

GEOMETRIA 1

quarta parte

Gilberto Bini - Cristina Turrini

2017/2018



1 Lo spazio duale

2 Forme bilineari

3 Il caso reale: spazi vettoriali euclidei

4 Il caso complesso: spazi vettoriali hermitiani

5 Endomorfismi autoaggiunti

6 Endomorfismi unitari

7 Riduzione a forma canonica delle forme quadratiche

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Siano V e W spazi vettoriali f.g. su un campo \mathbb{K} .

Nella seconda parte di questi appunti si è introdotto lo spazio $L(V, W)$ delle applicazioni lineari da V a W .

Nel caso particolare $W = \mathbb{K}$, lo spazio $L(V, W)$ viene detto *spazio duale* di V e denotato con V^* .

$$V^* = L(V, \mathbb{K}) = \{f : V \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ lineare}\}.$$

Gli elementi di V^* vengono detti *forme lineari* o *funzionali*.

Fissata una base $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ di V e la base $\mathcal{C} = \{1\}$ di \mathbb{K} si ha l'isomorfismo

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} : V^* \rightarrow \text{Mat}_{1,n} = \mathbb{K}^n.$$

Si ha pertanto:

$$\dim(V^*) = \dim(V) = n.$$



L'isomorfismo

$$\mathcal{M}_C^B : V^* \rightarrow \text{Mat}_{1,n} = \mathbb{K}^n,$$

associa ad un'applicazione $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ la sua matrice rappresentativa rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{C} , ossia il vettore colonna le cui componenti sono le coordinate dei vettori $f(\underline{b}_j)$ nella base $\mathcal{C} = \{1\}$, in altri termini si tratta del vettore $(f(\underline{b}_1), \dots, f(\underline{b}_n))$.

Pertanto nell'isomorfismo \mathcal{M}_C^B i vettori $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ della base canonica di \mathbb{K}^n corrispondono alle applicazioni lineari β_1, \dots, β_n così definite;

$$\beta_j(\underline{b}_h) = 0, j \neq h; \beta_j(\underline{b}_j) = 1.$$

$\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ è una base di V^* detta *base duale* della base \mathcal{B} .



- 1 Lo spazio duale
- 2 Forme bilineari**
- 3 Il caso reale: spazi vettoriali euclidei
- 4 Il caso complesso: spazi vettoriali hermitiani
- 5 Endomorfismi autoaggiunti
- 6 Endomorfismi unitari
- 7 Riduzione a forma canonica delle forme quadratiche

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Sia V uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} .

Una *forma bilineare* è un'applicazione

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

che sia lineare in ciascuno dei due argomenti, ovvero tale che, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$, si abbia:

- $b(\lambda \underline{u} + \mu \underline{v}, \underline{w}) = \lambda b(\underline{u}, \underline{w}) + \mu b(\underline{v}, \underline{w})$;
- $b(\underline{u}, \lambda \underline{v} + \mu \underline{w}) = \lambda b(\underline{u}, \underline{v}) + \mu b(\underline{u}, \underline{w})$.

OSSERVAZIONE - $b(\underline{0}, \underline{w}) = b(\underline{w}, \underline{0}) = 0, \forall \underline{w} \in V$.

Infatti

$$b(\underline{0}, \underline{w}) = b(0\underline{v}, \underline{w}) = 0b(\underline{v}, \underline{w}).$$

Data una matrice quadrata $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ l'applicazione $b_A : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ definita da

$$b_A(\underline{x}, \underline{y}) = {}^t \underline{x} A \underline{y},$$

è (una forma) bilineare.

L'applicazione b_A si dice *forma bilineare associata alla matrice A*.

Ad esempio, per $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, si ha

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= (x_1 - 2x_2, 5x_1 + 3x_2) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \\ (x_1 - 2x_2)y_1 + (5x_1 + 3x_2)y_2 &= x_1y_1 + 5x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2 \end{aligned}$$



In generale, per

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \text{ si ha}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1,\dots,n} x_i y_j \alpha_{ij}$$

Viceversa, se V è f.g. e $\dim(V) = n$, data una forma bilineare $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, e fissata una base $\mathcal{B} = \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ di V , si può costruire la matrice $A_b = (\alpha_{ij}) = (b(\underline{a}_i, \underline{a}_j))$, $1 \leq i, j \leq n$.

La matrice A_b si dice *representativa* della forma bilineare b rispetto alla base \mathcal{B} .

Se le coordinate dei vettori \underline{v} e \underline{w} nella base \mathcal{B} sono date rispettivamente da

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ allora si ha}$$

$$b(\underline{v}, \underline{w}) = {}^t \underline{x} A_b \underline{y}.$$

Infatti

$$b(\underline{v}, \underline{w}) = b(x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_n \underline{a}_n, y_1 \underline{a}_1 + \dots + y_n \underline{a}_n) = \sum_{i,j=1,\dots,n} x_i y_j b(\underline{a}_i, \underline{a}_j) = {}^t \underline{x} A_b \underline{y}.$$

Generalizzando la nozione di forma bilineare, si ottiene quella di forma multilineare.

Una *forma multilineare* è un'applicazione dal prodotto cartesiano di m copie di V a valori in \mathbb{K}

$$t : V \times V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

che sia lineare in ciascuno dei suoi argomenti, ovvero tale che,

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V, \forall j = 1, \dots, n$ si abbia:

- $t(\underline{w}_1, \dots, \lambda \underline{u}_j + \mu \underline{v}_j, \dots, \underline{w}_n) = \lambda t(\underline{w}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{w}_n) + \mu t(\underline{w}_1, \dots, \underline{v}_j, \dots, \underline{w}_n)$.

Se V è f.g., anche per le forme multilineari esiste un analogo delle matrici rappresentative.

Ad esempio, nel caso $m = 3$, una forma multilineare viene rappresentata rispetto a una base $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ dalla collezione degli elementi

$$\tau_{ijk} = t(\underline{b}_i, \underline{b}_j, \underline{b}_k) \in \mathbb{K}, \quad i, j, k = 1, \dots, n$$

disposti "a forma di cubo" $n \times n \times n$ (i indice di riga, j indice di colonna, k indice di profondità).

Nel corso ci occuperemo solo del caso $m = 2$ (forme bilineari).

In alcuni casi le forme bilineari e multilineari vengono chiamate *tensori*.



Una forma bilineare b si dice *simmetrica* se $b(\underline{v}, \underline{w}) = b(\underline{w}, \underline{v})$, $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$.

N.B. - Nel testo di Lang un'applicazione bilineare simmetrica viene detta *prodotto scalare*. Qui si preferisce non adottare questa definizione perché l'espressione prodotto scalare in molti testi ha un significato diverso (v. dopo).

Nel caso della forma b_A associata alla matrice A definita sopra, si ha che:

b_A è simmetrica se e solo se la matrice A è simmetrica ($A = {}^tA$) (verificarlo).

Una forma bilineare simmetrica si dice *non degenera* se verifica:

- se $\underline{v} \in V$ è un vettore tale che $b(\underline{v}, \underline{w}) = 0, \forall \underline{w} \in V$, allora $\underline{v} = \underline{0}$.

Un esempio di forma bilineare simmetrica in $V = \mathbb{K}^n$ è data da

$$b_I\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = {}^t\underline{x}I_n\underline{y},$$

con I_n matrice identica di ordine n .

La forma b_I è non degenere, infatti,

$$\forall \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \forall j = 1, \dots, n$$

si ha

$$b_I(\underline{x}, \underline{e}_j) = x_j, \text{ quindi, se } b_I(\underline{x}, \underline{e}_1) = \cdots = b_I(\underline{x}, \underline{e}_n) = 0 \text{ allora } \underline{x} = \underline{0}.$$



La nozione di ortogonalità

Sia V uno spazio vettoriale dotato di una forma bilineare simmetrica b .

Dati $\underline{v}, \underline{w} \in V$, si dice che $\underline{v}, \underline{w}$ sono *ortogonali* (o *perpendicolari*) e si scrive $\underline{v} \perp \underline{w}$ se $b(\underline{v}, \underline{w}) = 0$.

Se U è un sottospazio di V , l'insieme degli elementi di V ortogonali a tutti gli elementi di U , ovvero

$$U^\perp = \{ \underline{w} \in V \mid b(\underline{u}, \underline{w}) = 0, \forall \underline{u} \in U \}$$

viene detto *ortogonale* di U .

OSSERVAZIONE - U^\perp è un sottospazio (verificarlo) che viene detto *ortogonale* a U .

Inoltre, se

$$U = \langle \underline{s}_1, \dots, \underline{s}_k \rangle$$

allora

$$U^\perp = \{ \underline{w} \in V \mid \underline{w} \perp \underline{s}_i, i = 1, \dots, k \}.$$

In particolare, nel caso $U = V$, lo spazio V^\perp viene detto *annullatore* di b .

OSSERVAZIONE - b è non degenera se e solo se $V^\perp = \{0\}$.

ESEMPIO 1) - Siano $V = \mathbb{R}^3$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, h, k \in \mathbb{R} \right\}$ e $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

definita da

$$b\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) = a_1 b_1 - a_2 b_2,$$

si ha

$$U^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ s \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R} \right\}, \quad V^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

ESEMPIO 2) - Siano $V = \mathbb{R}^2$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix}, h \in \mathbb{R} \right\}$ e $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

definita da

$$b\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) = a_1 b_1 - a_2 b_2,$$

si ha

$$U^\perp = U, \quad V^\perp = \{0\}$$

(la restrizione di b a U è la forma nulla).



- 1 Lo spazio duale
- 2 Forme bilineari
- 3 Il caso reale: spazi vettoriali euclidei**
- 4 Il caso complesso: spazi vettoriali hermitiani
- 5 Endomorfismi autoaggiunti
- 6 Endomorfismi unitari
- 7 Riduzione a forma canonica delle forme quadratiche



Prodotti scalari definiti positivi

In tutto questo capitolo supporremo sempre che sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n .

Una forma bilineare simmetrica $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *definita positiva* se

- $\forall \underline{v} \in V$ si ha $b(\underline{v}, \underline{v}) \geq 0$,
- $b(\underline{v}, \underline{v}) = 0$ se e solo se $\underline{v} = \underline{0}$.

Una forma bilineare, simmetrica e definita positiva viene detta *prodotto scalare definito positivo* o *prodotto interno definito positivo* (talora semplicemente *prodotto scalare* o *prodotto interno*, ma come si è già detto, nel testo di Lang *prodotto scalare* vuol semplicemente dire forma bilineare simmetrica).

Abitualmente i prodotti scalari definiti positivi vengono denotati così:

$$b(\underline{v}, \underline{w}) = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$$

(da non confondersi con il sottospazio generato).



Ad esempio in $V = \mathbb{R}^n$ il prodotto scalare

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{b}_I(\underline{x}, \underline{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = {}^t\underline{x}I_n\underline{y},$$

ove I_n denota la matrice identica, è un prodotto scalare definito positivo detto *prodotto scalare canonico*.

Si dice *spazio vettoriale euclideo* (V, \langle, \rangle) uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare definito positivo \langle, \rangle .

OSSERVAZIONE - Un prodotto scalare definito positivo è non degenere.



In uno spazio euclideo (V, \langle, \rangle) si può introdurre una nozione di *norma*

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$$

e di distanza

$$\text{dist}(\underline{v}, \underline{w}) = \|\underline{v} - \underline{w}\|.$$

Nel caso $V = \mathbb{R}^3$, o $V = \mathbb{R}^2$, con il prodotto scalare canonico, si ottiene l'usuale nozione di distanza euclidea.

OSSERVAZIONE - Sia $V = \text{Vect}_O(\mathbb{R}^3)$ (oppure $V = \text{Vect}_O(\mathbb{R}^2)$). Possiamo introdurre in V un prodotto scalare che corrisponda al prodotto scalare canonico, attraverso l'isomorfismo $V \rightarrow \mathbb{R}^3$ (rispett. \mathbb{R}^2) che associa ogni vettore $\underline{v} \in V$ le sue componenti rispetto alla base $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ (rispett. $\underline{i}, \underline{j}$). Chiameremo canonico anche questo prodotto scalare.

PROPRIETÀ (si omettono le verifiche)

- 1) $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle^2 \leq \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle$ (*disuguaglianza di Schwarz*)
e vale l' = se e solo se \underline{v} e \underline{w} sono l.d.;
- 2) $|\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle| \leq \|\underline{v}\| \|\underline{w}\|$;
- 3) $\|\underline{v}\| \geq 0$ e vale = se e solo se $\underline{v} = \underline{0}$;
- 4) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda \underline{v}\| = |\lambda| \|\underline{v}\|$;
- 5) $\|\underline{v} + \underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$ (*disuguaglianza triangolare*).

Le proprietà 3), 4) e 5) sono le richieste caratteristiche per una norma.

In uno spazio euclideo, un vettore \underline{v} di norma $\|\underline{v}\| = 1$ viene detto *versore*.

La nozione di angolo

OSSERVAZIONE - Abbiamo visto che

$$|\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle| \leq \|\underline{v}\| \|\underline{w}\|;$$

Se $\underline{v} \neq \underline{0}$, $\underline{w} \neq \underline{0}$, ciò implica che

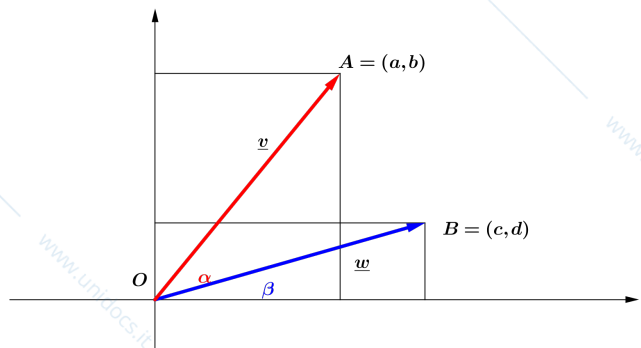
$$-1 \leq \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}{\|\underline{v}\| \|\underline{w}\|} \leq 1$$

Dati $\underline{v} \neq \underline{0}$, $\underline{w} \neq \underline{0}$, si dice *angolo* tra \underline{v} e \underline{w} (misurato in radianti) il numero reale θ , con $0 \leq \theta \leq \pi$ tale che

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}{\|\underline{v}\| \|\underline{w}\|}.$$

Nel caso di $\text{Vect}_O(\mathbb{R}^3)$ o $\text{Vect}_O(\mathbb{R}^2)$ con il prodotto scalare canonico, questa definizione è coerente con l'usuale nozione di angolo, infatti:





$$\cos(\theta) = \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) =$$

$$\frac{a}{\|v\|} \frac{c}{\|w\|} + \frac{b}{\|v\|} \frac{d}{\|w\|} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

Proiezioni ortogonali

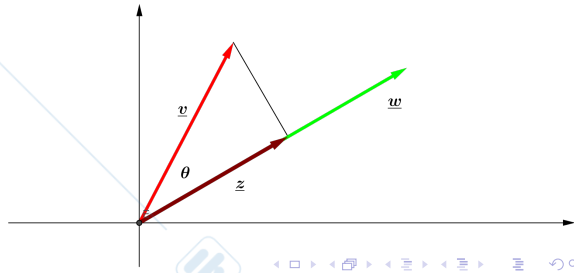
Dati $\underline{v} \neq \underline{0}$, $\underline{w} \neq \underline{0}$, si dice *proiezione ortogonale* di \underline{v} su \underline{w} il vettore \underline{z} così definito:

$$\underline{z} = \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}{\|\underline{w}\|^2} \underline{w} = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \frac{\underline{w}}{\langle \underline{w}, \underline{w} \rangle}$$

Nel caso dei vettori di $\text{Vect}_O(\mathbb{R}^2)$ questo è coerente con l'usuale significato di proiezione ortogonale, in quanto

$$\|\underline{z}\| = \|\underline{v}\| \cos(\theta) =$$

$$\|\underline{v}\| \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}{\|\underline{v}\| \|\underline{w}\|} = \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}{\|\underline{w}\|}$$



TEOREMA - Siano (V, \langle, \rangle) uno spazio vettoriale euclideo e $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ un insieme di vettori non nulli e a due a due ortogonali. Allora S è linearmente indipendente.

Dimostrazione

Supponiamo che esista una relazione del tipo

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = \underline{0}.$$

Applicando a entrambe i membri il prodotto scalare con v_j , $j = 1, \dots, k$, otteniamo

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k, v_j \rangle = \langle \underline{0}, v_j \rangle,$$

e quindi (ricordando che si tratta di vettori ortogonali)

$$\alpha_j \langle v_j, v_j \rangle = 0,$$

ossia (dal momento che il vettore v_j non è nullo)

$$\alpha_j = 0, \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

LEMMA - Siano $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo, $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in V$ versori a due a due ortogonali, e $\underline{w} \in V \setminus \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \rangle$. Allora il vettore

$$\underline{a} = \underline{w} - \langle \underline{a}_1, \underline{w} \rangle \underline{a}_1 - \dots - \langle \underline{a}_k, \underline{w} \rangle \underline{a}_k$$

è non nullo ed ortogonale a tutti gli \underline{a}_j , $j = 1, \dots, k$.

Dimostrazione

Anzitutto osserviamo che \underline{a} non è nullo, altrimenti si avrebbe

$$\underline{w} = \langle \underline{a}_1, \underline{w} \rangle \underline{a}_1 + \dots + \langle \underline{a}_k, \underline{w} \rangle \underline{a}_k$$

e quindi

$$\underline{w} \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \rangle.$$

Inoltre

$$\langle \underline{a}, \underline{a}_j \rangle = \langle \underline{w} - \langle \underline{a}_1, \underline{w} \rangle \underline{a}_1 - \dots - \langle \underline{a}_k, \underline{w} \rangle \underline{a}_k, \underline{a}_j \rangle =$$

$$\langle \underline{w}, \underline{a}_j \rangle - \langle \underline{a}_j, \underline{w} \rangle \langle \underline{a}_j, \underline{a}_j \rangle = \langle \underline{w}, \underline{a}_j \rangle - \langle \underline{w}, \underline{a}_j \rangle \langle \underline{a}_j, \underline{a}_j \rangle = 0,$$

dal momento che \underline{a}_j è un versore.



Basi ortonormali

Sia (V, \langle, \rangle) uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n .

Una base $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$ si dice *ortogonale* se è costituita da vettori mutuamente ortogonali (cioè $\underline{b}_i \perp \underline{b}_j, \forall i, j$).

Una base $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$ si dice *ortonormale* se è ortogonale e costituita da versori (cioè $\|\underline{b}_i\| = 1, \forall i$).

TEOREMA (metodo di ortogonalizzazione di Gram Schmidt) - Sia (V, \langle, \rangle) uno spazio euclideo di dimensione $n > 0$. Allora V ammette una base ortonormale.

Dimostrazione

Sia \underline{u} un vettore non nullo di V . Si pone

$$\underline{a}_1 = \frac{\underline{u}}{\|\underline{u}\|}.$$

Se $\langle \underline{a}_1 \rangle = V$ il processo è finito (e $n = 1$).



Altrimenti esiste un $\underline{w} \in V \setminus \langle \underline{a}_1 \rangle$, e si può applicare il lemma precedente a questo \underline{w} , ottenendo un vettore \underline{a} ortogonale a \underline{a}_1 . Si pone

$$\underline{a}_2 = \frac{\underline{a}}{\|\underline{a}\|}.$$

Se $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2 \rangle = V$ il processo è finito (e $n = 2$).

Altrimenti esiste un $\underline{w} \in V \setminus \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2 \rangle$, e così via.

Il processo comunque ha termine dopo $n = \dim(V)$ passi. I vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ così costruiti costituiscono una base perchè sono ortogonali (e quindi indipendenti) e in numero di $n = \dim(V)$.

TEOREMA - Sia (V, \langle, \rangle) uno spazio vettoriale euclideo f.g. e sia $W \subseteq V$ un suo sottospazio. Allora si ha

$$V = W \oplus W^\perp.$$

Dimostrazione

Se $W = \{0\}$, il risultato è ovvio ($\{0\}^\perp = V$).

Altrimenti, si deve dimostrare che

- 1) $W \cap W^\perp = \{0\}$
- 2) $W + W^\perp = V$.

- 1) Segue dal fatto che, se $\underline{w} \neq 0$, allora $\langle \underline{w}, \underline{w} \rangle \neq 0$.
- 2) Presa una base ortonormale $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r$ di W , ogni vettore $\underline{v} \in V$ può essere scritto nella forma

$$\underline{v} = \underline{r} + \underline{s}, \text{ con}$$

$$\underline{r} = \sum \langle \underline{v}, \underline{w}_j \rangle \underline{w}_j \in W \text{ e}$$

$$\underline{s} = \underline{v} - \sum \langle \underline{v}, \underline{w}_j \rangle \underline{w}_j \in W^\perp.$$



Nelle notazioni del teorema precedente, con $V = W \oplus W^\perp$ e $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r$ base ortonormale di W , l'applicazione lineare $pr : V \rightarrow V$, (o talora anche $pr : V \rightarrow W$) definita da $pr(\underline{v}) = \underline{r} = \sum \langle \underline{v}, \underline{w}_j \rangle \underline{w}_j$ viene detta *proiezione ortogonale* di V su W .

Nel caso di un sottospazio unidimensionale $W = \langle \underline{w} \rangle$, la proiezione ortogonale di \underline{v} su W coincide con la proiezione ortogonale di \underline{v} su \underline{w} definita in precedenza.



- 1 Lo spazio duale
- 2 Forme bilineari
- 3 Il caso reale: spazi vettoriali euclidei
- 4 Il caso complesso: spazi vettoriali hermitiani**
- 5 Endomorfismi autoaggiunti
- 6 Endomorfismi unitari
- 7 Riduzione a forma canonica delle forme quadratiche

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Sia V uno spazio vettoriale sul campo complesso \mathbb{C} .

Una *forma hermitiana* (o *prodotto hermitiano*) è un'applicazione

$$h : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

tale che, $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$, si abbia:

- 1) $h(\underline{u}, \underline{v}) = \overline{h(\underline{v}, \underline{u})}$,
- 2) $h(\underline{u} + \underline{v}, \underline{w}) = h(\underline{u}, \underline{w}) + h(\underline{v}, \underline{w})$,
- 3) $h(\lambda \underline{u}, \underline{v}) = \lambda h(\underline{u}, \underline{v})$, $h(\underline{u}, \lambda \underline{v}) = \overline{\lambda} h(\underline{u}, \underline{v})$.
- 4) $h(\underline{u}, \underline{u}) \geq 0$, e vale " = " se e solo se $\underline{u} = \underline{0}$.

Si noti che la condizione 4) ha senso perchè, per la 1), si ha:

$$h(\underline{u}, \underline{u}) = \overline{h(\underline{u}, \underline{u})} \in \mathbb{R}.$$

Uno spazio vettoriale complesso V dotato di una forma bilineare hermitiana viene detto *spazio vettoriale hermitiano*, o *unitario* o *euclideo complesso*.

Anche per gli spazi euclidei complessi si usa la notazione $\langle -, - \rangle$ per il prodotto hermitiano $h(-, -)$.

Anche negli spazi euclidei complessi si può introdurre una nozione di norma:

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle}.$$

Le definizioni di vettori ortogonali, proiezioni ortogonali, versori, base ortonormale e il procedimento di ortonormalizzazione si estendono nel modo ovvio al caso complesso.

- 1 Lo spazio duale
- 2 Forme bilineari
- 3 Il caso reale: spazi vettoriali euclidei
- 4 Il caso complesso: spazi vettoriali hermitiani
- 5 Endomorfismi autoaggiunti**
- 6 Endomorfismi unitari
- 7 Riduzione a forma canonica delle forme quadratiche

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Aggiunto di un endomorfismo

In tutto questo capitolo supporremo sempre che sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo reale o complesso di dimensione n ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ è, rispettivamente, un prodotto scalare definito positivo o un prodotto hermitiano).

Sia poi f un endomorfismo di V . Si dice *aggiunto* di f un endomorfismo f^* tale che, $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ si abbia

$$\langle f(\underline{v}), \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, f^*(\underline{w}) \rangle .$$

TEOREMA - Ogni endomorfismo f di V ammette un unico endomorfismo aggiunto f^* .
(si omette la dimostrazione)

Nel caso di \mathbb{R}^n con il prodotto scalare canonico $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = {}^t \underline{x} \cdot \underline{y}$,
 l'applicazione L_A associata a una matrice $n \times n$ A , ha per aggiunta
 l'applicazione L_{A^*} associata alla matrice trasposta di A .
 Infatti

$$\langle A \cdot \underline{x}, \underline{y} \rangle = {}^t(A \cdot \underline{x}) \cdot \underline{y} = {}^t \underline{x} \cdot {}^t A \cdot \underline{y} = \langle \underline{x}, {}^t A \cdot \underline{y} \rangle$$

Per questo motivo a l'applicazione aggiunta nel caso reale viene anche detta
trasposta.

Nel caso complesso, in \mathbb{C}^n con il prodotto scalare canonico $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = {}^t \underline{x} \cdot \overline{\underline{y}}$,
 l'applicazione L_A associata a una matrice A , ha per aggiunta l'applicazione
 L_{A^*} associata alla matrice $A^* = \overline{{}^t A}$ coniugata trasposta di A .

La matrice A^* viene detta *aggiunta* di A .

Ovviamente, se A è reale, allora $A^* = {}^t A$.



Un endomorfismo f tale che coincida con il suo aggiunto ($f^* = f$) si dice *autoaggiunto*.

Quindi un endomorfismo è autoaggiunto se e solo se $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ si ha

$$\langle f(\underline{v}), \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, f(\underline{w}) \rangle .$$

Nel caso reale un endomorfismo *autoaggiunto* viene anche detto *simmetrico* e nel caso complesso viene anche detto *hermitiano*.

Nel caso di \mathbb{R}^n con il prodotto scalare canonico, L_A è un endomorfismo simmetrico se e solo se la matrice A è simmetrica.

Nel caso di \mathbb{C}^n con il prodotto scalare canonico, L_A è un endomorfismo hermitiano se e solo se la matrice A coincide con la sua aggiunta.



Proprietà degli endomorfismi simmetrici

Siano (V, \langle, \rangle) uno spazio vettoriale euclideo ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ una base di V e f un endomorfismo di V .

OSSERVAZIONE - f è simmetrico se e solo se $\forall i, j = 1, \dots, n$ si ha $\langle f(\underline{b}_i), \underline{b}_j \rangle = \langle \underline{b}_i, f(\underline{b}_j) \rangle$ (verificarlo).

TEOREMA - Sia $\mathcal{A} = \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ una base ortonormale.

f è simmetrico se e solo se la matrice $M = \mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ rappresentativa di f nella base \mathcal{A} è simmetrica.

Dimostrazione

Sia $M = \{m_{ij}\}$. Per definizione di matrice rappresentativa si ha

$$f(\underline{a}_i) = \sum_h m_{hi} \underline{a}_h.$$

Si ha

$$\langle f(\underline{a}_i), \underline{a}_j \rangle = \left\langle \sum_h m_{hi} \underline{a}_h, \underline{a}_j \right\rangle = \sum_h m_{hi} \langle \underline{a}_h, \underline{a}_j \rangle = m_{ji};$$

$$\langle \underline{a}_i, f(\underline{a}_j) \rangle = \left\langle \underline{a}_i, \sum_k m_{kj} \underline{a}_k \right\rangle = \sum_k m_{kj} \langle \underline{a}_i, \underline{a}_k \rangle = m_{ij}.$$



Quindi f è simmetrico se e solo se $\forall i, j$, si ha $m_{ji} = m_{ij}$, ossia se e solo se M è simmetrica.

TEOREMA - Sia f simmetrico e siano λ, μ autovalori di f diversi tra loro. Se \underline{v} è un autovettore relativo a λ e \underline{w} è un autovettore relativo a μ , allora \underline{v} e \underline{w} sono ortogonali.

Dimostrazione

$f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$, $f(\underline{w}) = \mu \underline{w}$, quindi

$$\langle f(\underline{v}), \underline{w} \rangle = \langle \lambda \underline{v}, \underline{w} \rangle = \lambda \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$$

e

$$\langle \underline{v}, f(\underline{w}) \rangle = \langle \underline{v}, \mu \underline{w} \rangle = \mu \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle .$$

Ma $\langle f(\underline{v}), \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, f(\underline{w}) \rangle$ e pertanto $(\lambda - \mu) \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0$.

Poiché però $\lambda \neq \mu$, allora $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0$.

TEOREMA - Sia f un endomorfismo simmetrico. Allora tutte le radici del polinomio caratteristico $P_f(t)$ di f sono reali.

Dimostrazione

Sia $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ una base ortonormale e sia $M = \mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$.



Sappiamo che M è simmetrica: $M = {}^t M$.

Consideriamo il polinomio caratteristico di f : $P_f(t) = P_M(t)$.

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ una radice di $P_M(t)$. Vogliamo mostrare che λ è reale, cioè che $\lambda = \bar{\lambda}$.

Sia $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$ un autovettore di M : $\underline{x} \neq \underline{0}$ e

$$(*) \quad M \cdot \underline{x} = \lambda \underline{x}.$$

Passando ai coniugati, ed osservando che il coniugato di un prodotto di matrici è il prodotto delle matrici coniugate, ed inoltre che, essendo M reale si ha $M = \bar{M}$, si ottiene anche

$$(**) \quad M \cdot \bar{\underline{x}} = \bar{\lambda} \bar{\underline{x}}.$$

Utilizzando $(*)$, $(**)$ e $M = {}^t M$, si deduce allora



$$\begin{aligned}\lambda \quad {}^t \underline{x} \cdot \bar{\underline{x}} &= {}^t (\lambda \underline{x}) \cdot \bar{\underline{x}} = {}^t (M \cdot \underline{x}) \cdot \bar{\underline{x}} = {}^t \underline{x} \cdot {}^t M \cdot \bar{\underline{x}} \\ &= {}^t \underline{x} \cdot M \cdot \bar{\underline{x}} = {}^t \underline{x} \cdot \bar{\lambda \underline{x}} = \bar{\lambda} \quad {}^t \underline{x} \cdot \bar{\underline{x}},\end{aligned}$$

da cui si ricava

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \quad {}^t \underline{x} \cdot \bar{\underline{x}} = 0.$$

D'altra parte

$$0 = (\lambda - \bar{\lambda}) \quad {}^t \underline{x} \cdot \bar{\underline{x}} = (\lambda - \bar{\lambda}) \sum x_i \bar{x}_i = (\lambda - \bar{\lambda}) \sum |x_i|^2$$

(ove $|x_i|$ denota il modulo del numero complesso x_i) e, essendo

$\sum |x_i|^2 > 0$ ($\underline{x} \neq \underline{0} \Rightarrow \exists x_i \neq 0$), questo implica $\lambda = \bar{\lambda}$.

Sia V uno spazio vettoriale, U un suo sottospazio e f un endomorfismo di V .

Si dice il sottospazio U è *f*-invariante, o che *f* opera su U , se $f(U) \subseteq U$,

ossia $f|_U : U \rightarrow U$.

TEOREMA (Teorema spettrale) - Siano (V, \langle, \rangle) uno spazio vettoriale euclideo ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\dim(V) = n > 0$), e f un endomorfismo di V .
 f è simmetrico se e solo se V ha una base ortonormale di autovettori di f .

Dimostrazione

- (\Leftarrow) Se A è una base ortonormale di autovettori di f , la matrice rappresentativa di f in questa base è diagonale, quindi simmetrica, e pertanto f è simmetrico.
- (\Rightarrow) La dimostrazione è per induzione su n .

$n = 1$.

Se V ha dimensione 1, allora V è generato da un vettore non nullo \underline{u} e $\{\underline{a} = \frac{\underline{u}}{\|\underline{u}\|}\}$ è una base ortonormale. Inoltre \underline{a} è un autovettore in quanto $f(\underline{a}) \in V = \langle \underline{a} \rangle$ e pertanto $f(\underline{a})$ è multiplo di \underline{a} .

da $n - 1$ a n .

Per ipotesi d'induzione il teorema è vero per spazi euclidei di dimensione $n - 1$.



f è simmetrico, quindi i suoi autovalori sono reali. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore e $\underline{u} \neq \underline{0}$ un autovettore relativo a λ : $f(\underline{u}) = \lambda \underline{u}$.

Consideriamo il sottospazio $S = \langle \underline{u} \rangle^\perp$ ortogonale a \underline{u} .

S è f -invariante infatti

se $\underline{v} \in S$ (cioè $\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = 0$), allora ,
 $\langle \underline{u}, f(\underline{v}) \rangle = \langle f(\underline{u}), \underline{v} \rangle = \langle \lambda \underline{u}, \underline{v} \rangle = \lambda \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0$.

Quindi $f|_S : S \rightarrow S$ è un endomorfismo simmetrico su uno spazio euclideo di dimensione $n - 1$, quindi (per ipotesi d'induzione) S ha una base ortonormale $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1}\}$ formata da autovettori di f .

Allora $\mathcal{A} = \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1}, \underline{a}_n = \frac{\underline{u}}{\|\underline{u}\|}\}$ è una base ortonormale di V formata da autovettori di f , infatti

$$f(\underline{a}_n) = f\left(\frac{\underline{u}}{\|\underline{u}\|}\right) = \frac{1}{\|\underline{u}\|} f(\underline{u}) = \frac{\lambda \underline{u}}{\|\underline{u}\|} = \lambda \underline{a}_n.$$

Proprietà degli endomorfismi hermitiani

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e (V, \langle, \rangle) uno spazio hermitiano.

TEOREMA - Se g un endomorfismo di V tale che $\langle g(\underline{v}), \underline{v} \rangle = 0$, per ogni $\underline{v} \in V$, allora $g = 0_V$ è l'endomorfismo nullo.

Dimostrazione

$\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ si ha

$$\langle g(\underline{v} + \underline{w}), \underline{v} + \underline{w} \rangle = 0$$

cioè

$$\begin{aligned} 0 &= \langle g(\underline{v}), \underline{v} \rangle + \langle g(\underline{v}), \underline{w} \rangle + \langle g(\underline{w}), \underline{v} \rangle + \langle g(\underline{w}), \underline{w} \rangle = \\ &\langle g(\underline{v}), \underline{w} \rangle + \langle g(\underline{w}), \underline{v} \rangle \end{aligned}$$

quindi

$$\langle g(\underline{v}), \underline{w} \rangle = -\langle g(\underline{w}), \underline{v} \rangle \quad (\circ)$$

Si ha anche

$$\langle g(\underline{v} + i\underline{w}), \underline{v} + i\underline{w} \rangle = 0$$

cioè

$$0 = \langle g(\underline{v}), \underline{v} \rangle + \langle g(\underline{v}), i\underline{w} \rangle + \langle g(i\underline{w}), \underline{v} \rangle + \langle g(i\underline{w}), i\underline{w} \rangle =$$

$$\langle g(\underline{v}), i\underline{w} \rangle + \langle g(i\underline{w}), \underline{v} \rangle = i \langle g(\underline{v}), \underline{w} \rangle + i \langle g(\underline{w}), \underline{v} \rangle$$

$$0 = - \langle g(\underline{v}), \underline{w} \rangle + \langle g(\underline{w}), \underline{v} \rangle$$

quindi

$$\langle g(\underline{v}), \underline{w} \rangle = \langle g(\underline{w}), \underline{v} \rangle. \quad (\circ\circ)$$

Da (\circ) e $(\circ\circ)$ si deduce allora $\langle g(\underline{v}), \underline{w} \rangle = 0, \forall \underline{v}, \underline{w}$.

OSSERVAZIONE - Un risultato analogo non vale nel caso reale: ad esempio in $\text{Vect}_O(\mathbb{R}^2)$ la rotazione ρ di $\frac{\pi}{2}$ soddisfa $\langle \rho(\underline{v}), \underline{v} \rangle = 0, \forall \underline{v}$.



TEOREMA - Siano $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (V, \langle, \rangle) uno spazio hermitiano e f un endomorfismo di V .

Allora f è autoaggiunto (hermitiano) se e solo se $\langle f(\underline{v}), \underline{v} \rangle$ è reale per ogni $\underline{v} \in V$.

Dimostrazione

(\Rightarrow)

Essendo f autoaggiunto e \langle, \rangle hermitiano, si ha

$\langle f(\underline{v}), \underline{v} \rangle = \overline{\langle \underline{v}, f(\underline{v}) \rangle} = \overline{\langle f(\underline{v}), \underline{v} \rangle}$, per cui $\langle f(\underline{v}), \underline{v} \rangle \in \mathbb{R}$.

(\Leftarrow)

Se $\langle f(\underline{v}), \underline{v} \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall \underline{v}$, allora

$\langle f(\underline{v}), \underline{v} \rangle = \overline{\langle f(\underline{v}), \underline{v} \rangle} = \overline{\langle \underline{v}, f(\underline{v}) \rangle} = \langle f^*(\underline{v}), \underline{v} \rangle$, quindi
 $\langle (f^* - f)(\underline{v}), \underline{v} \rangle = 0, \forall \underline{v}$. Per il teorema precedente quindi $f^* = f$.

Anche per gli endomorfismi hermitiani (come per quelli simmetrici) vale:

- 1) se f è hermitiano, allora $P_f(t)$ ha solo radici reali;
- 2) se f è hermitiano, e \underline{v} e \underline{w} sono autovettori di f relativi a autovalori distinti λ, μ , allora $\underline{v} \perp \underline{w}$;
- 3) se f è hermitiano, allora V ammette una base ortonormale di autovettori di f .

OSSERVAZIONE - Nel caso complesso non vale il viceversa della 3) :

ad esempio $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ ammette una base ortonormale di autovettori (è diagonale), ma $A^* = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \neq A$.

Si potrebbe dimostrare che

TEOREMA (di Toeplitz) - Siano $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (V, \langle, \rangle) uno spazio hermitiano e f un endomorfismo di V .

Allora V ammette una base ortonormale di autovettori di f se e solo se

$$f \circ f^* = f^* \circ f.$$

Gli endomorfismi che verificano $f \circ f^* = f^* \circ f$ si dicono *normali*.

- 1 Lo spazio duale
- 2 Forme bilineari
- 3 Il caso reale: spazi vettoriali euclidei
- 4 Il caso complesso: spazi vettoriali hermitiani
- 5 Endomorfismi autoaggiunti
- 6 Endomorfismi unitari**
- 7 Riduzione a forma canonica delle forme quadratiche

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Sia (V, \langle, \rangle) uno spazio vettoriale euclideo reale o complesso di dimensione n (\langle, \rangle è, rispettivamente, un prodotto scalare definito positivo o un prodotto hermitiano).

Un endomorfismo f di V si dice *unitario* se conserva il prodotto \langle, \rangle , ovvero se

$$\forall \underline{v}, \underline{w} \in V \quad \langle f(\underline{v}), f(\underline{w}) \rangle = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle .$$

OSSERVAZIONE - Un endomorfismo unitario è un automorfismo, infatti, se $\underline{v} \in \ker(f)$ si ha

$$\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = \langle f(\underline{v}), f(\underline{v}) \rangle = \langle \underline{0}, \underline{0} \rangle = 0 .$$

Nel caso reale gli endomorfismi unitari vengono anche chiamati *isometrie*.



Il caso reale: il gruppo ortogonale

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio euclideo e f un endomorfismo di V .

Si verifica facilmente che

OSSERVAZIONE - f è unitario (cioè è un'isometria) se e solo se trasforma basi ortonormali in basi ortonormali.

Inoltre

TEOREMA - f è unitario se e solo se la matrice rappresentativa M di f rispetto a una base ortonormale verifica ${}^t M \cdot M = I$.

Dimostrazione

Sia $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ una base ortonormale e sia $M = (m_{hk})$ la matrice rappresentativa di f in tale base.

La base $\mathcal{C} = \{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$ è ortonormale se e solo se
 $\langle f(b_i), f(b_j) \rangle = \delta_{ij}$, ove δ_{ij} denota l'indice di Kronecker ($\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$, e
 $\delta_{ii} = 1$.)
 e ciò accade se e solo se
 $\langle \sum_h m_{hi} b_h, \sum_k m_{kj} b_k \rangle = \sum_{hk} m_{hi} m_{kj} \langle b_h, b_k \rangle = \sum_{hk} m_{hi} m_{kj} \delta_{hk} =$
 $\sum_h m_{hi} m_{hj} = \delta_{ij}$
 cioè se e solo se l'elemento di posto (i, j) della matrice ${}^t M \cdot M$ vale δ_{ij} ,
 cioè se e solo se ${}^t M \cdot M = I$.

Una matrice quadrata reale A tale che sia ${}^t A \cdot A = I$ (o equivalentemente
 $A \cdot {}^t A = I$), viene detta *ortogonale*.

L'insieme

$$\mathcal{O}(n) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t A \cdot A = I\},$$

rispetto al prodotto riga per colonna, è un gruppo (verificarlo), detto *gruppo
 ortogonale*, sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$.



PROPRIETÀ DELLE MATRICI ORTOGONALI

- $A \in \mathcal{O}(n)$ se e solo se i vettori colonna (riga) di A sono versori (di \mathbb{R}^n con il prodotto scalare canonico) mutualmente ortogonali;
- se $A \in \mathcal{O}(n)$, allora $\det(A) = \pm 1$ (infatti $\det({}^t A \cdot A) = \det({}^t A) \det(A) = (\det(A))^2 = \det(I) = 1$);
- se λ è un autovalore di A , allora $\lambda = \pm 1$ (infatti, se f è un automorfismo unitario e λ è un suo autovalore, $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, allora $\|\mathbf{v}\| = \|f(\mathbf{v})\| = \|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$, per cui $|\lambda| = 1$)

Il sottoinsieme di $\mathcal{O}(n)$

$$\mathcal{SO}(n) = \{A \in \mathcal{O}(n) \mid \det(A) = 1\}$$

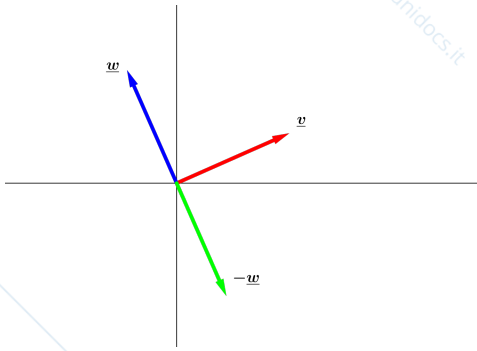
è un sottogruppo (rispetto al prodotto righe per colonne), detto *gruppo ortogonale speciale*



Il caso $n = 2$.

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ versori mutualmente ortogonali.

Posto $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$,
 i versori ortogonali a \underline{v}
 sono solo $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \pm \underline{w}$,
 con $\underline{w} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$



Le matrici di $\mathcal{O}(2)$ sono della forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}(2) \text{ oppure } A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Il gruppo ortogonale speciale $\mathcal{SO}(2)$ è il gruppo delle rotazioni attorno all'origine.

Si potrebbe dimostrare che anche nel caso $n = 3$ le matrici del gruppo ortogonale speciale $\mathcal{SO}(3)$ rappresentano rotazioni nello spazio attorno ad un asse (che risulta essere un autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 1$.) Ad esempio,

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rappresenta la rotazione attorno all'asse z di angolo θ .



Il caso complesso: il gruppo unitario

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (V, \langle, \rangle) uno spazio euclideo complesso e f un endomorfismo di V .

In analogia a quanto accade nel caso reale si ha

TEOREMA - f è unitario se e solo se la matrice rappresentativa A di f rispetto a una base ortonormale verifica $\overline{A} \cdot A = I$, ossia $A^* \cdot A = I$.

Una matrice quadrata complessa A tale che sia $A^* \cdot A = I$, viene detta *unitaria*.

L'insieme

$$\mathcal{U}(n) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid A^* \cdot A = I\},$$

rispetto al prodotto riga per colonna, è un gruppo, detto *gruppo unitario*, sottogruppo di $GL(n, \mathbb{C})$.



PROPRIETÀ DELLE MATRICI UNITARIE

- $A \in \mathcal{U}(n)$ se e solo se i vettori colonna (riga) di A sono versori (di \mathbb{C}^n con il prodotto scalare canonico) mutualmente ortogonali;
- se $A \in \mathcal{U}(n)$, allora $|\det(A)| = 1$ (verificarlo);
- se $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di A , allora $|\lambda| = 1$.

Il sottoinsieme di $\mathcal{U}(n)$

$$SU(n) = \{A \in \mathcal{U}(n) \mid \det(A) = 1\}$$

è un sottogruppo, detto *gruppo unitario speciale*

Ad esempio, per $n = 1$,

$$\mathcal{U}(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z}z = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

è la circonferenza unitaria, mentre

$$SU(1) = \{1\}.$$



- 1 Lo spazio duale
- 2 Forme bilineari
- 3 Il caso reale: spazi vettoriali euclidei
- 4 Il caso complesso: spazi vettoriali hermitiani
- 5 Endomorfismi autoaggiunti
- 6 Endomorfismi unitari
- 7 Riduzione a forma canonica delle forme quadratiche**

Navigation icons: back, forward, search, refresh, etc.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Sia V uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} e

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

una forma bilineare.

Siano $\mathcal{C} = \{\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n\}$ e $\mathcal{D} = \{\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_n\}$ basi di V e siano

$$C = (c_{ij}) = (b(\underline{c}_i, \underline{c}_j)), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

e

$$D = (d_{ij}) = (b(\underline{d}_i, \underline{d}_j)), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

le matrici rappresentative della forma b rispetto alle basi \mathcal{C} e \mathcal{D} (rispett.).



Per ogni $\underline{v}, \underline{w} \in V$,
 detti $\underline{x} = (x_i)$ e $\underline{y} = (y_i)$ i vettori colonna delle coordinate di \underline{v} e \underline{w} nella base \mathcal{C}
 e detti $\underline{\lambda} = (\lambda_i)$ e $\underline{\mu} = (\mu_i)$ i vettori colonna delle coordinate di \underline{v} e \underline{w} nella
 base \mathcal{D} , si ha

$$b(\underline{v}, \underline{w}) = {}^t \underline{x} \cdot C \cdot \underline{y} = {}^t \underline{\lambda} \cdot D \cdot \underline{\mu}.$$

D'altra parte, essendo $\underline{x}, \underline{y}$ e $\underline{\lambda}, \underline{\mu}$ le coordinate degli stessi vettori rispetto basi
 diverse, esiste una matrice $M \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che sia

$$\underline{x} = M\underline{\lambda}, \quad \underline{y} = M\underline{\mu},$$

per cui si ha

$${}^t \underline{\lambda} \cdot D \cdot \underline{\mu} = {}^t \underline{x} \cdot C \cdot \underline{y} = {}^t (M\underline{\lambda}) \cdot C \cdot (M\underline{\mu}) = {}^t \underline{\lambda} M \cdot C \cdot M \underline{\mu}.$$

E poiché questo deve valere $\forall \underline{\lambda}, \underline{\mu}$ si ricava $D = {}^t M \cdot C \cdot M$.



Matrici congruenti

Siano $A, B \in Mat_n(\mathbb{K})$ due matrici quadrate. Si dice che A e B sono *congruenti* se esiste una matrice invertibile $M \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che sia $B = {}^t M \cdot A \cdot M$.

OSSERVAZIONE - La congruenza di matrici è una relazione di equivalenza (verificarlo).

OSSERVAZIONE - Matrici rappresentative della forma bilineare (rispetto a basi diverse) sono congruenti.

OSSERVAZIONE - Matrici congruenti hanno la stessa caratteristica (perché?).

Forme quadratiche

Sia ora V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure \mathbb{C} e

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

una forma bilineare simmetrica.

Si dice *forma quadratica* associata a b l'applicazione

$$q = q_b : V \rightarrow \mathbb{K},$$

definita da

$$q(\underline{v}) = b(\underline{v}, \underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in V.$$

OSSERVAZIONE - Ad esempio su \mathbb{R} , q è omogenea di secondo grado (quadratica) infatti $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall \underline{v} \in V$, si ha

$$q(\lambda \underline{v}) = b(\lambda \underline{v}, \lambda \underline{v}) = \lambda^2 b(\underline{v}, \underline{v}) = \lambda^2 q(\underline{v}).$$



OSSERVAZIONE - La forma quadratica q è determinata dalla forma bilineare simmetrica b . Viceversa, data q , si può ricavare b ponendo

$$b(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{1}{2}(q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w})).$$

Infatti, per la simmetria di b si ha

$$q(\underline{v} + \underline{w}) = b(\underline{v} + \underline{w}, \underline{v} + \underline{w}) = b(\underline{v}, \underline{v}) + 2b(\underline{v}, \underline{w}) + b(\underline{w}, \underline{w}).$$

ESEMPIO - Nel caso di $V = \mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico si ha

$$q(\underline{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$



Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure \mathbb{C} ,

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

una forma bilineare simmetrica, e

$$q = q_b : V \rightarrow \mathbb{K},$$

la forma quadratica associata.

Si dice che una base $\mathcal{C} = \{\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n\}$ riduce b a forma canonica se, $\forall \underline{v} \in V$ si ha

$$q(\underline{v}) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K},$$

ove $\underline{x} = (x_i)$ denota il vettore delle coordinate di \underline{v} nella base \mathcal{C} .

La base \mathcal{C} riduce q a forma canonica se e solo se la matrice rappresentativa di b nella base \mathcal{C} è diagonale.



PROBLEMA - Data q (ovvero data b), esiste sempre una base \mathcal{C} che riduce q a forma canonica?

Ovvero

Data una matrice quadrata simmetrica A , è sempre possibile ridurre A a forma diagonale per congruenza (*diagonalizzazione per congruenza*)?

Forme quadratiche reali

Nel caso reale la risposta (affermativa) al problema di cui sopra è fornita dal teorema spettrale.

Sia V uno spazio vettoriale reale ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$),

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

una forma bilineare simmetrica, e

$q =: V \rightarrow \mathbb{R}$, la forma quadratica associata e $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ una base di V .

Sappiamo che la matrice A che rappresenta b nella base \mathcal{C} è simmetrica.

Per il teorema spettrale, esiste una matrice ortogonale $M \in \mathcal{O}(n)$, tale che $M^{-1} \cdot A \cdot M$ sia diagonale (M è la matrice del cambiamento di base, ovvero la matrice che ha per colonne gli autovettori di A).

D'altra parte per una matrice ortogonale M si ha $M^{-1} = {}^t M$ per cui ${}^t M \cdot A \cdot M$ è diagonale, ossia



ogni forma quadratica reale può essere ridotta a forma canonica,

ovvero

ogni matrice quadrata simmetrica reale è diagonalizzabile per congruenza.

In realtà il risultato può essere migliorato:

TEOREMA (di Sylvester) - Data una forma bilineare simmetrica reale $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, esistono interi p, r , con $p \leq r \leq n = \dim(V)$, univocamente determinati da b , ed esiste una base \mathcal{C} di V tali che la matrice rappresentativa di b in tale base sia della forma

$$(*) \quad = \begin{pmatrix} I_p & O & O \\ O & -I_{r-p} & O \\ O & O & O \end{pmatrix},$$

ossia la forma quadratica q associata a b sia della forma

$$(**) \quad q(v) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_r^2,$$

ove $\underline{x} = (x_i)$ denota il vettore delle coordinate di \underline{v} nella base \mathcal{C} .

Tanto $(*)$, quanto $(*)$, $(*)$, vengono dette *forme canoniche di Sylvester*.

p si dice *indice di positività* della forma q ed è dato dal numero degli autovalori positivi di una matrice associata a b ,

$r - p$ si dice *indice di negatività* della forma q ed è dato dal numero degli autovalori negativi di una matrice associata a b ,

r è il rango di una matrice associata a b ,

la coppia $(p, r - p)$ viene detta *segnatura* della forma q .

OSSERVAZIONE - La forma bilineare simmetrica b è definita positiva se e solo se ha segnatura $(n, 0)$, ossia se e solo se $r = p = n$.

OSSERVAZIONE - Due forme bilineari simmetriche reali (su uno stesso spazio vettoriale) sono congruenti se e solo se hanno la stessa forma canonica di Sylvester, se e solo se hanno la stessa segnatura



Una volta ridotta la forma quadratica a forma diagonale è facile ridurla alla forma del teorema di Sylvester.

Ad esempio, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è congruente a $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ come si vede da

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si noti che la riduzione così effettuata è per congruenza, non per similitudine!



Forme quadratiche complesse

Anche nel caso complesso vale un risultato analogo a quando visto nel caso reale.

TEOREMA (di Lagrange) - Ogni forma bilineare simmetrica

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

può essere ridotta a forma canonica per congruenza. Ossia ogni matrice quadrata complessa è congruente a una matrice diagonale.

In realtà il teorema di Lagrange vale più in generale in ogni campo di caratteristica diversa da 2. Ad esempio, quindi, vale in \mathbb{Q} .

Nel caso complesso si ha anzi una semplificazione della forma canonica di Sylvester, nel senso che ogni matrice quadrata risulta congruente ad una matrice della forma

$$q(v) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2,$$

ove r denota il rango della matrice associata alla forma.

COROLLARIO - Ogni matrice quadrata simmetrica complessa è diagonalizzabile per congruenza.

In conclusione

Nel caso reale: due matrici quadrate simmetriche sono congruenti se e solo se hanno la stessa segnatura.

Nel caso complesso: due matrici quadrate simmetriche sono congruenti se e solo se hanno lo stesso rango.

ESERCIZIO - Ridurre per congruenza (su \mathbb{C}) la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

alla forma $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

