www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Relazioni tra insiemi

Una Relazione tra gli insiemi A e B
è un sottoinsieme del prodotto cartesiano di A e B

$R \subseteq A \times B$

Se $(a,b) \in R \longrightarrow$ a è in relazione con b

$(a,b) \in R \longrightarrow a R b$

$(a,b) \notin R \longrightarrow a \not R b$

Se $A = B$, $R \subseteq A \times A$ si dice relazione in A

Applicazioni

Siano A e B insiemi, $R \subset A \times B$ relazione

Si dice che R è un'applicazione di A in B se:

$\forall a \in A \ \exists! b \in B \mid a R b$

Si dice che b è l'immagine di a tramite R $\quad b = R(a)$

Si usa la notazione:

$$R: A \longrightarrow B$$
$$a \longrightarrow R(a)$$

Relazioni d'ordine

Una Relazione R in A $(R \subseteq A \times A)$ si dice d'ordine se verifica:

- Proprietà riflessiva: $\forall a \in A$, $a R a$
- Proprietà antisimmetrica: $a R b$ e $b R a \longrightarrow a = b$
- Proprietà transitiva: $a R b$ e $b R c \longrightarrow a R c$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Relazioni di Equivalenza

Una Relazione $R \subseteq A \times A$ si dice di Equivalenza se verifica

- Proprietà riflessiva : $\forall a \in A,\ aRa$
- Proprietà simmetrica : $\forall a,b \in A,\ aRb \leftrightarrow bRa$
- Proprietà transitiva : $aRb,\ bRc \rightarrow aRc$

Classi di Equivalenza

Sia $R \subseteq A \times A$ una relazione di equivalenza e $a \in A$
Si dice classe di equivalenza individuata da a l'insieme:

$$[a]_R = \{ b \in A \mid bRa \}$$

Si ha:

- $a \in [a]_R$
- se $bRa \rightarrow [b]_R = [a]_R$
- se $b \not R a \rightarrow [b]_R \cap [a]_R = \emptyset$

Le classi di equivalenza danno una partizione di A
(ogni elemento di A appartiene ad una e una sola di esse)

L'insieme delle classi di equivalenza $A/_R = \{ [a]_R \mid a \in A \}$
viene detto insieme quoziente di A modulo R

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Operazioni in un Insieme

Sia A un insieme. Un' operazione in A è un' applicazione

$$* : A \times A \longrightarrow A$$
$$(a, b) \longmapsto a * b$$

Esempi 1) Se $A = \mathbb{N}$ $+$, $\cdot$ sono operazioni
$-$ non lo è

2) dato X insieme, sia $A = \mathcal{P}(X)$ insieme delle parti di X, ossia
$A = \mathcal{P}(X) = \{ Y \mid Y \text{ sottoinsieme di } X \}$
Intersezione e unione sono operazioni

$$\cap : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$
$$(Y, Z) \longmapsto Y \cap Z$$

$$\cup : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$
$$(Y, Z) \longmapsto Y \cup Z$$

Strutture Algebriche

Una struttura algebrica è un insieme dotato di una o più operazioni (dove in alcuni casi la notazione di operazione avrà un significato un po' più generale) che soddisfano determinate proprietà

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Gruppi

Un gruppo $(G, *)$ é un insieme G dotato di un'operazione $*$ t.c.

- Proprietà Associativa: $\forall x, y, z \in G \quad (x*y)*z = x*(y*z)$
- Elemento Neutro: $\exists e \in G$ t.c. $\forall x \in G \quad e*x = x*e = x$
- Inverso: $\exists x \in G \ \exists \bar{x} \in G \quad x*\bar{x} = \bar{x}*x = e$

Un gruppo si dice Abeliano se verifica anche:

- Proprietà commutativa: $\forall x, y \in G \quad x*y = y*x$

Proprietà elementari dei gruppi

- L'elemento neutro é unico

DIM Siano e ed e' elementi neutri

$e = e * e' = e'$ Entrambi dovrebbero lasciare l'altro invariato

- Dato $x \in G$, l'inverso $\bar{x}$ di x é unico

DIM Siano $\bar{x}$ e $\bar{\bar{x}}$ inversi di x

$$\bar{x} = \bar{x} * e \underset{\uparrow \ \bar{\bar{x}} \text{ inverso di } x}{=} \bar{x} * (x * \bar{\bar{x}}) \underset{\uparrow \text{ Prop. ass.}}{=} (\bar{x} * x) * \bar{\bar{x}} \underset{\uparrow \ \bar{x} \text{ é inverso di } x}{=} e * \bar{\bar{x}} = \bar{\bar{x}}$$

$\uparrow$ e neutro

- Valgono le leggi di cancellazione

$\cancel{x} * y = \cancel{x} * z \longrightarrow y = z$

- $\overline{x * y} = \bar{y} * \bar{x}$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

- $(x^{-1})^{-1} = x$

DIM $x * x^{-1} = e$

$x^{-1} * x = e$

Potenza di un elemento in un gruppo

Sia $x \in G$. Poniamo per definizione:

- $x^0 = e$
- $x^1 = x$
- $x^2 = x * x$
- $x^3 = (x * x) * x = x * (x * x) = x * x * x$
- $n \in \mathbb{N}$, $x^n = x * x * x \dots * x$ n volte
- $x^{-n} = \bar{x} * \bar{x} \dots * \bar{x}$ n volte

Valgono le proprietà:

- $x^m * x^n = x^{m+n}$
- $(x^m)^n = x^{mn}$

Gruppi di Permutazioni

Sia $J_n = \{1, 2, 3 \dots n\}$. Una permutazione su n elementi é un' applicazione biunivoca $\sigma : J_n \longrightarrow J_n$

Notazione: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

esempio: per $n = 3$ $\quad \sigma : 1 \to 1, \; 2 \to 3, \; 3 \to 2$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

L'insieme delle permutazioni su n elementi viene

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

denominato con S_n

$(S_n, \circ)$ (ove $\circ$ denota la composizione) é un gruppo in cui l'elemento neutro é la permutazione identica: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$

L'inverso é la permutazione che fa tornare allo stato di partenza

Il gruppo $(S_n, \circ)$ non é abeliano

Esempio S_3 con 6 permutazione

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\gamma \circ \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \delta \\ \\ \gamma \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \alpha$$

$$\delta \circ \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \gamma \\ \\ \delta \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \beta$$

Si possono avere distinzioni di classe di permutazioni

- Pari Si ottengono con un numero pari di scambi
- Dispari Si ottengono con un numero dispari di scambi

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Strutture Anelli e Campi

Un anello é un insieme dotato di due operazioni (es $(A, +, \cdot)$) t.c.

- $(A, +)$ é un gruppo abeliano, con elemento neutro 0_A $(\emptyset)$ e inverso di a denotato con $-a$ (opposto)
- $\cdot$ é associatura ed é dotato di elemento neutro 1_A (unitá)
- Valgono le proprietá distributive, ossia $\forall a, b, c \in A$ $a \cdot (b + c) = a b + a c$

ESEMPI $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\underset{\text{POLINOMI}}{\mathbb{R}[x]}, +, \cdot)$ Sono Anelli

Anelli Commutativi

Un anello si dice commutativo se anche $\cdot$ é commutativo. Gli esempi precedenti sono anelli commutativi

Campi

Un anello $(K, +, \cdot)$ si dice campo se $(\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0_K\}, \cdot)$ (vuol dire che tolgo lo 0_K rispetto a $\cdot$) é un gruppo abeliano (ossia $\cdot$ é commutativo e inoltre tutti gli elementi $\neq 0_K$ di K ammettono inverso rispetto $\cdot$)

ESEMPI $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sono campi

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ non é un campo

$(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ non é un campo $\to$ Gli unici elementi con inverso sono le costanti $\neq 0$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Matrici - Operazioni tra Matrici

Una matrice é una tabella a doppia entrata. La matrice $m \times n$ ha m righe e n colonne a coefficienti in campo $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots m \\ j = 1, 2, \dots n \end{matrix}$$

$(a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in})$
i esima riga di A

jesima colonna di A $\begin{pmatrix} a_{1j} \dots \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

$a_{ij} \in \mathbb{K}$

L'insieme delle Matrici $m \times n$ si denota con $Mat_{m,n}$ o $Mat_{m,n}(\mathbb{K})$. Se $m = n$ si scrive $Mat_n = Mat_{n,n}$ (Matrici Quadrate)

In $Mat_{m,n}$ si introducono alcune operazioni:

Somma

$$+ : Mat_{m,n} \times Mat_{m,n} \longrightarrow Mat_{m,n}$$

$$((a_{ij}), (b_{ij})) \longmapsto (a_{ij} + b_{ij})$$

$(Mat_{m,n}, +)$ é un gruppo abeliano in cui l'elemento neutro é la Matrice nulla O

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

e in cui l'opposto della matrice $A = (a_{ij})$ è la matrice $-A = (-a_{ij})$

ESEMPIO: $-\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -4 & -8 & 3 \end{pmatrix}$

Prodotto per uno Scalare

Uno scalare è un elemento di $\mathbb{K}$
Il prodotto per uno scalare non è un'operazione interna

$$\cdot : \mathbb{K} \times Mat_{m,n} \longrightarrow Mat_{m,n}$$
$$(\lambda, (a_{ij})) \longmapsto (\lambda a_{ij})$$

Prodotto Righe per Colonne

Due matrici $A \in Mat_{m,n}$ e $B \in Mat_{s,p}$ si dicono moltiplicabili se $n = s$

A $m \times n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ogni riga ha n elementi

B $n \times p$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{np} \end{pmatrix}$$

ogni colonna ha n elementi

Se sono moltiplicabili, si può costruire la matrice (prodotto righe per colonne) di A per B così:

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots m \\ j=1,\dots p}}$ ove $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} \dots + a_{in} b_{nj}$

Si scrive $C = A \cdot B$ e si ha $C \in Mat_{m,p}$

$$Mat_{mn} \times Mat_{np} \longrightarrow Mat_{m,p}$$
$$(A, B) \longmapsto A \cdot B$$

Nel caso $m = n = p$ é un'operazione interna

$$Mat_n \times Mat_n \longrightarrow Mat_n$$
$$(A, B) \longmapsto A \cdot B$$

Nota: A e B possono essere moltiplicabili senza che lo siano B e A

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

L'elemento neutro é la matrice identica

$$I_n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}) \qquad \delta_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Indice di Kronecker

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Se A è $m \times n$ allora:

$I_m \cdot A = A$ e $A \cdot I_n = A$

Proprietà delle operazioni tra Matrici

Ove hanno senso valgono: (es. PER FARE $B+C$ devono essere entrambe $m \times n$)

i) $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$

ii) $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

iii) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

iv) $\lambda (A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$

$(Mat_n, +, \cdot)$ è un anello non commutativo in cui l'unità è $1_{Mat_n} = I_n$

Trasposizione

Data la Matrice $A = (a_{ij}) \in Mat_{m,n}$ si dice trasposta di A la matrice

$$A^T = (b_{h,k}) \in Mat_{n,m} \quad \text{con} \quad b_{hk} = a_{kh}$$

ESEMPIO
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

PROPRIETÀ DELLA TRASPOSIZIONE

i) $(A+B)^T = A^T + B^T$

ii) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

iii) $(A^T)^T = A$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

MATRICI E SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

CONSIDERIAMO LA MATRICE $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ e i VETTORI (VETTORE = matrice $n \times 1$ o $1 \times n$)

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'ESPRESSIONE $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ SI TRADUCE IN

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Sistema di 2 equazioni lineari in 3 incognite

$\underset{2 \times 3}{A}$

In generale un sistema di m equazioni lineari in n incognite a coefficienti in $\mathbb{K}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{con} \quad \left[\begin{array}{ll} a_{ij} \in \mathbb{K} & i = 1, \dots m \\ & j = 1, \dots n \\ b_h \in \mathbb{K} & h = 1, \dots m \\ x_1, x_2, \dots x_n & \text{incognite} \end{array} \right.$$

Si traduce in

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b} \quad \text{dove} \quad \underset{m \times n}{A} = (a_{ij}) \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matrice dei coefficienti

Vettore dei termini noti

Vettore delle incognite

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Sia

$$(*) \quad A \cdot \underline{x} = \underline{b} \qquad A = (a_{ij})$$

Un sistema di equazioni lineare di m equazioni in n incognite

A $m \times n$ $\quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \underline{b} \in \mathbb{K}^m$

Una soluzione di $(*)$ è un vettore $\tilde{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ tale che

$A \cdot \tilde{\underline{x}} = \underline{b}$ (operazione in $\mathbb{K}$) ossia

$$\left.\begin{cases} a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + \dots a_{1n}\tilde{x}_n = b_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}\right\} \text{Operazioni in } \mathbb{K}$$

Un sistema si dice:

- Impossibile: non ammette soluzione
- Determinato: ammette una e una sola soluzione
- Indeterminato: ammette ∞ soluzioni

Due sistemi di equazioni lineari (con stesso numero di incognite) si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni

Esempi sistemi Semplici

i) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\exists!$ soluzione (determinato)

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

ii) $\begin{cases} 3 - y + w = 0 \\ y + z = 2 \\ z - w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = y - w = 2 - w - w = 2 - 2w \\ y = 2 - z = 2 - w \\ z = w \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2-2w}{3} \\ y = 2 - w \\ z = w \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \frac{2-2\alpha}{3} \\ 2-\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ $\forall \alpha$ è soluzione (indeterminato)

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Metodo di Gauss

Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema di m equazioni lineari in n incognite a coefficienti in $\mathbb{K}$

Cosiderando la matrice completa $(A|\underline{b})$

Strategia del metodo: passare da $(A|\underline{b})$ a $(A'|\underline{b}')$ tramite operazioni lecite (da un sistema a un altro equivalente) in modo che $(A'|b')$ sia semplice

Chiamiamo un sistema "semplice" se in ogni equazione compaiono meno incognite della precedente, quindi se la matrice ha una forma a gradini: in ogni riga il primo elemento non nullo é più a destra della riga precedente.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Operazioni Lecite (su $(A|\underline{b})$)

i) Scambiare due righe tra loro. Corrisponde a scambiare due equazioni del sistema

ii) Moltiplicare una riga per una costante $k \neq 0, k \in \mathbb{K}$. Corrisponde a moltiplicare ambo i membri di un'equazione per una costante.

iii) Se, ad esempio, l'operazione é del tipo

$R_2 \longmapsto R_2 + R_1$ nei corrispondenti sistemi si ha

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \end{cases} \longmapsto \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots a_{2n}x_n + \lambda(a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n) = b_2 + \lambda b_1 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Una soluzione del primo é anche soluzione del secondo

$$\begin{cases} a_{11}\tilde{x}_1 + \dots + a_{1n}\tilde{x}_n = b_1 \\ a_{21}\tilde{x}_1 + \dots + a_{2n}\tilde{x}_n + \lambda\underbrace{(a_{11}\tilde{x}_1 + \dots a_{1n}\tilde{x}_n)}_{b_1'} = b_2 + \lambda b_1 \end{cases}$$

é viceversa $R'_2 - \lambda R'_1 \longleftarrow R'_2$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari