

GEOMETRIA 1

seconda parte

Gilberto Bini - Cristina Turrini

2017/2018



1 Applicazioni lineari

2 Nucleo e immagine di un'applicazione

3 Isomorfismo di spazi vettoriali

4 La matrice rappresentativa

5 Il determinante

6 Sottomatrici e minori

7 Sul significato del rango

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Siano V, W spazi vettoriali sullo stesso campo \mathbb{K} . Consideriamo un'applicazione $f : V \rightarrow W$.

Si dice che f è *lineare* (o \mathbb{K} -*lineare*) se $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ è:

- 1) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$, cioè f conserva la somma o f è additiva;
- 2) $f(\lambda \underline{u}) = \lambda \cdot f(\underline{u})$, cioè f è omogenea di I grado;

(1) + 2) è equivalente a ciascuna delle seguenti:

- 3) $f(\lambda \underline{u} + \mu \underline{v}) = \lambda \cdot f(\underline{u}) + \mu \cdot f(\underline{v})$,
- 3') $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f(\underline{u}_i) \quad \forall \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

cioè f conserva le combinazioni lineari.

- $\forall V$ spazio vettoriale, si può considerare l'applicazione identica $id_V : V \rightarrow V$; l'applicazione identica è lineare.
- $\forall V, W$, si può considerare $\mathbf{0} : V \rightarrow W, v \mapsto \mathbf{0}_W$.
L'applicazione nulla è lineare.
- sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ una sua base (*ordinata*: qui e nel seguito parlando di base sottointenderemo sempre che lo sia); l'applicazione

$$\Phi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{K}^n$$

definita da

$$\Phi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

se $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{b}_n$, è lineare.

$\Phi_{\mathcal{B}}$ associa ad ogni vettore le sue componenti rispetto alla base \mathcal{B} (dette anche *coordinate nella base \mathcal{B}*).



- $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$, $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$, $L_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, $\underline{x} \mapsto A \cdot \underline{x}$
(prodotto riga per colonna)

L'applicazione L_A viene detta *applicazione associata alla matrice A* e, per le proprietà del prodotto riga per colonna, è lineare.

Se $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B \in \text{Mat}_{n,p}(\mathbb{K})$, allora si hanno le applicazioni $L_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ e $L_B : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ per cui si può considerare la composizione $L_A \circ L_B : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^m$. Risulta

$$L_A \circ L_B = L_{A \cdot B}$$

cioè l'applicazione composta $L_A \circ L_B$ è l'applicazione associata alla matrice $A \cdot B \in \text{Mat}_{m,p}$ prodotto riga per colonna di A per B .

Se $I = I_m \in \text{Mat}_m$ è la matrice identica, allora $L_I : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^m$ è l'applicazione identica.



Lo spazio delle applicazioni lineari

Siano V e W spazi vettoriali sul campo \mathbb{K} .

Denotiamo con $L(V, W)$ (o con $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ o $\text{Hom}(V, W)$) l'insieme delle applicazioni lineari da V a W .

$$L(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ è lineare}\}$$

Poniamo

$$+ : L(V, W) \times L(V, W) \rightarrow L(V, W)$$

$$(f, g) \mapsto f + g \quad (f + g)(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times L(V, W) \rightarrow L(V, W)$$

$$(\lambda, f) \mapsto \lambda f \quad (\lambda f)(\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v})$$

(definizioni puntuali di somma e di prodotto per uno scalare)

$L(V, W)$ con queste leggi di composizione è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} .



Siano V, W, Z spazi vettoriali sul campo \mathbb{K} .

1) $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$

(infatti $f(\underline{0}_V) = f(0 \cdot \underline{v}) = 0 \cdot f(\underline{v}) = \underline{0}_W$).

2) $g : W \rightarrow Z$. Se f, g sono lineari $\Rightarrow g \circ f : V \rightarrow Z$ è lineare.

(infatti $g \circ f(\lambda \underline{u} + \mu \underline{v}) = g(f(\lambda \underline{u} + \mu \underline{v})) = g(\lambda f(\underline{u}) + \mu f(\underline{v})) = \lambda g(f(\underline{u})) + \mu g(f(\underline{v})) = \lambda \cdot g \circ f(\underline{u}) + \mu \cdot g \circ f(\underline{v})$).

3) Se f è biunivoca, l'applicazione inversa di $f, f^{-1} : W \rightarrow V$ è lineare.

(infatti si verifica che il vettore $\lambda f^{-1}(\underline{u}') + \mu f^{-1}(\underline{v}')$ è l'inverso di $\lambda \underline{u}' + \mu \underline{v}'$ infatti

$$f(\lambda f^{-1}(\underline{u}') + \mu f^{-1}(\underline{v}')) = \lambda f(f^{-1}(\underline{u}')) + \mu f(f^{-1}(\underline{v}')) = \lambda \underline{u}' + \mu \underline{v}'.$$

TEOREMA - Siano V e W spazi vettoriali su \mathbb{K} . Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ una base di V e siano $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in W$ vettori comunque presi. Allora esiste una ed una sola applicazione lineare $\phi : V \rightarrow W$ tale che $\phi(\mathbf{b}_i) = \mathbf{w}_i, \forall i = 1, \dots, n$

Dimostrazione -

- **Unicità.** $\underline{v} \in V = \langle \mathcal{B} \rangle, \underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n$ (la scrittura è unica).

Dobbiamo costruire $f : V \rightarrow W$ con le condizioni richieste. Deve necessariamente essere: $f(\underline{v}) = f(\alpha_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n) = \alpha_1 f(\underline{b}_1) + \dots + \alpha_n f(\underline{b}_n) = \alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_n \underline{w}_n$.

L'unica possibile definizione è allora

$$(*) \quad f(\underline{v}) = \alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_n \underline{w}_n$$

se $\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n$.



- Esistenza

Si deve mostrare che l'applicazione f definita in (\star) soddisfa le condizioni richieste dall'enunciato.

- f è lineare. Infatti (ad esempio per l'additività) se

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{b}_n.$$

e

$$\underline{u} = \beta_1 \underline{b}_1 + \cdots + \beta_n \underline{b}_n,$$

allora

$$\begin{aligned} \underline{v} + \underline{u} &= \alpha_1 \underline{b}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{b}_n + \beta_1 \underline{b}_1 + \cdots + \beta_n \underline{b}_n = \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) \underline{b}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \underline{b}_n; \end{aligned}$$

quindi

$$f(\underline{v} + \underline{u}) = (\alpha_1 + \beta_1) \underline{w}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \underline{w}_n = f(\underline{v}) + f(\underline{u}).$$

E analogamente per l'omogeneità.

- $f(\underline{b}_i) = \underline{w}_i, \forall i$. Infatti

$$\underline{b}_i = 0 \underline{b}_1 + \cdots + 1 \underline{b}_i + \cdots + 0 \underline{b}_n \quad \Rightarrow \quad f(\underline{b}_i) = 1 \underline{w}_i.$$



Siano sempre V e W spazi vettoriali su \mathbb{K} , con V f.g., $\dim V = n$, e siano $v_1, \dots, v_k \in V$, e $w_1, \dots, w_k \in W$.

PROBLEMA - Un'applicazione lineare $f : V \rightarrow W$ tale che $v_i \mapsto w_i \forall i = 1, \dots, k$ esiste? È unica?

Occorre distinguere due casi

- 1) Se $\{v_1, \dots, v_k\}$ è l.i., allora l'applicazione f esiste, ma in generale non è unica.

Infatti l'insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ si può completare a una base, cioè

$\exists v'_{k+1}, \dots, v'_n$ t.c. $\{v_1, \dots, v_k, v'_{k+1}, \dots, v'_n\}$ sia base di V . Presi

arbitrariamente $w'_{k+1}, \dots, w'_n \in W$, per il teorema di esistenza e unicità

$\exists! f$ t.c. $f(v_1) = w_1, \dots, f(v_k) = w_k, f(v'_{k+1}) = w'_{k+1}, \dots, f(v'_n) = w'_n$

Quest'applicazione soddisfa le nostre richieste, ma i vettori w'_{k+1}, \dots, w'_n possono essere scelti arbitrariamente in W quindi \exists in generale ∞f (se il campo \mathbb{K} è infinito).



- 2) Se $\{v_1, \dots, v_k\}$ è l.d. allora l'applicazione f in generale non esiste.

Infatti, può esistere un'applicazione lineare tale che $f(v_i) = w_i$, solo se le relazioni di dipendenza lineare tra i v_i sussistono (con gli stessi coefficienti!) tra i w_i .

Ad esempio, se $v_3 = v_1 - v_2 \Rightarrow f(v_3) = f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2)$, cioè $w_3 = w_1 - w_2$.

- 1 Applicazioni lineari
- 2 Nucleo e immagine di un'applicazione**
- 3 Isomorfismo di spazi vettoriali
- 4 La matrice rappresentativa
- 5 Il determinante
- 6 Sottomatrici e minori
- 7 Sul significato del rango

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Nucleo e immagine di un'applicazione lineare

Siano V, W spazi vettoriali su un campo \mathbb{K} e sia $f : V \rightarrow W$ lineare.

Si dice *nucleo* di f e si indica con $\ker(f)$ l'insieme dei vettori di V che hanno per immagine il vettore nullo.

$$\ker(f) = \{v \in V \mid f(v) = \underline{0}_W\} \subseteq V$$

Si dice *immagine* di f e si indica con $Im(f)$ l'usuale immagine dell'applicazione.

$$Im(f) = \{w \in W \mid \exists v \in V : f(v) = w\} \subseteq W$$



Proprietà

a) $\ker(f) \subseteq V$ è un sottospazio.

Infatti

$$f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W \Rightarrow \underline{0}_V \in \ker(f);$$

Inoltre, presi

$$\lambda, \mu \in \mathbb{K}, \underline{u}, \underline{v} \in \ker(f)$$

si ha

$$f(\lambda\underline{u} + \mu\underline{v}) = \lambda f(\underline{u}) + \mu f(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{0}_W + \mu \cdot \underline{0}_W = \underline{0}_W \Rightarrow \lambda\underline{u} + \mu\underline{v} \in \ker(f).$$

b) $\text{Im}(f) \subseteq W$ è un sottospazio (verificarlo).

TEOREMA (caratterizzazione delle applicazioni lineari iniettive)- Siano V, W spazi vettoriali f.g. su un campo \mathbb{K} , $f : V \rightarrow W$ lineare. Sono equivalenti:

- i) f è iniettiva;
- ii) $\ker(f) = \{\underline{0}_V\}$ (ossia $\dim(\ker(f)) = 0$);
- iii) $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ l.i. $\Rightarrow f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)$ l.i.



Dimostrazione*i) \Rightarrow ii)*

Se esistesse $v \neq 0_V$ tale che $v \in \ker(f)$, si avrebbe $f(v) = 0_W$. Poichè però $f(0_V) = 0_W$, verrebbe contraddetta l'iniettività di f .

ii) \Rightarrow iii)

$v_1, \dots, v_n \in V$ l.i. Dobbiamo dimostrare $f(v_1), \dots, f(v_n)$ l.i.

$$\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0_W \Rightarrow$$

$$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = 0_W \quad \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in \ker(f) = \{0_V\} \Rightarrow$$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow f(v_1), \dots, f(v_n) \text{ l.i.}$$

iii) \Rightarrow i)

Dobbiamo dimostrare che se $f(v_1) = f(v_2) = w$ allora $v_1 = v_2$.

$$f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = w - w = 0_W$$

Se fosse $v_1 - v_2 \neq 0_V$, sarebbe $v_1 - v_2$ l.i. e $f(v_1 - v_2) = 0_W$ l.d.. Contro l'ipotesi *iii*).



TEOREMA (*caratterizzazione delle applicazioni lineari suriettive*)- Siano V, W spazi vettoriali f.g. su un campo \mathbb{K} , $f : V \rightarrow W$ lineare. Sono equivalenti:

- i) f è suriettiva;
 - ii) $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(W)$;
 - iii) $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V \Rightarrow \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle = W$.
- (dimostrazione per esercizio).

OSSERVAZIONE - In generale (se anche f non è suriettiva) si ha
 $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V \Rightarrow \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle = \text{Im}(f)$.

OSSERVAZIONE - Abbiamo visto che le applicazioni lineari iniettive sono quelle che mutano insiemi di vettori l.i. in insiemi di vettori l.i. e che le applicazioni lineari suriettive sono quelle che mutano generatori di V in generatori di W . Ne segue che le applicazioni lineari biunivoche sono caratterizzate dal mutare basi in basi.



Teorema della nullità + rango

TEOREMA - Siano V, W spazi vettoriali f.g. su un campo \mathbb{K} , e sia $f : V \rightarrow W$ lineare. Si ha:

$$(\star) \quad \dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)).$$

Dimostrazione

Anzitutto osserviamo che tutti gli spazi coinvolti dalla (\star) sono f.g. perchè sottospazi di spazi f.g..

Se $\operatorname{Im}(f) = \{0\}$, allora f è l'applicazione nulla ($f(\underline{v}) = \underline{0}, \forall \underline{v} \in V$) e quindi $\ker(f) = V$, per cui (\star) è verificata.

Possiamo quindi supporre che $\operatorname{Im}(f) \neq \{0\}$. Allora $\operatorname{Im}(f)$ ammette una base.

Sia $\{\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_k\}$ una base di $\operatorname{Im}(f)$. Si prendano (arbitrariamente) vettori $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ in V tali che $f(\underline{b}_i) = \underline{c}_i, \forall i = 1, \dots, k$.

Se $\ker(f) \neq \{0\}$, si prende una base $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r\}$ di $\ker(f)$. Altrimenti non si prende nessun altro vettore.

Dimostriamo che $\mathcal{B} = \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k\}$ è una base di V . Questo prova la (\star) perchè si ha $\dim(V) = r + k = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f))$.

- \mathcal{B} è l.i.

Infatti sia

$$(\circ) \quad \alpha_1 \underline{a}_1 + \dots + \alpha_r \underline{a}_r + \beta_1 \underline{b}_1 + \dots + \beta_k \underline{b}_k = \underline{0}.$$

(\circ) implica $f(\alpha_1 \underline{a}_1 + \dots + \alpha_r \underline{a}_r + \beta_1 \underline{b}_1 + \dots + \beta_k \underline{b}_k) = f(\underline{0}) = \underline{0}$,
 quindi $\underline{0} = f(\alpha_1 \underline{a}_1 + \dots + \alpha_r \underline{a}_r + \beta_1 \underline{b}_1 + \dots + \beta_k \underline{b}_k) =$
 $\alpha_1 f(\underline{a}_1) + \dots + \alpha_r f(\underline{a}_r) + \beta_1 f(\underline{b}_1) + \dots + \beta_k f(\underline{b}_k) = \beta_1 \underline{c}_1 + \dots + \beta_k \underline{c}_k.$
 Ma $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_k$ sono l.i. (base di $\text{Im}(f)$), quindi $\beta_1 = \dots = \beta_k = 0$, per cui \circ diventa $\alpha_1 \underline{a}_1 + \dots + \alpha_r \underline{a}_r = \underline{0}$.
 Ma $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$ sono l.i. (base di $\ker(f)$), per cui $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$.
 Pertanto tutti i coefficienti di (\circ) sono necessariamente nulli, e quindi \mathcal{B} è l.i..



- $\langle \mathcal{B} \rangle = V$

Sia $\underline{v} \in V$. Dobbiamo mostrare che \underline{v} si può scrivere come combinazione lineare dei vettori di \mathcal{B} .

Si ha $f(\underline{v}) \in \text{Im}(f) = \langle \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_k \rangle$, quindi

$$f(\underline{v}) = \gamma_1 \underline{c}_1 + \dots + \gamma_k \underline{c}_k = \gamma_1 f(\underline{b}_1) + \dots + \gamma_k f(\underline{b}_k) = f(\gamma_1 \underline{b}_1 + \dots + \gamma_k \underline{b}_k).$$

$$\text{Quindi } f(\underline{v}) - f(\gamma_1 \underline{b}_1 + \dots + \gamma_k \underline{b}_k) = f(\underline{v} - \gamma_1 \underline{b}_1 - \dots - \gamma_k \underline{b}_k) = \underline{0}.$$

Pertanto $\underline{v} - \gamma_1 \underline{b}_1 - \dots - \gamma_k \underline{b}_k \in \ker(f) = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r \rangle$ e perciò

$$\underline{v} - \gamma_1 \underline{b}_1 - \dots - \gamma_k \underline{b}_k = \delta_1 \underline{a}_1 + \dots + \delta_r \underline{a}_r.$$

In conclusione $\underline{v} = \gamma_1 \underline{b}_1 + \dots + \gamma_k \underline{b}_k + \delta_1 \underline{a}_1 + \dots + \delta_r \underline{a}_r$.

COROLLARIO - Sia $f : V \rightarrow W$ lineare, con V, W f.g. e $\dim(V) = \dim(W)$. Allora f è iniettiva se e solo se è suriettiva se e solo se è biunivoca.

Dimostrazione

f iniettiva se e solo se $\dim(\ker(f)) = 0$ se e solo se $\dim(V) = \dim(\text{Im}(f))$ se e solo se $\dim(W) = \dim(\text{Im}(f))$ se e solo se f suriettiva.



1 Applicazioni lineari

2 Nucleo e immagine di un'applicazione

3 Isomorfismo di spazi vettoriali

4 La matrice rappresentativa

5 Il determinante

6 Sottomatrici e minori

7 Sul significato del rango



Endomorfismi, isomorfismi, automorfismi

- Un'applicazione lineare biunivoca si dice *isomorfismo*.
- Un'applicazione lineare da uno spazio in se stesso si dice *endomorfismo* o *operatore (lineare)*.
- Un'applicazione isomorfismo ed endomorfismo si dice *automorfismo*.

ESEMPI

- 1 $id_V : V \rightarrow V$ è un automorfismo.
- 2 se A è una matrice quadrata $m \times m$, allora $L_A : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^m$ è un endomorfismo.
- 3 se A è una matrice quadrata $m \times m$ invertibile, allora $L_A : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^m$ è un isomorfismo e l'applicazione inversa di L_A è $(L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}$ (infatti si ha $L_{A^{-1}} \circ L_A = L_{A^{-1} \cdot A} = L_I = id$).

Siano V, W spazi vettoriali su un campo \mathbb{K} . Si dice che V e W sono *isomorfi*, e si scrive $V \simeq W$, se esiste un isomorfismo $f : V \rightarrow W$.

La relazione di isomorfismo è di equivalenza (verificarlo).

TEOREMA - Due spazi vettoriali f.g. V e W sullo stesso campo \mathbb{K} sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

Dimostrazione

- Se esiste un isomorfismo $f : V \rightarrow W$ allora f trasforma una base di V in una base di W , quindi $\dim(V) = \dim(W)$.
- Se $\dim(V) = \dim(W) = n$, allora, fissata una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ l'applicazione

$$\Phi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{K}^n$$

definita da

$$\Phi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

se $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{b}_n$, è un isomorfismo, da cui si deduce che V è isomorfo a \mathbb{K}^n . Analogamente si costruisce un isomorfismo $\Phi_{\mathcal{C}} : W \rightarrow \mathbb{K}^n$. Di conseguenza $(\Phi_{\mathcal{C}})^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow W$ è pure un isomorfismo.



1 Applicazioni lineari

2 Nucleo e immagine di un'applicazione

3 Isomorfismo di spazi vettoriali

4 La matrice rappresentativa

5 Il determinante

6 Sottomatrici e minori

7 Sul significato del rango



www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it

Proprietà della trasformazione L_A

Sia $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$, siano $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$ spazi vettoriali. Abbiamo visto che si può costruire $L_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ lineare, $\underline{x} \mapsto A \cdot \underline{x} = \underline{y}$.

Si ha:

- $\ker L_A = \{\underline{x} \in \mathbb{K}^n : L_A(\underline{x}) = \underline{0} \in \mathbb{K}^m\} = \{\underline{x} \in \mathbb{K}^n : A \cdot \underline{x} = \underline{0}\} =$
 $\{\text{soluzioni del sistema omogeneo } A \cdot \underline{x} = \underline{0}\}.$

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

- $\text{Im}L_A = \{\underline{y} \in \mathbb{K}^m : \exists \underline{x} \in \mathbb{K}^n : \underline{y} = L_A(\underline{x})\} = \{\underline{y} \in \mathbb{K}^m : \exists \underline{x} : A \cdot \underline{x} = \underline{y}\} =$
 $\{\text{termini noti che rendono risolubile il sistema riportato qui sotto}\}$

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$



- Sia $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ la base standard di \mathbb{K}^n .

Calcoliamo $L_A(\underline{e}_i)$

Per esempio, per $i = 1$,

$$L_A(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} = A_{(1)} = \text{I colonna}$$

di A .

Analogamente, $L_A(\underline{e}_i) = i$ -esima colonna di A .

$\langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n \rangle = \mathbb{K}^n$ quindi $\langle L_A(\underline{e}_1), \dots, L_A(\underline{e}_n) \rangle = \text{Im}L_A$

(generatori di \mathbb{K}^n sono mutati da L_A in generatori di $\text{Im}L_A$),

pertanto i vettori colonna di A sono generatori di $\text{Im}L_A$.

Costruzione della matrice rappresentativa

Siano V, W spazi vettoriali sul campo \mathbb{K} , con $\dim V = n$, $\dim W = m$, e siano $\mathcal{A} = \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ una base (ordinata) di V , e $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ una base (ordinata) di W .

Sia $f : V \rightarrow W$ lineare; f è univocamente determinata da $f(\underline{a}_1), \dots, f(\underline{a}_n)$ (teorema di esistenza e unicità): noti $f(\underline{a}_1), \dots, f(\underline{a}_n)$ si può ricostruire f .

Scriviamo i vettori $f(\underline{a}_1), \dots, f(\underline{a}_n) \in W$ come combinazioni lineari dei vettori della base \mathcal{B} :

$$f(\underline{a}_1) = \alpha_{11}\underline{b}_1 + \alpha_{21}\underline{b}_2 + \dots + \alpha_{m1}\underline{b}_m$$

$$f(\underline{a}_2) = \alpha_{12}\underline{b}_1 + \alpha_{22}\underline{b}_2 + \dots + \alpha_{m2}\underline{b}_m$$

$$\vdots$$

$$f(\underline{a}_n) = \alpha_{1n}\underline{b}_1 + \alpha_{2n}\underline{b}_2 + \dots + \alpha_{mn}\underline{b}_m$$

Gli α_{ij} sono univocamente determinati da f e la determinano univocamente.



Costruiamo la matrice $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ le cui colonne sono le coordinate dei vettori $f(a_h)$, $h = 1 \dots n$, nella base \mathcal{B} :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Vogliamo dimostrare che $f = L_A$.

Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \Phi_{\mathcal{A}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{B}} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L_A} & \mathbb{K}^m \end{array} \quad (\diamond)$$

in cui $\Phi_{\mathcal{A}}$ denota l'applicazione che ad ogni vettore di V associa le sue coordinate nella base \mathcal{A} e $\Phi_{\mathcal{B}}$ quella che ad ogni vettore di W associa le sue coordinate nella base \mathcal{B} .

Il “quadrato” (\diamond) commuta, ossia si ha

$$(\star) \quad L_A \circ \Phi_{\mathcal{A}} = \Phi_{\mathcal{B}} \circ f.$$

Trattandosi di applicazioni lineari, (per il teorema di esistenza e unicità) basta verificare l'uguaglianza (\star) sui vettori di una base.

Verifichiamola sui vettori della base $\mathcal{A} = \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$.

Ad esempio, per \underline{a}_1 ,

$$L_A \circ \Phi_{\mathcal{A}}(\underline{a}_1) = L_A(\underline{e}_1) = \text{I colonna di } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{\mathcal{B}} \circ f(\underline{a}_1) = \Phi_{\mathcal{B}}(\alpha_{11}\underline{b}_1 + \alpha_{21}\underline{b}_2 + \dots + \alpha_{m1}\underline{b}_m) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}.$$

In generale,

$$L_A(\Phi_A(\underline{a}_i)) = A_{(i)} = i\text{-esima colonna di } A$$

$$\Phi_B(f(\underline{a}_i)) = A_{(i)} = i\text{-esima colonna di } A$$

quindi

$$L_A \circ \Phi_A = \Phi_B \circ f.$$

Ricapitolando:

- tutti gli spazi vettoriali f.g. sono del tipo \mathbb{K}^n ;
- tutte le applicazioni lineari tra spazi vettoriali f.g. sono del tipo L_A .

Abbiamo visto che, dati due spazi vettoriali V e W di dimensioni rispettive n e m , e date le basi (ordinate) \mathcal{A} e \mathcal{B} di V e W rispettivamente, ad una applicazione lineare $f : V \rightarrow W$ può essere associata una matrice A tale che essenzialmente si abbia $f^{\mathcal{A}\mathcal{B}} = L_A$.

La matrice A si dice *associata ad f rispetto alle basi \mathcal{A} e \mathcal{B}* o *rappresentativa di f rispetto alle basi \mathcal{A} e \mathcal{B}* e si scrive

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f).$$

Abbiamo costruito un'applicazione

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : L(V, W) \rightarrow \text{Mat}_{m,n}, \quad f \mapsto A$$

Siano V, W e Z spazi vettoriali (su \mathbb{K}) di dimensioni rispettive n, m e l , con basi rispettive \mathcal{A}, \mathcal{B} e \mathcal{C} e siano $f : V \rightarrow W$ e $g : W \rightarrow Z$ applicazioni lineari.

PROPRIETÀ (si omettono le dimostrazioni)

- $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ è un isomorfismo tra gli spazi vettoriali $L(V, W)$ e $Mat_{m,n}$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(g \circ f) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(g) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f),$$

cioè alla composizione di applicazioni lineari corrisponde il prodotto riga per colonna delle matrici rappresentative.

- Nel caso $m = n$, $V = W$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ si ha

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(id_V) = I_m.$$

- Nel caso $m = n$, se $f : V \rightarrow W$ è un isomorfismo, e $f^{-1} : W \rightarrow V$ è l'isomorfismo inverso, allora la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ è invertibile e si ha

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}).$$



Conseguenza:

se V è uno spazio vettoriale e \mathcal{A}, \mathcal{B} sono due sue basi, e $f : V \rightarrow V$ è un endomorfismo, allora esiste una matrice invertibile N tale che

$$(*) \quad \mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = N^{-1} \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot N.$$

Infatti basta prendere $N = \mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(id_V)$ (verificarlo).

Due matrici quadrate $A, B \in Mat_n$ si dicono *simili* se esiste una matrice invertibile $N \in GL(n)$ tale che $B = N^{-1} \cdot A \cdot N$.

La formula (*) mostra che le matrici rappresentative rispetto a basi diverse di uno stesso endomorfismo sono matrici simili (si noti però che in entrambi i casi la base deve essere la stessa in dominio e codominio!).

OSSERVAZIONE - Nel caso $V = \mathbb{K}^n, W = \mathbb{K}^m$ e $f = L_A$, con $A \in Mat_{m,n}$, la matrice rappresentativa rispetto alle basi canoniche di L_A è proprio A .

- 1 Applicazioni lineari
- 2 Nucleo e immagine di un'applicazione
- 3 Isomorfismo di spazi vettoriali
- 4 La matrice rappresentativa
- 5 Il determinante**
- 6 Sottomatrici e minori
- 7 Sul significato del rango

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Definizione di determinante

In questo e nel prossimo capitolo saranno omesse molte dimostrazioni.

Ricordo che una permutazione su n elementi è un'applicazione biunivoca $\sigma : J_n \rightarrow J_n$, ove $J_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

$$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Si dice che σ è di *classe pari* (rispett. *dispari*) se si passa da $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ a $(1, 2, \dots, n)$ con un numero pari (rispett. dispari) di scambi.

ESEMPI $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ è di classe pari, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ è di classe dispari.

Si dimostra che la definizione di classe pari e dispari è ben posta, ovvero non dipende dal modo con cui σ si ottiene come composizione di scambi.

Data $\sigma \in S_n$ (gruppo simmetrico su n elementi), definiamo

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma \text{ è pari,} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Sia $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$, $A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$. Si definisce *determinante* di A :

$$(*) \quad \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \alpha_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}.$$

Esso è composto da $n!$ addendi.

Ciascun addendo contiene uno ed un solo fattore preso da ciascuna riga e ciascuna colonna (σ è biunivoca).



- Caso $n = 1$.

$$A = (\alpha_{11}) \quad S_1 = \{\sigma = id\} \quad \varepsilon(\sigma) = +1 \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = +\alpha_{11}.$$

- Caso $n = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \{\sigma_1 = id, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\}, \varepsilon(\sigma_1) = 1, \varepsilon(\sigma_2) = -1$$

$$\det A = +\alpha_{1\sigma_1(1)} \cdot \alpha_{2\sigma_1(2)} - \alpha_{1\sigma_2(1)} \cdot \alpha_{2\sigma_2(2)} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}.$$



- Caso $n = 3$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad \#S_3 = 3! = 6$$

$$\sigma_1 = id \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon(\sigma_1) = \varepsilon(\sigma_2) = \varepsilon(\sigma_3) = +1 \quad \varepsilon(\sigma_4) = \varepsilon(\sigma_5) = \varepsilon(\sigma_6) = -1$$

$$\det(A) = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} \\ - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}.$$



Data la matrice $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$, indichiamo con $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ le colonne di A e con $A_{(1)}, \dots, A_{(n)}$ le righe di A :

$$A = (A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}.$$

Il determinante può essere interpretato in vari modi;

a) $\det : \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \quad A \mapsto \det A;$

b) $\det : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K} \quad (A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) \mapsto \det A;$

c) $\det : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K} \quad \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \mapsto \det A.$



Proprietà del determinante

D'ora in poi supporremo sempre che sia $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, oppure \mathbb{C} .
Siano $A, B \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$.

- 1) $\det({}^t A) = \det A$;
- 2) scambiando tra loro due colonne, il determinante cambia (solo) il segno (idem per le righe) (il determinante è *alternante*)

$$\det(\dots, A^{(i)}, \dots, A^{(j)}, \dots) = -\det(\dots, A^{(j)}, \dots, A^{(i)}, \dots);$$
- 3) il determinante è lineare in ogni colonna, fissate le altre $n - 1$ colonne (idem per le righe) (il determinante è *multilineare*);

$$\det(\dots, \lambda \underline{B} + \mu \underline{C}, \dots) = \lambda \det(\dots, \underline{B}, \dots) + \mu \det(\dots, \underline{C}, \dots);$$



- 4) sia $I = I_n$ la matrice identica, $\det I = 1$;
- 5) (teorema di Binet) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$;
- 6) le colonne di A sono l.d. se e solo se $\det A = 0$ (idem per le righe);
- 7) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ ($\lambda \in \mathbb{K}$);
- 8) A ammette inversa A^{-1} se e solo se $\det(A) \neq 0$, e inoltre, se $\det(A) \neq 0$, si ha $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Cenno alla dimostrazione di alcune tra le proprietà del determinante viste sopra.

La 2) segue dalla definizione di $\epsilon(\sigma)$;

la 3) segue dal fatto che in ogni addendo del determinante (\star) compare uno e un solo fattore preso da ciascuna colonna (idem per le righe);

la 4) è di verifica immediata;

la 7) segue dalla 3) tenendo conto del fatto che moltiplicare una matrice per uno scalare equivale a moltiplicare ciascuna colonna (o riga) per lo stesso scalare;

per la 8) si veda dopo.



Per la dimostrazione della 6), si osservi anzitutto che

LEMMA - Se A ha due colonne uguali allora $\det(A) = 0$ (idem per le righe).

Infatti, per la proprietà 2), scambiando tra loro le due colonne uguali, la matrice non cambia eppure il determinante cambia segno.

Verifichiamo ora proprietà 6).

Anzitutto, se le colonne di A sono l.i., almeno una di esse è combinazione delle altre. Per la proprietà 3) il determinante di A può essere allora scritto come combinazione lineare di determinanti di matrici con due colonne uguali. Dal Lemma segue quindi che $\det(A) = 0$.

Viceversa, sia $\det(A) = 0$. Se per assurdo le colonne $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ di A fossero l.i., esse costituirebbero una base di \mathbb{K}^n , quindi anche i vettori della base canonica potrebbero essere scritti come combinazione lineare di tali colonne:

$$\underline{e}_i = \beta_{1i}A^{(1)} + \dots + \beta_{ni}A^{(n)}.$$

Consideriamo la matrice $B = (\beta_{ji})$ e la matrice prodotto $C = A \cdot B$. La colonna $C^{(i)}$ è

$$C^{(i)} = \beta_{1i}A^{(1)} + \dots + \beta_{ni}A^{(n)} = \underline{e}_i,$$

pertanto C è la matrice identica e $1 = \det(C) = \det(A) \det(B) = 0$, assurdo.

OSSERVAZIONE - Si potrebbe dimostrare che \det è l'unica applicazione multilineare alternante $\det : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ tale che $\det I = 1$.



1 Applicazioni lineari

2 Nucleo e immagine di un'applicazione

3 Isomorfismo di spazi vettoriali

4 La matrice rappresentativa

5 Il determinante

6 Sottomatrici e minori

7 Sul significato del rango



Sia $M \in \text{Mat}_{m,n}$ una matrice con m righe e n colonne.

Si dice *sottomatrice* di M una qualsiasi matrice che si ottiene cancellando da M alcune righe (eventualmente nessuna) e alcune colonne (eventualmente nessuna).

Si dice *minore* di M il determinante di una sua qualsiasi sottomatrice quadrata.

Se $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n,n}$ è una matrice quadrata, si dice *minore complementare* dell'elemento a_{ij} il determinante della sottomatrice M_{ij} di A che si ottiene cancellando la riga i -esima e la colonna j -esima.

Si dice *complemento algebrico* (o *cofattore*) dell'elemento a_{ij} il numero

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Si dice *matrice dei cofattori* di A la matrice $\text{cof}(A) = (A_{ij}) \in \text{Mat}_{n,n}$

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ allora } \text{cof}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$



TEOREMA (I teorema di Laplace - Data $A \in Mat_{n,n}(\mathbb{K})$, è (per la i -esima riga):

$$\det A = \alpha_{i1}A_{i1} + \alpha_{i2}A_{i2} + \cdots + \alpha_{in}A_{in};$$

(per la j -esima colonna):

$$\det A = \alpha_{1j}A_{1j} + \alpha_{2j}A_{2j} + \cdots + \alpha_{nj}A_{nj}.$$

TEOREMA II teorema di Laplace - Data $A \in Mat_{n,n}(\mathbb{K})$, è (per le righe):

$$\text{se } i \neq j, \quad \alpha_{i1}A_{j1} + \alpha_{i2}A_{j2} + \cdots + \alpha_{in}A_{jn} = 0;$$

(per le colonne):

$$\text{se } i \neq j, \quad \alpha_{1i}A_{1j} + \alpha_{2i}A_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}A_{nj} = 0.$$

Il I teorema di Laplace fornisce un metodo (di tipo ricorsivo) per il calcolo del determinante.

Ad esempio, nel caso $n = 3$, per la prima riga si ha:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

(il calcolo di determinanti $k \times k$ viene ridotto a quello di determinanti $(k - 1) \times (k - 1)$).



La matrice dei cofattori $\text{cof}(A)$ può essere utile per il calcolo della matrice inversa.

Si ha

LEMMA - $A \cdot {}^t(\text{cof}(A)) = \det A \cdot I$.

Infatti, ad esempio per $n = 3$,

$$A \cdot (\text{cof}(A))_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{pmatrix},$$

e l'ultima uguaglianza segue dal I teorema di Laplace (per gli elementi della diagonale) e dal II teorema di Laplace per gli elementi fuori dalla diagonale.

Ne segue il

TEOREMA -

Sia $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ con $\det A \neq 0$. Allora si ha $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{cof}(A))_T$.

Sia A una matrice quadrata $n \times n$, con $\det(A) \neq 0$, e $\mathbf{b} \in \mathbb{K}$.

Il sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha una e una sola soluzione data da $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ con

$$x_i = \frac{\det(A^1, \dots, \mathbf{b}, \dots, A^n)}{\det A},$$

ove $(A^1, \dots, \mathbf{b}, \dots, A^n)$ denota la matrice ottenuta da A sostituendo la i -esima colonna con il vettore \mathbf{b} .

Questo risultato segue dall'espressione della matrice inversa in termini di matrice dei cofattori.

Infatti si ha

$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{\det A} (\text{cof}(A))_T \cdot \mathbf{b}.$$

Pertanto

$$x_i = \frac{1}{\det A} \left(\sum A_{ki} b_k \right) = \frac{\det(A^1, \dots, \mathbf{b}, \dots, A^n)}{\det A}$$

(l'ultima uguaglianza segue dallo sviluppo del determinante di $(A^1, \dots, \mathbf{b}, \dots, A^n)$ secondo la i -esima colonna e dalla osservazione che i minori complementari degli elementi della i -esima colonna di $(A^1, \dots, \mathbf{b}, \dots, A^n)$ e di A sono gli stessi).



1 Applicazioni lineari

2 Nucleo e immagine di un'applicazione

3 Isomorfismo di spazi vettoriali

4 La matrice rappresentativa

5 Il determinante

6 Sottomatrici e minori

7 **Sul significato del rango**



Varie nozioni di rango

Sia $M \in \text{Mat}_{m,n}$.

Si dice *rango per colonne* di A la dimensione del sottospazio $C(M) = \langle M^{(1)}, \dots, M^{(n)} \rangle \subseteq \mathbb{K}^m$ generato dalle colonne di M .

Analogamente si dice *rango per righe* di M la dimensione del sottospazio $R(M) = \langle {}^t M_{(1)}, \dots, {}^t M_{(m)} \rangle \subseteq \mathbb{K}^n$ generato dalle righe di M (più precisamente si tratta del sottospazio di \mathbb{K}^n generato dai vettori colonna che si ottengono trasponendo le righe di M).

Si dice poi *rango per minori* di una matrice M è il massimo ordine $\mu(M)$ di minori non nulli estratti dalla matrice M ,
ossia

M ha rango r se e solo se esiste un minore non nullo $r \times r$ di M e tutti i minori $s \times s$ di M , con $s > r$, sono nulli,

o, equivalentemente,

M ha rango r se e solo se esiste un minore non nullo $r \times r$ di M e tutti i minori $(r+1) \times (r+1)$ di M sono nulli.

Vedremo tra poco che è

$$* \quad \mu(M) = \dim(C(M)) = \dim(R(M)).$$

La relazione $\mu(M) \leq \dim(C(M))$ è semplice conseguenza della proprietà 6) del determinante (idem per $\dim(R(M))$).

Infatti, se in M esiste un minore $\mu \times \mu$ non nullo, le colonne di M corrispondenti a quel minore sono l.i.: le colonne del minore sono costituite dagli elementi delle colonne della matrice presi da righe fissate e quindi una relazione di dipendenza lineare tra le colonne di M indurrebbe, in particolare, la medesima relazione tra le colonne del minore.



Per la dimostrazione dell'uguaglianza (*) conviene premettere alcune osservazioni sul prodotto di matrici.

OSSERVAZIONE 1 (prodotto di matrici a blocchi) - Siano M ed M' due matrici conformabili (ossia tali che il numero di colonne di M sia uguale al numero di righe di M') e scriviamo M ed M' come *matrici a blocchi*

$$M = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} P' & Q' \\ R' & S' \end{pmatrix}$$

ove P e P' sono conformabili (e di conseguenza anche Q ed R' lo sono, e lo stesso accade per P e Q' , per Q ed S' , per R e P' , per S e R' , per R e Q' e per S e S').

Si ha

$$M \cdot M' = \begin{pmatrix} P \cdot P' + Q \cdot R' & P \cdot Q' + Q \cdot S' \\ R \cdot P' + S \cdot R' & R \cdot Q' + S \cdot S' \end{pmatrix},$$

ove tutti i \cdot denotano il prodotto righe per colonne.

OSSERVAZIONE 2 - Siano P e Q matrici conformabili e sia $N = P \cdot Q$. Le colonne della matrice N sono combinazioni lineari delle colonne di P e le righe della matrice N sono combinazioni lineari delle righe di Q .

TEOREMA (di Kronecker) - Sia M una matrice a m righe e n colonne della forma

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

con A, B, C, D rispettivamente di tipo $r \times r, r \times (n - r), (m - r) \times r, (m - r) \times (n - r)$.

Supponiamo che sia $\det(A) \neq 0$, e che tutti i minori che orlano A siano nulli.

Allora esistono una matrice U di tipo $r \times (n - r)$ e una matrice V di tipo $(m - r) \times r$ tali che sia $B = A \cdot U, C = V \cdot A$ e $D = V \cdot A \cdot U$, ovvero tali che sia

$$M = \begin{pmatrix} A & A \cdot U \\ V \cdot A & V \cdot A \cdot U \end{pmatrix}.$$

(in particolare, se M ha rango r , a meno di scambi di righe e di colonne le ipotesi del teorema sono verificate)

Dimostrazione - Iniziamo con l'osservare che se $r = m$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$,
 basta porre $U = A^{-1} \cdot B$.

Analogamente, se $r = n$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, basta porre $V = C \cdot A^{-1}$.

Resta da dimostrare il teorema per $r < m, n$. Ci limitiamo qui a farlo nel solo caso $m = n = r + 1$.

Nel caso in esame si ha $M = \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^t & d \end{pmatrix}$, con $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{K}^r$ e con $d \in \mathbb{K}$. Per ipotesi si ha $\det(A) \neq 0$ e $\det(M) = 0$ (M orla A).

Poniamo $V = \mathbf{v}^t = \mathbf{c}^t \cdot A^{-1}$ e $U = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$. Si ha allora $\mathbf{b} = A \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{c}^t = \mathbf{v}^t \cdot A$.
 Occorre solo dimostrare che risulta $d = \mathbf{v}^t \cdot A \cdot \mathbf{u}$, così si avrà

$$M = \begin{pmatrix} A & A \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^t \cdot A & \mathbf{v}^t \cdot A \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix},$$

come richiesto.

Consideriamo la matrice ausiliaria $\Delta = \begin{pmatrix} I & -\mathbf{u} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix}$, ove I è la matrice identica di ordine r .

$$\begin{aligned} \text{Poniamo } M' &= M \cdot \Delta = \begin{pmatrix} A & A \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^t \cdot A & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & -\mathbf{u} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} A \cdot I + A \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{0}^t & A \cdot (-\mathbf{u}) + A \cdot \mathbf{u} \cdot 1 \\ \mathbf{v}^t \cdot A \cdot I + d \cdot \mathbf{0}^t & \mathbf{v}^t \cdot A \cdot (-\mathbf{u}) + d \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^t \cdot A & d - \mathbf{v}^t \cdot A \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si ha $\det(M') = \det(M) \det(\Delta) = 0$.

D'altra parte, sviluppando il determinante di M' secondo l'ultima colonna, si ottiene $\det(M') = (d - \mathbf{v}^t \cdot A \cdot \mathbf{u}) \det(A)$.

Essendo $\det(A) \neq 0$ si ricava $d = \mathbf{v}^t \cdot A \cdot \mathbf{u}$, cioè la tesi.

Nelle ipotesi del teorema di Kronecker quindi la matrice assume la forma

$$M = \begin{pmatrix} A & A \cdot U \\ V \cdot A & V \cdot A \cdot U \end{pmatrix},$$

ovvero $M = \begin{pmatrix} X & X \cdot U \end{pmatrix}$, con $X = \begin{pmatrix} A \\ V \cdot A \end{pmatrix}$,

o anche $M = \begin{pmatrix} Y \\ V \cdot Y \end{pmatrix}$, con $Y = \begin{pmatrix} A & A \cdot U \end{pmatrix}$.

Se ne deduce che le ultime $(n - r)$ colonne di M sono combinazioni lineari delle prime r , e analogamente le ultime $(m - r)$ righe sono combinazioni lineari delle prime r . Inoltre le prime r colonne (righe) sono linearmente indipendenti (dal momento che $\det(A) \neq 0$), quindi la dimensione dello spazio generato dalle colonne (righe) è r .

Inoltre, a priori, nell'enunciato del teorema si richiedeva solo che i minori $(r + 1) \times (r + 1)$ orlanti A fossero nulli, mentre a posteriori si ricava che tutti i minori $(r + 1) \times (r + 1)$ sono nulli (e di conseguenza r è anche il rango per i minori). Infatti se esistesse un minore $(r + 1) \times (r + 1)$ non nullo, le corrispondenti colonne (e righe) sarebbero linearmente indipendenti.



Abbiamo così ricavato l'uguaglianza (*). D'ora in poi rango per righe, rango per colonne e rango per minori verranno semplicemente chiamati *rango*.

Metodo di Kronecker (o dei minori orlati) per il calcolo del rango.

Si cerca un minore non nullo, diciamo $h \times h$, di M .

Si considerano tutti i minori $(h + 1) \times (h + 1)$ che "orlano" il minore $h \times h$ di cui sopra.

Se tutti questi minori sono nulli, il rango di A è h , altrimenti il rango è almeno $h + 1$ ed esiste un minore $(h + 1) \times (h + 1)$ non nullo.

Si considerano tutti i minori $(h + 2) \times (h + 2)$ che "orlano" il minore $(h + 1) \times (h + 1)$ di cui sopra, ...



Reinterpretazione del

TEOREMA (di Rouché Capelli) - Il sistema lineare di m equazioni in n incognite $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha soluzioni se e solo se il rango della matrice dei coefficienti L coincide con il rango della matrice completa $[L|\mathbf{b}]$. Inoltre, se il sistema è risolubile, le soluzioni del sistema sono ∞^{n-r} , ove n è il numero delle incognite e r è il rango di L (e di $[L|\mathbf{b}]$).

Dimostrazione

$L\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha soluzioni se e solo se $\mathbf{b} \in \text{Im}(L)$ se e solo se

$\mathbf{b} \in C(L) = \langle L^{(1)}, \dots, L^{(n)} \rangle$ se e solo se

$\langle L^{(1)}, \dots, L^{(n)} \rangle = \langle L^{(1)}, \dots, L^{(n)}, \mathbf{b} \rangle$ se e solo se

$\dim(\langle L^{(1)}, \dots, L^{(n)} \rangle) = \dim(\langle L^{(1)}, \dots, L^{(n)}, \mathbf{b} \rangle)$ se e solo se il

rango (per colonne) di L è uguale al rango (per colonne) di $[L|\mathbf{b}]$.

Se il sistema ha soluzioni, si può supporre che la matrice completa $M = [L|\mathbf{b}]$

sia nella forma del teorema di Kronecker $M = \begin{pmatrix} A & A \cdot U \\ V \cdot A & V \cdot A \cdot U \end{pmatrix}$, per

cui le ultime $m - r$ equazioni sono linearmente dipendenti dalle prime r e quindi possono essere cancellate.



Nel sistema di r equazioni in n incognite che resta, si possono interpretare del ultime $n - r$ incognite come parametri. Lasciando nelle equazioni a primo membro solo gli addendi relativi alle prime r incognite si giunge a un sistema della forma $Az = \mathbf{y}$, in cui il vettore delle incognite \mathbf{z} è costituito dalle prime r incognite del sistema precedente ed in cui il vettore dei termini noti \mathbf{y} dipende da $n - r$ parametri.

Il sistema $Az = \mathbf{y}$ ammette l'unica soluzione $\mathbf{z} = A^{-1} \cdot \mathbf{y}$ (che dipende da $n - r$ parametri), da cui la tesi.

OSSERVAZIONE - Abbiamo così ricavato quindi un ulteriore significato del concetto di rango: il rango di una matrice è uguale anche alla sua caratteristica (ossia al numero dei pivot non nulli di una sua riduzione a scalini).



OSSERVAZIONE - Sia $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$. Abbiamo visto che l'immagine dell'applicazione lineare $L_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ (definita da $\underline{x} \mapsto A \cdot \underline{x} = \underline{y}$) è generata dalle colonne di A . Pertanto il rango (per colonne) di A coincide anche con la dimensione dell'immagine di L_A .

In conclusione il "rango" di una matrice può essere equivalentemente interpretato come

- rango per minori,
- rango per colonne,
- rango per righe,
- caratteristica,
- dimensione dell'immagine dell'applicazione lineare associata.

