$$

se $a - b$ è multiplo di n .

Ad esempio $-2 \sim 14 \pmod{4}$ perché $-2 - 14 = -16 = -4 \cdot 4$.

La congruenza modulo n è una relazione di equivalenza. L'insieme quoziente di \mathbb{Z} modulo questa relazione viene detto *insieme delle classi di resto modulo n* e denotato con \mathbb{Z}_n .

Ad esempio \mathbb{Z}_2 ha due elementi:

$$[0]_{\sim} = \{ \dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots \} = \{ \text{pari} \},$$

$$[1]_{\sim} = \{ \dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots \} = \{ \text{dispari} \}.$$

Ad esempio, in \mathbb{Z}_2 , $[4]_{\sim} = [-12]_{\sim} = [0]_{\sim}$.



Ad esempio \mathbb{Z}_3 ha tre elementi:

$$[0]_{\sim} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\},$$

$$[1]_{\sim} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\},$$

$$[2]_{\sim} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}.$$

$$\begin{aligned} [0]_{\sim} &= [3]_{\sim} = [6]_{\sim} \dots = [-3]_{\sim} \dots, & [1]_{\sim} &= [4]_{\sim} = [7]_{\sim} \dots, \\ [2]_{\sim} &= [5]_{\sim} = [8]_{\sim} \dots \end{aligned}$$



- 1 Relazioni in un insieme
- 2 Gruppi, anelli, campi**
- 3 Matrici
- 4 Risoluzione dei sistemi di equazioni lineari
- 5 Spazi vettoriali
- 6 Sottospazi
- 7 Sistemi di generatori
- 8 Dipendenza e indipendenza lineare
- 9 Basi
- 10 Teoria della base per spazi finitamente generati
- 11 Formula di Grassmann

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Ricordo che un'operazione in un insieme A è un'applicazione

$$* : A \times A \rightarrow A, \quad (a, b) \mapsto a * b$$

Ad esempio la somma $+$ è un'operazione nell'insieme $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dei numeri naturali, la differenza $-$ è un'operazione nell'insieme \mathbb{Z} , ma non in \mathbb{N} .

Il prodotto \cdot è un'operazione in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, la divisione $:$ è un'operazione in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, ma non in \mathbb{N} o \mathbb{Z} (N. B.: abbiamo ricordato prima che \mathbb{Q} è un insieme di classi di equivalenza; va notato che le operazioni in \mathbb{Q} sono *ben definite*, ossia, ad esempio, se $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ allora $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$).

L'intersezione \cap e l'unione \cup sono operazioni nell'insieme $P(A)$ delle parti di un insieme A .

Le operazioni $+, \cdot$ in \mathbb{Z} sono compatibili con la relazione di congruenza modulo n , ovvero,

$$\text{se } a \sim b \pmod{n} \text{ e } a' \sim b' \pmod{n} \quad \text{allora} \\ a + a' \sim b + b' \pmod{n} \quad \text{e} \quad a \cdot a' \sim b \cdot b' \pmod{n}.$$

Sono allora ben definite le operazioni

$$+ : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \quad ([a], [b]) \mapsto [a + b]$$

$$\cdot : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \quad ([a], [b]) \mapsto [a \cdot b]$$

Tavole di composizione di $+$ e \cdot in \mathbb{Z}_5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

\cdot	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1



Un gruppo $(G, *)$ è un insieme G dotato di una operazione $*$ t.c.

- 1) $(x * y) * z = x * (y * z), \quad \forall x, y, z \in G$ ($*$ è associativa)
- 2) $\exists e \in G$ t.c. $e * x = x * e = x, \quad \forall x \in G$ (\exists elemento neutro e)
- 3) $\forall x \in G, \quad \exists x^{-1} \in G$ t.c. $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ (ogni x ammette inverso)

Un gruppo si dice *abeliano* se verifica anche

- 4) $x * y = y * x, \quad \forall x, y \in G$ ($*$ è commutativa)

ESEMPI:

- $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo abeliano in cui l'elemento neutro è 0 e l'inverso di n è $-n$. Anche $(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Z}_n, +), \forall n$ sono gruppi (abeliani) (verificarlo).
- $(\mathbb{Z}, \cdot), (\mathbb{Q}, \cdot), (\mathbb{Z}_4, \cdot)$ non sono gruppi. Perché?

Posto $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$, si ha

- (\mathbb{Q}^*, \cdot) è un gruppo abeliano in cui l'elemento neutro è 1 e l'inverso di $\frac{p}{q}$ è $\frac{q}{p}$.
- Anche (\mathbb{Z}_3^*, \cdot) è un gruppo (verificarlo).
- (\mathbb{Z}_4^*, \cdot) no. Perché?

Proprietà elementari dei gruppi:

- in un gruppo l'elemento neutro è unico;
- in un gruppo ogni elemento ha un unico inverso;
- legge di cancellazione ($a * b = a * c \Rightarrow b = c$, $a * b = c * b \Rightarrow a = c$);
- $\forall a, b \in G$ l'equazione $a * x = b$ ha una ed una sola soluzione (idem per $x * a = b$)
- $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}, \forall a, b \in G$;
- $(a^{-1})^{-1} = a, \forall a \in G$;
- posto $a^0 = e, a^1 = a, a^m = a * a * a \cdots * a$ (m volte) e $a^{-m} = a^{-1} * a^{-1} * a^{-1} \cdots * a^{-1}$ (m volte),

si ha

$$a^m * a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{m*n}.$$



Sia $J_3 = \{1, 2, 3\}$.

Una *permutazione* su tre elementi è un'applicazione biunivoca

$$\sigma : J_3 \rightarrow J_3.$$

Le permutazioni su tre elementi sono 6:

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'insieme S_3 delle permutazioni su tre elementi, con l'operazione di composizione \circ , è un gruppo (non abeliano).

Ad esempio si ha $\alpha \circ \gamma = \delta$, $\gamma \circ \alpha = \epsilon$.

S_3 viene detto *gruppo simmetrico* su tre elementi.

In modo analogo si introduce il *gruppo simmetrico* S_n i cui elementi sono le permutazioni (applicazioni biunivoche) di $J_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ in sè, con l'operazione di composizione.

Quanti sono gli elementi di S_n ?

Un *anello* $(A, +, \cdot)$ è un insieme A dotato di due operazioni, denotate con $+$, \cdot t.c.

- 1) $(A, +)$ sia un gruppo abeliano (elemento neutro denotato con 0_A e inverso di a denotato con $-a$);
- 2) \cdot è associativo ed è dotato di elemento neutro (denotato con 1_A);
- 3) valgono le proprietà distributive:
 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, $\forall a, b, c \in A$.

Ad esempio $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot) \forall n$ sono anelli.

Anche $\mathbb{Q}[x]$, insieme dei polinomi in una variabile a coefficienti in razionali (e analogamente $\mathbb{R}[x]$, insieme dei polinomi in una variabile a coefficienti in reali) è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi.

Un anello si dice *commutativo* se l'operazione di prodotto nell'anello è commutativa.

In un anello $(A, +, \cdot)$ un elemento $a \in A$, $a \neq 0$ si dice *divisore dello zero* se esiste un $b \in A$, $b \neq 0$ tale che sia $a \cdot b = 0$, oppure $b \cdot a = 0$.

Ad esempio, in $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, $[2]$, $[3]$ e $[4]$ sono divisori dello zero.

Ad esempio invece, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ sono privi di divisori dello zero.



Un anello $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ si dice *campo* se $(\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano.

Ad esempio $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sono campi, $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ sono campi.

Anche l'insieme \mathbb{C} dei numeri complessi, con le usuali operazioni di somma e prodotto, è un campo.

Invece, ad esempio $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}[x], +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ non lo sono.

Osservazione: Un campo è privo di divisori dello zero (verificarlo).

Riassumendo, quindi, un *campo* è un insieme \mathbb{K} dotato di due operazioni

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

e

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

tali che

A) $(\mathbb{K}, +)$ è un *gruppo abeliano*, con elemento neutro $0_{\mathbb{K}}$ cioè

a1 $+$ è associativa $[(a + b) + c = a + (b + c)]$,

a2 $+$ è dotata di elemento neutro $0_{\mathbb{K}}$ $[a + 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} + a = a]$,

a3 ogni $a \in \mathbb{K}$ ammette inverso $-a$ rispetto a $+$

$$[a + (-a) = (-a) + a = 0_{\mathbb{K}}],$$

a4 $+$ è commutativa $[a + b = b + a]$

B) (\mathbb{K}^*, \cdot) è gruppo abeliano, con elemento neutro $1_{\mathbb{K}}$

b1 \cdot è associativa $[(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)]$,

b2 \cdot è dotata di elemento neutro $1_{\mathbb{K}}$ $[a \cdot 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} \cdot a = a]$,

b3 ogni $a \in \mathbb{K}^*$ ammette inverso a^{-1} rispetto a \cdot $[a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_{\mathbb{K}}]$,

b4 \cdot è commutativa $[a \cdot b = b \cdot a]$,

C) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$\forall a, b, c \in \mathbb{K}$.



- 1 Relazioni in un insieme
- 2 Gruppi, anelli, campi
- 3 Matrici**
- 4 Risoluzione dei sistemi di equazioni lineari
- 5 Spazi vettoriali
- 6 Sottospazi
- 7 Sistemi di generatori
- 8 Dipendenza e indipendenza lineare
- 9 Basi
- 10 Teoria della base per spazi finitamente generati
- 11 Formula di Grassmann

Navigation icons: back, forward, search, etc.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Somma di matrici

Sia \mathbb{K} un campo. Denotiamo con $Mat_{m,n} = Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ l'insieme delle *matrici* $m \times n$ a coefficienti di \mathbb{K} , ossia delle tabelle a due entrate con m righe e n colonne

$$A \in Mat_{m,n} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ con } a_{ij} \in \mathbb{K}$$

$i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$

In $Mat_{m,n}$ si può introdurre un'operazione di somma

$$+ : Mat_{m,n} \times Mat_{m,n} \rightarrow Mat_{m,n}$$

così:

$$(A, B) \mapsto C \quad A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), \quad C = (a_{ij} + b_{ij})$$

$(Mat_{m,n}, +)$ è un gruppo abeliano il cui l'elemento neutro è la matrice 0 con tutte le entrate nulle, e in cui $-(a_{ij}) = (-a_{ij})$.



In $Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ si può anche introdurre una legge di composizione (che non è un'operazione interna) di prodotto di un elemento λ di \mathbb{K} (che verrà detto *scalare*) per una matrice

$$\cdot : \mathbb{K} \times Mat_{m,n} \rightarrow Mat_{m,n}$$

così:

$$(\lambda, A) \mapsto B = \lambda \cdot A \quad A = (a_{ij}), \quad B = (\lambda a_{ij})$$

Vedremo dopo che questo prodotto, insieme all'operazione di somma, darà a $Mat_{m,n}$ la struttura di *spazio vettoriale*.

Prodotto righe per colonne di matrici

Date due matrici $A = (a_{ij})$ ad m righe e n colonne e $B = (b_{hk})$ ad n righe e p colonne (tali cioè che il numero delle colonne di A sia uguale al numero delle righe di B) si può definire una matrice $C = A \cdot B$ con m righe e p colonne, detta *prodotto righe per colonne* di A per B : la matrice C ha come elemento della riga r e colonna s lo scalare $c_{rs} = a_{r1}b_{1s} + a_{r2}b_{2s} + \dots + a_{rn}b_{ns}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1s} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & b_{2s} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{ns} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, si ha

$$\begin{pmatrix} 2+0+0 & 0+0+0 & 1+0+2 & 0+0+0 \\ -2+15+0 & 0+3+0 & -1-9+0 & 0+3+0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 13 & 3 & -10 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il prodotto appena introdotto è un'applicazione

$$+ : Mat_{m,n} \times Mat_{n,p} \rightarrow Mat_{m,p}.$$

Nel caso $m = n = p$ si tratta di un'operazione interna in $Mat_{m,m}$.

OSSERVAZIONE - Anche quando esiste sia $A \cdot B$ che $B \cdot A$ in generale vale $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Nel caso $m = n$, ossia di matrici *quadrate*, scriveremo talora Mat_m in luogo di $Mat_{m,m}$.



In quanto segue, scrivendo $A \cdot B$, ammetteremo implicitamente l'ipotesi che il numero di colonne di A sia uguale al numero di righe di B e scrivendo $M + N$, ammetteremo implicitamente l'ipotesi che M ed N abbiano lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne.

Siano A, B, C matrici a coefficienti in \mathbb{K} . Si ha:

- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
- se λ è uno scalare $\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)$;
- denotata con I_k la *matrice identica* $I_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ si ha

$$A \cdot I_n = A, I_m \cdot A = A;$$

Mat_m con le operazioni di somma e di prodotto riga per colonna è un anello (non commutativo, cioè con prodotto non commutativo).



Matrice trasposta

Data una matrice $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m,n}$ si può costruire la matrice ${}^tA \in \text{Mat}_{n,m}$, detta *matrice trasposta* di A , le cui righe sono le colonne di A , ovvero ${}^tA = (b_{hk})$ con $b_{hk} = a_{kh}$.

Proprietà della trasposizione:

- ${}^t({}^tA) = A$;
- ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.

Una matrice (quadrata) $A \in \text{Mat}_n$ tale che ${}^tA = A$ viene detta *simmetrica*.

Una matrice (quadrata) $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_n$ tale che, se $i \neq j$ allora $a_{ij} = 0$, viene detta *diagonale* (in A tutti gli elementi fuori dalla "diagonale" sono nulli).

Una matrice diagonale è ovviamente simmetrica.

Una matrice (quadrata) $A \in \text{Mat}_n$ tale che ${}^tA = -A$ viene detta *emisimmetrica*.



Una matrice (quadrata) $A \in Mat_n$ viene detta *invertibile* se esiste una matrice $A^{-1} \in Mat_n$, detta *inversa* di A , tale che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Denotiamo con $GL(n, \mathbb{K})$ l'insieme delle matrici di Mat_n invertibili. Il prodotto di matrici è un'operazione interna in $GL(n, \mathbb{K})$

$$\cdot : GL(n, \mathbb{K}) \times GL(n, \mathbb{K}) \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$$

$$((A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1})$$

$GL(n, \mathbb{K})$ è un gruppo (detto *gruppo lineare generale*) rispetto alla operazione di prodotto di matrici, con elemento neutro I_n .

Il gruppo $GL(n, \mathbb{K})$ non è abeliano.

- 1 Relazioni in un insieme
- 2 Gruppi, anelli, campi
- 3 Matrici
- 4 Risoluzione dei sistemi di equazioni lineari**
- 5 Spazi vettoriali
- 6 Sottospazi
- 7 Sistemi di generatori
- 8 Dipendenza e indipendenza lineare
- 9 Basi
- 10 Teoria della base per spazi finitamente generati
- 11 Formula di Grassmann



www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it

Sistema lineare, matrice dei coefficienti e matrice completa

Consideriamo un sistema di m equazioni lineari (a coefficienti in \mathbb{K}) nelle n incognite x_1, x_2, \dots, x_n ($a_{ij}, b_h \in \mathbb{K}$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Si può estrarre la *matrice completa* del sistema:

$$[A|\mathbf{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

ottenuta accostando la matrice A dei coefficienti del sistema e la colonna \mathbf{b} dei termini noti ove

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Utilizzando la notazione del prodotto riga per colonna il sistema può anche essere scritto come

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

ove A è la matrice dei coefficienti del sistema, \mathbf{b} è la colonna dei termini noti e

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ è il vettore colonna delle incognite.

Una soluzione del sistema è una n -upla di elementi di \mathbb{K} $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ tali che

$$\begin{cases} a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + \dots + a_{1n}\bar{x}_n = b_1 \\ a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + \dots + a_{2n}\bar{x}_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}\bar{x}_1 + a_{m2}\bar{x}_2 + \dots + a_{mn}\bar{x}_n = b_m \end{cases}$$

Un sistema lineare si dice *impossibile* se non ammette alcuna soluzione, *determinato* se ammette una ed una sola soluzione, *indeterminato* se ha più di una soluzione (ed in tal caso, se \mathbb{K} è infinito, ne ha infinite).



Il metodo di Gauss per la risoluzione di un sistema lineare

STRATEGIA:

passare dalla matrice $[A|\mathbf{b}]$ ad un'altra matrice $[A'|\mathbf{b}']$ che rappresenti un sistema *equivalente* (cioè che ammette le stesse soluzioni), ma molto più semplice da risolversi.

OPERAZIONI SULLE RIGHE (lecite, ovvero che fanno passare da un sistema ad un altro equivalente):

- 1 scambiare due righe tra loro;
- 2 moltiplicare una riga per una costante diversa da zero;
- 3 sommare ad una riga il multiplo di un'altra.

N.B. Le operazioni vanno fatte sulla matrice completa $[A|\mathbf{b}]$, non solo sulla matrice A dei coefficienti.

ESEMPIO 1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right)$$

corrisponde al sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y + 3z + w = 0 \\ z - 3w = 4 \end{cases}$$

dall'ultima equazione si ricava $z = 3w + 4$, che si può sostituire nella seconda trovando $y = -3z - w = -3(3w + 4) - w = -10w - 12$, e alla fine, sostituendo la z e la y nella prima si ricava anche $x = -2y + z + 2 = -2(-10w - 12) + (3w + 4) + 2 = 23w + 30$. Quindi le soluzioni del sistema sono della forma $(x, y, z, w) = (23w + 30, -10w - 12, 3w + 4, w)$.

Si sono trovate infinite soluzioni quindi il sistema è indeterminato.

ESEMPIO 2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

corrisponde al sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y + 3z + w = 0 \\ 0 = 4 \end{cases}$$

che è evidentemente impossibile.

Si noti che negli esempi 1 e 2 le matrici sono *a gradini* con un 1 come coefficiente dell'incognita di ogni "gradino".



SCOPO DEL METODO:

Ridurre la matrice $[A|\mathbf{b}]$ in una *forma a gradini* del tipo:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & * & * & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & * \end{array} \right)$$

in cui in ogni riga compaiono meno incognite della riga precedente.

STRUMENTO UTILIZZATO: le operazioni lecite sulle righe viste sopra.

Si tratta di un *algoritmo*: dopo un numero finito di passi si ottiene una matrice dalla quale risulta evidente se il sistema ammette soluzioni oppure no e che, in caso affermativo, permette di trovare le soluzioni ricavando via via le incognite a partire dall'ultima equazione e procedendo a ritroso.



Illustrazione del metodo

Come "creare" i gradini?

Salvo effettuare scambi di righe, si parte da una matrice in cui la prima incognita compaia nella prima equazione. Moltiplicando la prima riga per una costante si ottiene una matrice in cui il primo elemento della prima riga è 1

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ b & a_{32} & \dots & a_{3n} & | & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 - aR_1 \\ R_3 - bR_1, \dots, \dots \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & | & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & \dots & a'_{3n} & | & b'_3 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & | & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & | & \dots \end{pmatrix}$$

A questo punto nel sistema dalla seconda equazione in poi non compare più la prima incognita, quindi compaiono al più $n - 1$ incognite. Su questo sistema con una equazione in meno e con meno incognite si opera analogamente a quanto visto sopra.

Se nel corso della procedura, una riga della matrice si annulla interamente (cioè diventa $(0 \ 0 \ 0 \ \dots \ | \ 0)$), tale riga può essere cancellata (corrisponde all'equazione $0 = 0$).

Se nel corso della procedura, una riga della matrice si annulla in tutte le entrate salvo che nell'ultima (cioè diventa $(0 \ 0 \ 0 \ \dots \ | \ k)$, $k \neq 0$), il sistema è impossibile (tale riga infatti corrisponde all'equazione $0 = k$).

Alla fine della procedura la matrice è ridotta a gradini, e il sistema, se risolubile, può essere risolto a partire dall'ultima equazione a ritroso.



ESEMPIO A

$$\begin{cases} 2x - 2y + 4z = 0 \\ x + 2z = 2 \\ z = -1 \\ 3x - 3y = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{(1/2)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 - R_1 \\ R_4 - 3R_1 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 + 6R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow (x, y, z) = (4, 2, -1)$$

Si è trovata una ed una sola soluzione, quindi il sistema è determinato.

ESEMPIO B

$$\begin{cases} -3x + y = 4 \\ +x - 2y = 3 \\ -x - 3y = 8 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 8 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \sim R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 + 3R_1 \\ R_3 + R_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 13 \\ 0 & -5 & 11 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{(-1/5)R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -13/5 \\ 0 & -5 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + 5R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -13/5 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \rightarrow$$

Il sistema quindi è impossibile.

ESEMPIO C

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y = 1 \\ -3x - 4y + z = -2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{R_2-2R_1 \\ R_3+3R_1}]{(1/5)R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -10 & 4 & -2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 1/5 \\ 0 & -10 & 4 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4+10R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{-z+2}{5}, \frac{2z+1}{5}, z \right)$$

Il sistema è indeterminato



Se un sistema è indeterminato e le sue soluzioni dipendono da s parametri, si dice che *il sistema ha* ∞^s *soluzioni*.

Se invece il sistema è determinato, si dice anche che ha ∞^0 soluzioni.

Ad esempio, il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

ha le infinite soluzioni $(x, y, z) = (h, k, -h - k)$, al variare dei parametri h e k .

Pertanto si tratta di un sistema indeterminato che ha ∞^2 soluzioni.

Invece il sistema dell'esempio C ha ∞^1 soluzioni.



Il procedimento di riduzione a gradini che si è applicato alla matrice completa di un sistema lineare per ridurla a forma "semplice", può essere applicato ad una qualsiasi matrice. Il numero delle righe non nulle che si ottengono alla fine del procedimento viene detto *caratteristica* della matrice (si dimostra che tale numero non dipende dalle operazioni che si sono fatte per ridurre a gradini la matrice).

TEOREMA (di Rouché Capelli) - Il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha soluzioni se e solo se la caratteristica della matrice dei coefficienti A coincide con la caratteristica della matrice completa $[A|\mathbf{b}]$. Inoltre, se il sistema è risolubile, le soluzioni del sistema sono ∞^{n-r} , ove n è il numero delle incognite e r è la caratteristica di A (e di $[A|\mathbf{b}]$).

Ad esempio nel sistema dell'esempio 2

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y + 3z + w = 0 \\ 0 = 4 \end{cases}$$

la matrice dei coefficienti ha caratteristica 2, mentre la matrice completa ha caratteristica 3, e il sistema è impossibile.

Invece, nel caso del sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y + 3z + w = 0 \\ z - 3w = 4 \end{cases}$, tanto la matrice dei coefficienti quanto la matrice completa hanno caratteristica 3. Il sistema è risolubile ed ha $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni.



Un sistema lineare $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$, con $\underline{b} = \underline{0}$, è detto *omogeneo*.

OSSERVAZIONE - Si consideri il sistema lineare

$$(*) \quad A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

e il sistema omogeneo associato

$$(**) \quad A \cdot \underline{x} = \underline{0}.$$

Se è nota una soluzione \underline{x}_0 del sistema (*), tutte e sole le soluzioni di (*) possono essere ottenute sommando a \underline{x}_0 le soluzioni di (**). (verificarlo)



- 1 Relazioni in un insieme
- 2 Gruppi, anelli, campi
- 3 Matrici
- 4 Risoluzione dei sistemi di equazioni lineari
- 5 Spazi vettoriali**
- 6 Sottospazi
- 7 Sistemi di generatori
- 8 Dipendenza e indipendenza lineare
- 9 Basi
- 10 Teoria della base per spazi finitamente generati
- 11 Formula di Grassmann

Navigation icons: back, forward, search, etc.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Definizione di spazio vettoriale

Siano \mathbb{K} un campo, V un insieme non vuoto. Si dice che V è uno *spazio vettoriale* sul campo \mathbb{K} se V è dotato di due leggi di composizione

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$$

tali che

A) $(V, +)$ è gruppo abeliano;

B) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \underline{u}, \underline{v} \in V$:

b1) $(\lambda + \mu) \cdot \underline{u} = \lambda \cdot \underline{u} + \mu \cdot \underline{u}$;

b2) $(\lambda \cdot \mu) \cdot \underline{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{u})$;

b3) $\lambda \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = \lambda \cdot \underline{u} + \lambda \cdot \underline{v}$;

b4) $1_{\mathbb{K}} \cdot \underline{u} = \underline{u}$.

Gli elementi di \mathbb{K} si dicono *scalari*; gli elementi di V si dicono *vettori*.

Nel seguito, denotiamo con 0 l'elemento neutro di \mathbb{K} , con $\underline{0}$ l'elemento neutro di V , e con $-\underline{v}$ il vettore opposto di \underline{v} .

Dati $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ e $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$, il vettore

$$\underline{v} = \lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n$$

viene detto *combinazione lineare* dei vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ secondo gli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.



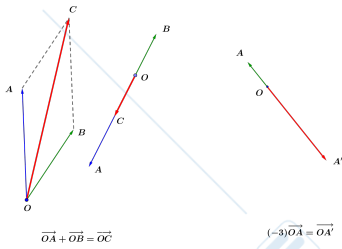
Esempi di spazi vettoriali

E1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \text{Vect}_O(\mathbb{E}^3) = \{\text{vettori dello spazio euclideo } \mathbb{E}^3 \text{ applicati nell'origine}\}$, rispetto alla usuale somma di vettori (regola del parallelogramma)

$\vec{0} = \vec{OO}$, $-\vec{OA} = \vec{OB}$ vettore di egual modulo, stessa retta di applicazione e verso opposto

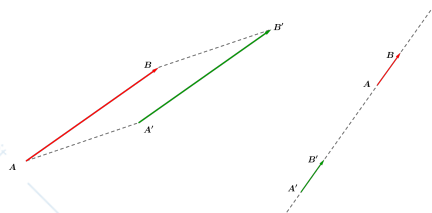
$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V \quad (\lambda, \vec{OA}) \mapsto \lambda \vec{OA}$ ove $\lambda \cdot \vec{OA} =$

$$\begin{cases} \vec{OO} & \text{se } \lambda = 0 \\ \vec{OA'} & |\vec{OA'}| = |\lambda| |\vec{OA}|, \text{ stessa retta, verso } \begin{cases} \text{stesso} & \text{se } \lambda > 0 \\ \text{opposto} & \text{se } \lambda < 0 \end{cases} \end{cases}$$



$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC} \quad (-3)\vec{OA} = \vec{OA'}$$

E1') $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, V spazio dei *vettori liberi* ossia delle classi di equivalenza di vettori applicati, ove la relazione di equivalenza è la usuale *equipollenza* di vettori. Le operazioni di somma e di moltiplicazione per uno scalare introdotte nell'esempio E1) passano al quoziente (dipendono solo dalle classi di equipollenza, non dai rappresentanti delle classi).



E2) $\forall \mathbb{K}$ possiamo considerare $V = \{0\}$, detto spazio vettoriale *nullo* o *banale*.

E3) $\forall \mathbb{K}$ possiamo considerare $V = \mathbb{K}$
 $+$: $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ somma in \mathbb{K}
 \cdot : $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ prodotto in \mathbb{K}

E4) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Applicando quanto visto in E3, possiamo prendere $V = \mathbb{C}$. \mathbb{C} è uno spazio vettoriale su se stesso.

\mathbb{C} è anche uno spazio vettoriale su \mathbb{R} :

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = \mathbb{C}$

$+$: $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ usuale somma di numeri complessi

\cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (\lambda, a + ib) \mapsto \lambda a + i\lambda b$



E5) \mathbb{K} qualsiasi, $V = \mathbb{K}^n =$ spazio vettoriale delle n -uple di elementi di \mathbb{K}

$$\underline{v} \in \mathbb{K}^n \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad x_i \in \mathbb{K} \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n \quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n \quad \left(\lambda, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$$

E6) \mathbb{K} qualsiasi, $V = \text{Mat}_{m,n} = \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ = insieme delle matrici $m \times n$ a coefficienti di \mathbb{K}

$$\underline{v} \in \text{Mat}_{m,n} \quad \underline{v} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} \in \mathbb{K} \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

$$+ : \text{Mat}_{m,n} \times \text{Mat}_{m,n} \rightarrow \text{Mat}_{m,n}$$

$$(A, B) \mapsto C = A + B \quad A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \text{Mat}_{m,n} \rightarrow \text{Mat}_{m,n}$$

$$(\lambda, A) \mapsto B = \lambda A \quad A = (a_{ij}), B = (\lambda a_{ij})$$

$$\underline{0} = \text{matrice nulla} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij}) \quad -A = (-a_{ij}) \text{ matrice opposta}$$



E7) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $V = \mathbb{K}[x]$ = insieme dei polinomi in una variabile a coefficienti in \mathbb{K}
 $v \in V \quad v = p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$
 $+$: $\mathbb{K}[x] \times \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}[x]$ $p(x) + q(x)$ usuale somma di polinomi
 \cdot : $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}[x]$ $\lambda \in \mathbb{K}$ $\lambda p(x)$ usuale prodotto di un numero per un polinomio.

E8) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $V = \mathbb{K}_d[x] = \{ \text{polinomi in una variabile a coefficienti in } \mathbb{K} \text{ di grado } \leq d \}$
 (con le operazioni viste al punto precedente)

E9) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \}$
 $+$: $V \times V \rightarrow V$ $(f, g) \mapsto f + g$ $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
 \cdot : $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ $(\lambda, f) \mapsto \lambda f$ $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$
 (definizioni puntuali di somma e di prodotto per uno scalare)

Proprietà:

- 1) tutte le proprietà dei gruppi abeliani per $(V, +)$
 - unicità di $\underline{0}$
 - unicità dell'opposto di \underline{v}
 - legge di cancellazione ($\underline{v} + \underline{u} = \underline{w} + \underline{u} \Rightarrow \underline{v} = \underline{w}$)
- 2) $\underline{0} \cdot \underline{v} = \underline{0} \quad \forall \underline{v} \in V$
- 3) $\underline{0} \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda \cdot \underline{0} = \underline{0} \in V$
- 4) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \underline{v} \in V \quad (-\lambda) \cdot \underline{v} = -(\lambda \cdot \underline{v})$
- 5) $\lambda \cdot \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \lambda = 0$ oppure $\underline{v} = \underline{0}$

- 1 Relazioni in un insieme
- 2 Gruppi, anelli, campi
- 3 Matrici
- 4 Risoluzione dei sistemi di equazioni lineari
- 5 Spazi vettoriali
- 6 Sottospazi**
- 7 Sistemi di generatori
- 8 Dipendenza e indipendenza lineare
- 9 Basi
- 10 Teoria della base per spazi finitamente generati
- 11 Formula di Grassmann

Navigation icons: back, forward, search, etc.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Definizione di sottospazio

Siano \mathbb{K} un campo, V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} , $U \subseteq V$. Si dice che U è un *sottospazio* di V se U soddisfa le seguenti condizioni:

- se $\underline{v}, \underline{w} \in U$ allora $\underline{v} + \underline{w} \in U$ (chiusura di U rispetto a $+$)
- se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\underline{v} \in U$, allora $\lambda \cdot \underline{v} \in U$ (chiusura di U rispetto a \cdot)
- $\underline{0} \in U$.

In tal caso U è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} rispetto alle restrizioni a U delle operazioni di V , cioè

$$+|_{U \times U} : U \times U \rightarrow U \quad \cdot|_{\mathbb{K} \times U} : \mathbb{K} \times U \rightarrow U.$$

OSSERVAZIONE - Sia $U \subseteq V$ un sottoinsieme $\neq \emptyset$. U è sottospazio di V se e solo se U è chiuso rispetto alle combinazioni lineari, ovvero se e solo se

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \underline{u}, \underline{w} \in U \text{ si ha } \lambda \underline{u} + \mu \underline{w} \in U.$$



- $\forall V$, i sottoinsiemi $\{\underline{0}\}$ e V sono sottospazi (sottospazi *banali*).
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \text{Vect}_O(\mathbb{E}^3)$. Fissiamo un piano π e una retta r , con $O \in r \subset \pi$,
 $U = \text{Vect}_O(\pi) = \{\overrightarrow{OA} \in V \mid A \in \pi\}$ è un sottospazio di V .
 $W = \text{Vect}_O(r) = \{\overrightarrow{OA} \in V \mid A \in r\}$ è un sottospazio di U .
 $\text{Vect}_O(r)$ è sottospazio di $\text{Vect}_O(\pi)$ che è sottospazio di $\text{Vect}_O(\mathbb{E}^3)$.
- $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, o \mathbb{R} , o \mathbb{C} , $V = \mathbb{K}[x]$ (polinomi), $U = \mathbb{K}_d[x]$ (polinomi di grado $\leq d$).
 $\overline{U} \subseteq V$ è un sottospazio.
- L'insieme S delle soluzioni del sistema lineare $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$
 $S = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{b}\}$ è un sottospazio di \mathbb{R}^n se e solo se $\underline{b} = \underline{0}$, cioè se e solo se il sistema è omogeneo.

Siano V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} , e siano $U, W \subseteq V$ sottospazi.

OSSERVAZIONI

- $U \cap W = \{v \in V \mid v \in U \text{ e } v \in W\}$ è un sottospazio
- $U \cup W = \{v \in V \mid v \in U \text{ o } v \in W\}$ in generale non è un sottospazio di V (si pensi ad esempio a $V = \text{Vect}_O(\mathbb{E}^3)$ con i sottospazi $U = \text{Vect}_O(r)$ e $W = \text{Vect}_O(s)$, con r, s rette distinte passanti per O , $U \cup W$ non è chiuso rispetto alla somma di vettori)

Si definisce allora

- $U + W = \{v \in V \mid \exists u \in U, \exists w \in W \text{ con } v = u + w\}$

si verifica che $U + W$ è un sottospazio (verificarlo), detto *somma* di U e W .

Ad esempio, in $V = \text{Vect}_O(\mathbb{E}^3)$, con r ed s rette per O distinte tra loro, si ha $\text{Vect}_O(r) + \text{Vect}_O(s) = \text{Vect}_O(\pi)$, ove π è il piano contenente r ed s .

Sempre in $V = \text{Vect}_O(\mathbb{E}^3)$, con α ed β piani per O distinti tra loro, si ha $\text{Vect}_O(\alpha) + \text{Vect}_O(\beta) = V$.

Siano $U, W \subset V$ sottospazi, e si consideri lo spazio somma $U + W$.

Si dice che la somma $U + W$ è una *somma diretta* (e si scrive $U \oplus W$ al posto di $U + W$), se e solo se ogni $v \in U + W$ si scrive in un unico modo come somma di un vettore $u \in U$ e un vettore $w \in W$.

La somma $U + W$ è una somma diretta se e solo se $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ (verificarlo).

Tra gli esempi visti sopra, la somma $\text{Vect}_O(r) + \text{Vect}_O(s)$ è diretta, mentre la somma $\text{Vect}_O(\alpha) + \text{Vect}_O(\beta)$ non lo è.

- 1 Relazioni in un insieme
- 2 Gruppi, anelli, campi
- 3 Matrici
- 4 Risoluzione dei sistemi di equazioni lineari
- 5 Spazi vettoriali
- 6 Sottospazi
- 7 Sistemi di generatori**
- 8 Dipendenza e indipendenza lineare
- 9 Basi
- 10 Teoria della base per spazi finitamente generati
- 11 Formula di Grassmann

Navigation icons: back, forward, search, etc.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Siano V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} , $\emptyset \neq S \subseteq V$, $S = \{s_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sottoinsieme non vuoto arbitrario.

Si dice *sottospazio generato* da S (*span* di S) il sottoinsieme di V , indicato con $\langle S \rangle$, costituito dai vettori che possono essere espressi come combinazione lineare di elementi di S :

$$\langle S \rangle = \{v \in V \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \exists s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_n} \in S, v = \lambda_1 s_{\alpha_1} + \dots + \lambda_n s_{\alpha_n}\}$$

(n è variabile).

$\langle S \rangle$ è un sottospazio (verificarlo).

Sia U un sottospazio di V e S un sottoinsieme di V tale che $U = \langle S \rangle$. I vettori di S sono detti *generatori* di U . S è detto *sistema di generatori* per U .

Se esiste un insieme finito S tale che $U = \langle S \rangle$, si dice che U è *finitamente generato* (f.g.).



- $\forall V, \forall U$ sottospazio di V si ha $U = \langle U \rangle$.
- $V = \text{Vect}_O(\mathbb{E}^3)$, $S = \{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\} = \{\text{vettori unitari degli assi}\}$. $V = \langle S \rangle$,
 $\forall \underline{v} = \overrightarrow{OP}$, si ha $\underline{v} = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$, se $P \equiv (a, b, c)$.
- $V = \text{Vect}_O(\mathbb{E}^3)$, $S = \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ con
 $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vettori arbitrari purché non complanari. $V = \langle S \rangle$.
- $V = \mathbb{R}^2$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. $\langle S \rangle = V$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $V = \mathbb{R}^2$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$. $\langle S \rangle = V$,
 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a+b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(a-b) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\bullet \mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \{e_1, \dots, e_n\} \quad \langle S \rangle = \mathbb{K}^n \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

$$\bullet \mathbb{C} \text{ considerato come spazio vettoriale su } \mathbb{R}, S = \{1, i\}; \quad \langle S \rangle = \mathbb{C}$$

$$\bullet \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K}), E_{ij} = (e_{hk}), e_{hk} = \begin{cases} 0 & (h,k) \neq (i,j) \\ 1 & (h,k) = (i,j) \end{cases}$$

$$S = \{E_{ij} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \quad \langle S \rangle = \text{Mat}_{m,n}$$

$$\bullet \mathbb{K}_d[x] \text{ polinomi di grado } \leq d$$

$$S = \{1, x, x^2, \dots, x^d\} \quad \forall p \in \mathbb{K}_d[x]$$

$$p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_d x^d \quad \langle S \rangle = \mathbb{K}_d[x]$$

- $\mathbb{K}[x], S = \{x^n | n \geq 0\}$ $\langle S \rangle = \mathbb{K}[x]$

Lo spazio $\mathbb{K}[x]$ è un esempio di spazio vettoriale non f.g. (con le combinazioni lineari dei polinomi $p_1(x), \dots, p_h(x)$ non si possono generare polinomi di grado maggiore al massimo tra i gradi di $p_1(x), \dots, p_h(x)$).

OSSERVAZIONE 1 - Se $U = \langle S \rangle$ e $S \subseteq T \subseteq U$, allora anche $U = \langle T \rangle$.

OSSERVAZIONE 2 - Se $U = \langle \underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n \rangle$ e \underline{s}_n è combinazione lineare di $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_{n-1}$ allora $U = \langle \underline{s}_1, \dots, \underline{s}_{n-1} \rangle$ (i vettori di V , che per ipotesi possono essere scritti combinazioni lineari di $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n$, possono anche essere scritti come combinazioni lineari di $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_{n-1}$).

- 1 Relazioni in un insieme
- 2 Gruppi, anelli, campi
- 3 Matrici
- 4 Risoluzione dei sistemi di equazioni lineari
- 5 Spazi vettoriali
- 6 Sottospazi
- 7 Sistemi di generatori
- 8 Dipendenza e indipendenza lineare**
- 9 Basi
- 10 Teoria della base per spazi finitamente generati
- 11 Formula di Grassmann

Navigation icons: back, forward, search, etc.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Siano V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} , $\emptyset \neq S \subseteq V$, $S = \{s_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sottoinsieme non vuoto arbitrario. Si dice che S è un insieme di *vettori linearmente dipendenti*, ovvero che S è *linearmente dipendente (l.d.)*, se esiste una combinazione lineare di elementi di S con coefficienti non tutti nulli che dia il vettore nullo, cioè

$$\exists \underline{s}_{\alpha_1}, \dots, \underline{s}_{\alpha_n} \in S \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \\ \text{tali che } \lambda_1 \underline{s}_{\alpha_1} + \dots + \lambda_n \underline{s}_{\alpha_n} = \underline{0}.$$

S si dice *linearmente indipendente (l.i.)* se non è linearmente dipendente, cioè

$$\underline{s}_{\alpha_1}, \dots, \underline{s}_{\alpha_n} \in S \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \\ \lambda_1 \underline{s}_{\alpha_1} + \dots + \lambda_n \underline{s}_{\alpha_n} = \underline{0} \Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0).$$

Esempi di dipendenza e di indipendenza lineare

- In \mathbb{R}^3 , $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è l.i., $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è l.d.
- In \mathbb{K}^n , $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ è l.i..
- In $\text{Vect}_O(\mathbb{E}^3)$, due vettori sono l.d. se e solo se sono allineati, tre vettori sono l.d. se e solo se sono complanari.
- In $\mathbb{K}[x]$, $S = \{1, x, x^2, \dots, x^d, \dots\}$ è l.i.
- In $\text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$, $S = \{E_{ij}\}$ è l.i.
- In \mathbb{C}^2 considerato come spazio vettoriale su \mathbb{R} , $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è l.i.
- In \mathbb{C}^2 considerato come spazio vettoriale su \mathbb{C} , $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è l.d.

V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} ,

- 1) Siano $\emptyset \neq S \subseteq V$, $\emptyset \neq T \subseteq S$. Se S è l.d., allora T è l.d.
- 2) $v \in V$; $\{v\}$ è l.d. se e solo se $v = \underline{0}$
- 3) $v, w \in V$; $\{v, w\}$ sono l.d. se e solo se (almeno) uno dei due è multiplo dell'altro.
- 4) $v_1, \dots, v_n \in V$; $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono l.d. se e solo se almeno uno tra i v_i è combinazione lineare degli altri.

5) $v_1, \dots, v_k \in V$ $\{v_1, \dots, v_k\}$ l.i., $v_{k+1} \in V$.
 v_1, \dots, v_k, v_{k+1} sono l.d. se e solo se v_{k+1} è combinazione lineare di v_1, \dots, v_k .

6) Se

$$\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n = \underline{0}$$

e $\lambda_n \neq 0$, allora il vettore s_n è combinazione lineare di s_1, \dots, s_{n-1} ,
infatti

$$s_n = -(\lambda_n)^{-1} \lambda_1 s_1 + \dots + -(\lambda_n)^{-1} \lambda_{n-1} s_{n-1}$$

- 1 Relazioni in un insieme
- 2 Gruppi, anelli, campi
- 3 Matrici
- 4 Risoluzione dei sistemi di equazioni lineari
- 5 Spazi vettoriali
- 6 Sottospazi
- 7 Sistemi di generatori
- 8 Dipendenza e indipendenza lineare
- 9 Basi**
- 10 Teoria della base per spazi finitamente generati
- 11 Formula di Grassmann

Navigation icons: back, forward, search, etc.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} . Un sottoinsieme B di V si dice *base* di V se è linearmente indipendente ed è un sistema di generatori di V .

- $V = \mathbb{R}^2$; $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ è una base di V ; anche $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ è una base di V .
- $V = \text{Vect}_O(\mathbb{E}^3)$; $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ è una base di V .
- $V = \mathbb{K}^n$; $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ è una base di V , detta *base canonica*.
- $V = \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$; $\{E_{ij}\}_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$ è base di V .
- $V = \mathbb{K}_d[x]$; $\{1, x, x^2, \dots, x^d\}$ è base di V .
- $V = \mathbb{K}[x]$; $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ è base di V .

OSSERVAZIONE - $V = \{\underline{0}\}$ non ha base (il vettore $\underline{0}$ non è l.i.)

TEOREMA - $S \subseteq V$ è base di V se e solo se ogni vettore di V si può scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori di S .

Dimostrazione (nel caso S finito). Sia $S = \{\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n\}$.

- Se S è base allora S genera V , quindi bisogna solo provare l'unicità di scrittura.

$$\lambda_1 \underline{s}_1 + \dots + \lambda_n \underline{s}_n = \mu_1 \underline{s}_1 + \dots + \mu_n \underline{s}_n \Rightarrow$$

$$(\lambda_1 - \mu_1) \underline{s}_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) \underline{s}_n = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n.$$

- $0 \underline{s}_1 + \dots + 0 \underline{s}_n$ è l'unica scrittura del vettore nullo.



- 1 Relazioni in un insieme
- 2 Gruppi, anelli, campi
- 3 Matrici
- 4 Risoluzione dei sistemi di equazioni lineari
- 5 Spazi vettoriali
- 6 Sottospazi
- 7 Sistemi di generatori
- 8 Dipendenza e indipendenza lineare
- 9 Basi
- 10 Teoria della base per spazi finitamente generati**
- 11 Formula di Grassmann



Esistenza di una base

Uno spazio vettoriale non nullo e f.g. ammette una base. Infatti si ha:

TEOREMA - Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} , $V \neq \{0\}$.

$V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ contiene una base di V .

Dimostrazione. $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è l.i. $\Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ è base.

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è l.d., almeno uno di essi, diciamo v_n , è combinazione lineare degli altri.

Allora, per quanto visto nell'osservazione 2 di pag. 64, $V = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$.

Se $\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ è l.i. $\Rightarrow \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ è base.

Se $\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ è l.d., si itera il procedimento. Se il procedimento non si è arrestato prima, si arriva a $V = \langle v_1 \rangle$; in tal caso $\{v_1\}$ è l.i. (e quindi base).

Altrimenti, $\{v_1\}$ l.d. $\Rightarrow v_1 = \underline{0}$ e $V = \{0\}$, contro l'ipotesi.

Anche gli spazi non f.g. ammettono una base (qui non ne vedremo la dimostrazione).

OSSERVAZIONE - L'estrazione di una base da un sistema di generatori può essere effettuata con il seguente algoritmo (degli *scarti successivi*).

$$V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle.$$

1) Si considera v_1 .

- Se v_1 è l.i. (cioè $\neq 0$), allora lo si tiene,
- altrimenti no (v_1 può essere eliminato dai generatori di V , ovvero bastano v_2, v_3, \dots, v_n a generarlo).

2) Si considera $\{v_1, v_2\}$, o $\{v_2\}$ se v_1 è stato scartato.

- Se $\{v_1, v_2\}$ è l.i., allora si tiene v_2 ,
- altrimenti no (v_2 può essere eliminato dai generatori di V).

...

n) Si considerano i v_i , con $i \leq n - 1$, non scartati.

- Se $\{\dots, v_i, \dots, v_n\}$ è l.i. allora si tiene v_n ,
- altrimenti no (v_n può essere eliminato dai generatori di V).

Insiemi massimali di indipendenti e insiemi minimali di generatori

Un insieme $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ di vettori di V si dice *insieme massimale di vettori linearmente indipendenti* (in V) se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ è l.i. e, comunque preso $\underline{v} \in V$, l'insieme $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}\}$ è l.d..

Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ e sia $r \leq n$. Si dice che $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\}$ è un *sottoinsieme massimale di vettori l.i.* in $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ se

- $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r$ sono l.i.
- $\forall i, r + 1 \leq i \leq n$ l'insieme $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r, \underline{v}_i\}$ è l.d..

TEOREMA - Sia $V = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle \neq \{0\}$.

Un sottoinsieme massimale di vettori l.i. $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\}$ (in $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$) è una base di V .

Dimostrazione. Occorre solo provare che $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\}$ genera V . Anzitutto ricordiamo che $\forall i, r+1 \leq i \leq n$, l'insieme $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r, \underline{v}_i\}$ è l.d., quindi esistono coefficienti non tutti nulli $\lambda_1, \dots, \lambda_r, k$ tali che

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_r \underline{v}_r + k \underline{v}_i = \underline{0}.$$

Non può essere $k = 0$, altrimenti $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\}$ sarebbe l.d. Quindi \underline{v}_i è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r, \forall i, r+1 \leq i \leq n$ e può essere eliminato dai generatori.

OSSERVAZIONE - Se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti (in V), allora $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ è una base di V .



Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r \in V$. Si dice che $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\}$ è un *insieme minimale di generatori* se

- $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r$ generano V
- $\forall i, 1 \leq i \leq r$ l'insieme $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\} \setminus \{\underline{v}_i\}$ non genera V .

OSSERVAZIONE - Sia $V \neq \{0\}$.

Un insieme minimale di generatori $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\}$ è una base di V .

Dimostrazione. Occorre solo provare che $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\}$ è l.i..

Sia

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_r \underline{v}_r = \underline{0}.$$

Se esistesse $\lambda_i \neq 0$ con $1 \leq i \leq r$, il vettore \underline{v}_i sarebbe combinazione lineare dei vettori $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\} \setminus \{\underline{v}_i\}$ e di conseguenza $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\} \setminus \{\underline{v}_i\}$ genererebbe V .



Equicardinalità delle basi

TEOREMA - Sia V uno spazio vettoriale con base costituita da n vettori. Comunque presi m vettori di V , con $m > n$, questi vettori sono l.i.d.

Dimostrazione - Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e siano $w_1, \dots, w_m \in V$, con $m > n$.

Supponiamo, per assurdo, che $\{w_1, \dots, w_m\}$ sia l.i..

Mostriamo anzitutto che

(*) in tal caso sarebbe possibile trovare n vettori in $\{w_1, \dots, w_m\}$ che generino V .

Per ipotesi esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tutti nulli, tali che $w_1 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Poiché $w_1 \neq \mathbf{0}$ (è l.i.), qualche λ_i è non nullo, ad esempio $\lambda_1 \neq 0$. Quindi, da $-w_1 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}$, si deduce che v_1 è combinazione lineare di w_1, v_2, \dots, v_n . Quindi

$$V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \langle w_1, v_2, \dots, v_n \rangle$$

cioè nella base di V abbiamo potuto "sostituire un v con un w ".

Mostriamo ora ricorsivamente che se $\langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r, \underline{v}_{r+1}, \dots, \underline{v}_n \rangle = V$ allora (eventualmente dopo aver riordinato i vettori $\underline{v}_{r+1}, \dots, \underline{v}_n$) anche

$\langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_{r+1}, \underline{v}_{r+2}, \dots, \underline{v}_n \rangle = V$ (cioè nella base di V abbiamo potuto "inserire un altro \underline{w} al posto di un \underline{v} ").

Sia quindi $\langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r, \underline{v}_{r+1}, \dots, \underline{v}_n \rangle = V$. Per ipotesi esistono

$\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \dots, \beta_n$ tali che

$$\underline{w}_{r+1} = \alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_r \underline{w}_r + \beta_{r+1} \underline{v}_{r+1} + \dots + \beta_n \underline{v}_n.$$

L'insieme $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r, \underline{w}_{r+1}\}$ è l.i., pertanto qualche β_i è non nullo, ad esempio $\beta_{r+1} \neq 0$. Quindi si deduce che \underline{v}_{r+1} è combinazione lineare di

$\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_{r+1}, \underline{v}_{r+2}, \dots, \underline{v}_n$. Quindi $\langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_{r+1}, \underline{v}_{r+2}, \dots, \underline{v}_n \rangle = V$.

Con questo abbiamo dimostrato (*).

Poiché anche $\underline{w}_{n+1} \in V$, il vettore \underline{w}_{n+1} è combinazione lineare di $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$, per cui $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n, \underline{w}_{n+1}\}$ è l.d.. Allora però anche $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n, \underline{w}_{n+1}, \dots, \underline{w}_m\}$ sarebbe l.d., contro l'ipotesi.



TEOREMA - Sia V uno spazio vettoriale. Siano
 $\mathcal{A} = \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}, \mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k\}$ basi di $V \Rightarrow n = k$.

Dimostrazione. \mathcal{A} è una base costituita da n vettori \Rightarrow più di n vettori sono l.i.d.

$\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k\}$ è l.i. (perché base) $\Rightarrow k \leq n$

Scambiando il ruolo di \mathcal{A} e di \mathcal{B} nell'argomentazione precedente si ha

$n \leq k \Rightarrow n = k$.

Riassumendo, abbiamo provato che

se V è uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} , $V \neq \{0\}$ e f.g. allora:

- I) (*esistenza*) V ha base (finita);
- II) (*equicardinalità*) tutte le basi di V sono costituite dallo stesso numero di vettori.



La dimensione di uno spazio vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} .

Si dice *dimensione* di V , e si scrive $\dim V$ (o $\dim_{\mathbb{K}} V$) il numero così definito:

$$\dim V = \begin{cases} 0 & \text{se } V = \{\underline{0}\} \\ n & \text{se } V \text{ è f.g. ed ha base con } n \text{ vettori} \\ \infty & \text{se } V \text{ non è f.g..} \end{cases}$$

Ad esempio:

- $\dim \text{Vect}_0(\mathbb{E}^3) = 3$;
- $\dim \mathbb{K}^n = n$;
- $\dim \text{Mat}_{m,n} = mn$;
- $\dim \mathbb{K}[x] = \infty$;
- $\dim \mathbb{K}_d[x] = d + 1$;
- $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$.

TEOREMA - Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n . Comunque presi n vettori linearmente indipendenti, questi costituiscono una base di V .

Dimostrazione. Sia $S = \{v_1, \dots, v_n\}$. S è un insieme massimale di l.i. (non si può aggiungere nemmeno un vettore senza che diventino dipendenti), quindi è una base.

TEOREMA - Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n . Comunque presi n vettori che generano V , questi costituiscono una base di V .

Dimostrazione. Sia $S = \{v_1, \dots, v_n\}$. S è un insieme minimale di generatori (non si può togliere nemmeno un vettore, per l'equicardinalità delle basi), quindi è una base.

COROLLARIO - Sia V uno spazio vettoriale f.g., $\dim V = n$ e $U \subseteq V$ un sottospazio. Allora anche U è f.g. e $\dim U = k \leq n$. Inoltre, $k = n \Leftrightarrow U = V$.



Dimostrazione. Se $U = \{0\}$ il risultato è ovvio. Altrimenti U contiene almeno un vettore l.i. u_1 . Aggiungiamo vettori u_2, u_3, \dots in modo che $\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_2, u_3\}, \dots$ siano l.i. Dopo un numero finito di passi il processo si arresta perché in V (e quindi in U) non possono esserci più di n vettori l.i. Sia quindi $\{u_1, \dots, u_k\}$ un insieme massimale di vettori l.i. in U (con $k \leq n$). Per quanto visto $\{u_1, \dots, u_k\}$ è una base di U e quindi $\dim U = k \leq n = \dim V$.
 Se inoltre $k = n$, $\{u_1, \dots, u_k\}$ base di U è anche base di V , perché V ha dimensione n e $k = n$ vettori l.i. sono una base.
 $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle = V$.
 Il viceversa, $U = V \Rightarrow k = n$, è ovvio.

OSSERVAZIONE (completamento della base) - Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n . Sia poi $r \leq n$ e siano $v_1, \dots, v_r \in V$ vettori l.i.. Allora esistono vettori w_{r+1}, \dots, w_n tali che $\{v_1, \dots, v_r, w_{r+1}, \dots, w_n\}$ sia una base di V .



- 1 Relazioni in un insieme
- 2 Gruppi, anelli, campi
- 3 Matrici
- 4 Risoluzione dei sistemi di equazioni lineari
- 5 Spazi vettoriali
- 6 Sottospazi
- 7 Sistemi di generatori
- 8 Dipendenza e indipendenza lineare
- 9 Basi
- 10 Teoria della base per spazi finitamente generati
- 11 Formula di Grassmann**

Navigation icons: back, forward, search, etc.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

TEOREMA (Formula di Grassmann) - Sia V uno spazio vettoriale f.g. su un campo \mathbb{K} , e siano $X, Y \subseteq V$ sottospazi. Si ha:

$$\dim X + \dim Y = \dim(X \cap Y) + \dim(X + Y).$$

Dimostrazione. Anzitutto tutti gli spazi coinvolti sono f.g. perchè lo è V . Sia $\dim(X \cap Y) = i$.

- Se $i = 0$, cioè $X \cap Y = \{0\}$ siano $\{x_1, \dots, x_r\}$ una base di X , e $\{y_1, \dots, y_s\}$ una base di Y .
- Se $i \geq 1$, sia $\{v_1, \dots, v_i\}$ una base di $X \cap Y$. I vettori v_1, \dots, v_i sono l.i., quindi, per il teorema di completamento della base, $\exists x_{i+1}, \dots, x_r$ tali che $\{v_1, \dots, v_i, x_{i+1}, \dots, x_r\}$ sia base di X e $\exists y_{i+1}, \dots, y_s$ tali che $\{v_1, \dots, v_i, y_{i+1}, \dots, y_s\}$ sia base di Y .

In ogni caso abbiamo $\dim X = r$, $\dim Y = s$, $\dim X \cap Y = i$. Dobbiamo quindi dimostrare che $\dim(X + Y) = r + s - i$.

Allo scopo faremo vedere che $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_i, x_{i+1}, \dots, x_r, y_{i+1}, \dots, y_s\}$ è base di $X + Y$.



1) - \mathcal{B} è insieme di generatori per $X + Y$:

$$X + Y = \{ \underline{v} = \underline{x} + \underline{y} \}, \underline{x} \in X = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i, \underline{x}_{i+1}, \dots, \underline{x}_r \rangle, \underline{y} \in Y = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i, \underline{y}_{i+1}, \dots, \underline{y}_s \rangle \Rightarrow \underline{x} + \underline{y} \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i, \underline{x}_{i+1}, \dots, \underline{x}_r, \underline{y}_{i+1}, \dots, \underline{y}_s \rangle \Rightarrow \mathbf{1}).$$

2) - \mathcal{B} è l.i.:

$$(*) \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_i \underline{v}_i + \beta_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \dots + \beta_r \underline{x}_r + \gamma_{i+1} \underline{y}_{i+1} + \dots + \gamma_s \underline{y}_s = \underline{0}$$

\Rightarrow

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_i \underline{v}_i + \beta_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \dots + \beta_r \underline{x}_r = -\gamma_{i+1} \underline{y}_{i+1} \dots - \gamma_s \underline{y}_s.$$

Il I membro è un vettore di X , mentre il II membro è un vettore di Y , quindi entrambi appartengono a $X \cap Y$. In particolare il II membro può essere espresso come combinazione lineare di elementi della sua base di $X \cap Y$:

$$-\gamma_{i+1} \underline{y}_{i+1} \dots - \gamma_s \underline{y}_s = \delta_1 \underline{v}_1 + \dots + \delta_i \underline{v}_i$$

\Rightarrow



$$\delta_1 \underline{v}_1 + \cdots + \delta_i \underline{v}_i + \gamma_{i+1} \underline{y}_{i+1} + \cdots + \gamma_s \underline{y}_s = \underline{0}$$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i, \underline{y}_{i+1}, \dots, \underline{y}_s$ costituiscono una base di Y (quindi l.i.)

$$\Leftrightarrow \delta_1 = \cdots = \delta_i = 0, \gamma_{i+1} = \cdots = \gamma_s = 0.$$

Quindi la (*) diviene

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_i \underline{v}_i + \beta_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \cdots + \beta_r \underline{x}_r = \underline{0}$$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i, \underline{x}_{i+1}, \dots, \underline{x}_r$ base di X (quindi l.i.)

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_i = 0, \beta_{i+1} = \cdots = \beta_r = 0$$

\Rightarrow tutti i coefficienti nella (*) sono necessariamente 0 \Rightarrow **2**).

COROLLARIO - Sia V uno spazio vettoriale f.g. su un campo \mathbb{K} , e siano $X, Y \subseteq V$ tali che $V = X \oplus Y$. Si ha $\dim X + \dim Y = \dim V$.

ESEMPLI. Sia $V = \text{Vect}_O(\mathbb{E}^3)$

1) Siano r, s rette per O distinte tra loro. Sia $X = \text{Vect}_O(r), Y = \text{Vect}_O(s)$. Si

ha $X \cap Y = \{0\}$.

Abbiamo visto che il sottospazio somma $X \oplus Y$ corrisponde allo spazio dei vettori per O che giacciono sul piano π che contiene r e s : $X + Y = \text{Vect}_O(\pi)$.

Si ha: $1 + 1 = \dim X + \dim Y = \dim(X \oplus Y) = 2$.

2) Siano α, β piani per O distinti tra loro e sia $r = \alpha \cap \beta$. Sia

$X = \text{Vect}_O(\alpha), Y = \text{Vect}_O(\beta)$.

Si ha $X + Y = V$ e $X \cap Y = \text{Vect}_O(r)$.

Si ha: $2 + 2 = \dim X + \dim Y = \dim(X \cap Y) + \dim(X + Y) = 1 + 3$.

