Geometria 1 - Anno Accademico 2021/2022
Maggio 2022

1. Nello spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$, si consideri la matrice
$$A_h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & h \end{pmatrix}$$
e l'applicazione lineare $\Phi_h\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che $\Phi_h(M) = A_h \cdot M$, al variare di $h \in \mathbb{R}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si consideri inoltre
$$V_k := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a + c = d + k = 0 \right\}.$$
   (a) Determinare una base di $\mathrm{Im}(\Phi_h)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$, e stabilire per quali k, V_k e' un sottospazio.
   (b) Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si determini una base di $\mathrm{Im}(\Phi_h) \cap V_0$ e $\mathrm{Im}(\Phi_h) + V_0$. Si completi tale base ad una base di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   (c) Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si determini una base di $\mathrm{Im}(\Phi_h \circ \Phi_h) \cap \ker(\Phi_h)$ e di $\mathrm{Im}(\Phi_h \circ \Phi_h) + \ker(\Phi_h)$.

2. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:
$$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v_2} = \begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v_3} = \begin{pmatrix} 1-k \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{v_4} = \begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 1 \\ 1-k \end{pmatrix},$$
$$\underline{w_1} = \begin{pmatrix} k \\ -k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k-1 \\ k-1 \end{pmatrix}, \ \underline{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w_4} = \begin{pmatrix} -1 \\ k \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$
   (a) Stabilire in dipendenza dal parametro $k \in \mathbb{R}$ se esiste un'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f_k(\underline{v_i}) = \underline{w_i}$, $i = 1,2,3,4$. Quando tale applicazione esiste si stabilisca se e' unica.
   (b) Si calcoli $f_1^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Si consideri

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tale che } x_1 + x_2 = 0 \right\}.$$

Si ponga $k = 1$. E si osservi che la restrizione di f_1 a V definisce un enodomorfismo $F := f_{|V} : V \to V$. Si scriva la matrice ${}_{\mathcal{V}}M_{\mathcal{V}}(F)$ che rappresenta F rispetto alla base $\mathcal{V} = \{\underline{v_2}, \underline{v_3}, \underline{v_4}\}$ di V.

(d) Sia scriva una base di V formata da autovettori di F.

3. Nello spazio affine reale $\mathbb{A}^4$ si consideri il piano σ_k di equazioni

$$\begin{cases} x + ky + z + w = 1 \\ y - w = k \end{cases}$$

con $k \in R$ parametro. Sia $P = (2, 0, 0, 0) \in \mathbb{A}^4$ e π il piano passante per P e giacitura

$$Dir(\pi) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

(a) Si stabilisca, al variare di $k \in \mathbb{R}$, qual è la posizione reciproca di σ_k e π.

(b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determinino dimensione ed equazioni cartesiane dello spazio congiungente $\overline{\sigma_k \cup \pi}$.

(c) Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste una retta r_k passante per $Q = (1, -1, 0, 0)$ e tale che $r_k \cap \sigma_k \neq \emptyset$ and $r_k \cap \pi \neq \emptyset$.