TEOREMA SPETTRALE (REALE)

$V, \langle , \rangle$ sp. euclideo di dim. finita

$f \in End(V)$ autoaggiunto

$\Longrightarrow$ esiste una base ortonormale di autovettori di f.

(in part. una matrice simmetrica A é diagon. ed esiste $C \in O(n)$ $(C^{-1} = C^T)$ t.c. $C^{-1}AC = C^TAC$ DIAG)

Corollario

$V, \langle \, , \rangle$ sp. vettoriale euclideo

$\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ f.b.s

abbiamo 2 f.b.s!

$\Rightarrow \exists \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ORTONORMALE per $\langle \, , \rangle$
ORTOGONALE per β

Lemma

f endom. simm. su $V, \langle \, , \rangle$ sp. euclideo

$W \subseteq V$ ssv f-invariante $\Rightarrow W^\perp$ è ancora f-invariante

(in particolare $f|_{W^\perp} : W^\perp \to W^\perp$ è ancora endom. simmetrico

non esistono end. simmetrici su sp. vett.
esistono solo quando ho una strutt. di sp. vett. eucl.

($W^\perp$ è sp. vett. euclideo rispetto a $\langle \, , \rangle|_{W^\perp}$)

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Dim. Prendiamo $u \in W^\perp$, cioè $\langle u, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W$.

Vogliamo mostrare che

$f(u) \in W^\perp$ cioè

$\langle f(u), w \rangle = 0 \quad \forall w \in W$

Ma $\langle f(u), w \rangle = \langle u, \underbrace{f(w)}_{\in W} \rangle$

perché W è f-invariante.

$= 0$

$\square$

Questo lemma riduce il th. spettrale a dimostrare che esiste un autovalore di f.

Assumiamo il th. spett. vero per ogni sp. vett. euclideo e endom. simmetrico di dim $<$ dim V

Se f ha un autovalore λ e v_1 è un suo autovettore (che posso supporre di $\|v_1\| = 1$ $\left(\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}\right)\right)$)

Span$\{v_1\}$ è f-invariante

Per il lemma precedente

$U := \text{Span}\{v_1\}^\perp$ è f-inv. quindi per l'ip. induttiva

$\exists \{v_1 \ldots v_n\}$ base ORTONORMALE di autovettori di $\underset{U}{f} \in End(V)$

$\Rightarrow \{v_1, v_2 \ldots v_n\}$ è una base ORTONORMALE di autovettori di f.

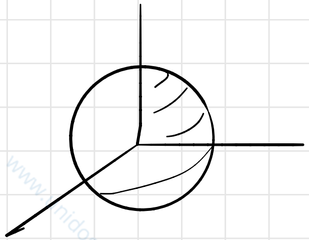
<u>Dim.</u> (dell'esistenza di un autovalore)

$$\hat{\varphi} : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\hat{\varphi}(v) = \langle f(v), v \rangle$$ (è una forma quadratica)

$$S := \{ v : \|v\| = 1 \}$$

es. $V = \mathbb{R}^2 \quad \langle , \rangle_{st} \quad x^2 + y^2 = 1$



$\left(\quad V = \mathbb{R}^3 \quad \langle , \rangle_{st} \quad x^2+y^2+z^2 = 1 \right)$

appena scelgo una base ortonormale
V diventa isometrico a $\mathbb{R}^n$
vedo l'analogo n-dimensionale della sfera

1) $\varphi = \hat{\varphi}\big|_S : S \longrightarrow \mathbb{R}$

φ è una funzione continua su S.

$\forall v_0 \in S$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad$ t.c. $|\varphi(v) - \varphi(v_0)| < \varepsilon$ se $\|v - v_0\| < \delta$

(Pensa al caso $\mathbb{R}^n$, $\langle , \rangle$
$\hat{\varphi}$ é un pol. di 2° grado
omogeneo in $x_1 \dots x_n$

2) S é chiuso e limitato

$\left(x_n^{1}, \dots, x_n^{(s)} \right)$ t.c. $x_n^{1} + \dots + x_n^{(s)} = 1 \ \forall n$

$\Downarrow$ B-W

$\exists \, k_n$ sottosucc. t.c.

$\left(x_{k_n}^{1}, \dots, x_{k_n}^{(s)} \right)$ t.c. $x_{k_n}^{1} + \dots + x_{k_n}^{(s)} = 1 \ \forall n$

$x_{k_n}^{1} \xrightarrow{n \to \infty} \bar{x}$

lo faccio per ogni $x^{(i)}$

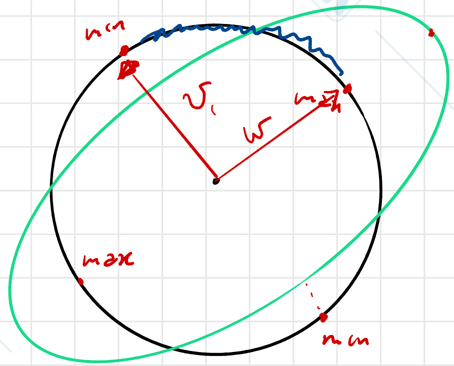
$\left(x_{n'}^{1}, \dots, x_{n'}^{(s)} \right) \longrightarrow \left(\bar{x}^{1} \dots \bar{x}^{(s)} \right)$ ove $\bar{x}^{1\,2} + \dots + \bar{x}^{(s)\,2} = 1$

$\Rightarrow$ ogni succ. nell'insieme posso estrarne una che converge a un punto dell'insieme

$\{ v : \|v\| = 1 \}$ insieme dei punti che distano 1 da un punto fissato

GUESS WHAT

Weierstrass $\Rightarrow$ φ ha un punto di minimo (o max) $v_1 \in S$. Voglio mostrare che v_1 é un autovettore di f



Prendiamo $w \in \operatorname{Span}\{v_1\}^{\perp}$:

$\|w\| = 1 \qquad (\cos t) v_1 + (\sin t) w =: \gamma(t)$

$\gamma : (-1, 1) \longrightarrow V$

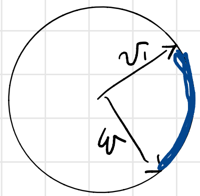
<u>Oss.</u> $\gamma(t) \in S \quad \forall t$ cioè

$\|\gamma(t)\| = 1$

$$<(\cos t) v_1 + \sin t\, w, (\cos t) v_1 + (\sin t) w> =$$

$$= \cos^2 t \underbrace{\|v_1\|^2}_{=1} + \sin^2 t \underbrace{\|w\|^2}_{=1} + 2 \sin t \cos t \underbrace{<v_1, w>}_{=0} =$$

$$= \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$



$\gamma(0) = v_1$

$\varphi(\gamma(t)) : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ avrà un minimo per $t = 0$

$\Rightarrow$ se esiste $\frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t))\Big|_{t=0} = 0$

$$\varphi(\gamma(t)) = \langle f(\gamma(t)), \gamma(t) \rangle$$

$$= \langle f(\cos t\, v_1 + \sin t\, w), \cos t\, v_1 + \sin t\, w \rangle =$$

$$= \cos^2 t \langle f(v_1), v_1 \rangle + \cos t \sin t \langle f(v_1), w \rangle +$$

$$+ \sin t \cos t \langle f(w), v_1 \rangle + \sin^2 t \langle f(w), w \rangle$$

$\langle w, f(v_1) \rangle$ f simmetrica

$\langle f(v_1), w \rangle$ perché $\langle , \rangle$ simm.

$$\varphi(\gamma(t)) = \cos^2 t \langle f(v_1), v_1 \rangle + 2 \sin t \cos t \langle f(v_1), w \rangle + \sin^2 t \langle f(w), w \rangle$$

eccome se è derivabile

$$\varphi'(\gamma(t))(0) = 2 \langle f(v_1), w \rangle = 0$$

Quindi: $\forall w \in \mathrm{Span}\{v_1\}^\perp \quad \|w\| = 1$

$$\langle f(v_1), w \rangle = 0$$

cioè $\forall w \quad \langle v_1, w \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(v_1), w \rangle = 0$

$\Rightarrow f(v_1) \parallel v_1$ i.e. v_1 autovettore. $\square$

<u>oss.</u> $f(v_1) = \lambda_1 v_1$

$$\varphi(v_1) = \langle f(v_1), v_1 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_1 \rangle = \underline{\underline{\lambda_1}}$$

$\square$