GEOMETRIA 7 MARZO

SPAZIO PROIETTIVO

L'INDIPEND. LINEARE È UNA PROPRIETÀ DELLE CLASSI DI EQUIVALENZA
DIREMO CHE I PUNTI $[V_1], \dots, [V_k] \in P(V)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE I VETTORI $V_1, \dots, V_k$ SONO INDIPENDENTI IN V.

LEMMA CONSIDERIAMO UN VETTORE NON NULLO $w \in V$ E $w' \in [w]$. SE w DIP. LINEARM. DA $V_1, \dots, V_k$ ALLORA w' DIPENDE LINEARMENTE DA $v_1, \dots, v_k$

DIMOSTRAZIONE

$w' \in [w] \qquad w' = \mu w \qquad \mu \neq 0 \qquad \mu \in \mathbb{K}$

w doppio e w' appartengono alla stessa classe di equivalenza

Ip.

$w \in L(v_1, \dots, v_k)$ comb lineare di $v_1, \dots$

th

$w' \in L(v_1, \dots, v_k)$

$w' = \mu w = \mu(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k) =$

$= \mu(\beta_1 \lambda^{-1} v_1 + \dots + \beta_k \lambda_k^{-1} v_k) =$

$= \mu \beta_1 \lambda^{-1} v_1 + \dots +$

DIREMO CHE IL PUNTO $[w] \in P(V)$
DIP. LINEAR. DAI PUNTI $[v_1], \dots, [v_k] \in P(V)$
SE IL VETTORE $w \in V_*$ DIP.

Che cos'è una BASE?

SE OGNI PUNTO dello SPAZIO PROIETTIVO $P(V)$ DIPENDE LINEARM. DA $[v_1], \dots, [v_k] \in P(V)$ DIREMO CHE I PUNTI $[v_1], \dots, [v_k] \in P(V)$ GENERANO LO SPAZIO PROIETTIVO $P(V)$

DIREMO CHE QUESTI PUNTI SONO UNA BASE quando sono indipendenti e generano $P(V)$

i punti sono una base dello spazio proiettivo se, i corrisp. sono una base dello spazio vettoriale

BASE CANONICA

nel passaggio tra e
spazio vettoriale $\longrightarrow$ spazio proiettivo

$$\dim P(V) = \dim V - 1$$

OSS.

1) LA DIM SPAZIO PROIETTIVO È LA CARDINALITÀ DELLA BASE DIMINUITA DI UNO
quindi la cardinalità delle basi non coincide con la dimensione dello sp. proiettivo

2) $\dim V = 1 \Rightarrow \dim P(V) = 0$
→ cioè c'è una sola direzione
ed un punto (dello sp. proiettivo)
questo punto ha dimensione
zero

3) $\dim V = 0 \Rightarrow \dim P(V) = -1$
→ è vuoto, ed è uno
spazio proiettivo ed ha
dimensione -1
per il teorema di Grassman

APPLICAZIONI TRA SPAZI PROIETTIVI
sp. proiettivi sono legati agli sp. vettoriali

f: app. lineare iniettiva
$$f: V \to U$$

ciò vuol dire che le immagini dei vettori di V_*
sono sempre non nulle
f induce un'applicazione con dominio V_*
e codominio U_* che con abuso di notazione
continueremo a chiamare con f
$$f: V_* \to U_*$$

TEOREMA dice che in questa situa

Sia $f: V \to U$ un'app. lineare iniettiva tra due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$
Allora esiste un'unica applicazione iniettiva $\bar{f}: P(V) \to P(U)$ che rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} V_* \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_V"'] & U_* \arrow[d, "\pi_V"] \\ P(V) \arrow[r, "\bar{f}"] & P(U) \end{tikzcd}$$

applicazione quoziente

Il diagramma è commutativo cioè qualunque freccia seguiamo la funzione data sarà la stessa

retta, con punti distinti (ovviamente)

$L(v)(w)$ retta contenente P e P'

$v \neq 0 \qquad [v] = P \in \mathbb{P}(V)$

$$\mathbb{P}(L(v)) = \{P\} \subseteq \mathbb{P}(V)$$

ESERCIZIO 50 (delle slide)

$$\dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2) = \dim(\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2))$$

ho due sott. sp. vettoriali in V $\quad W_1, W_2 \subseteq V$

REGOLA DI GRASSMAN

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$$

$$-1 \qquad -1 \qquad -1 \qquad -1$$

$$\dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2) = \dim \mathbb{P}(W_1 + W_2) + \dim \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$$

$$'' \qquad '' = \dim \langle \mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2) \rangle + \dim \mathbb{P}W_1 \cap \mathbb{P}W_2$$

proiezione della somma proiettiva

proiezione dell'intersezione proiettiva

$$W_1 \oplus W_2 \longleftrightarrow \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2)$$

DIREMO CHE I DUE SOTTO SP. SONO SGHEMBI
(LE RETTE NON SI INCONTRANO)

UN PIANO PROIETTIVO NON AMMETTE COPPIE DI RETTE SGHEMBE
APPLICO FORMA DI GRASSMAN

Supp. $l', l \subseteq \mathbb{P}^2$ SGHEMBE

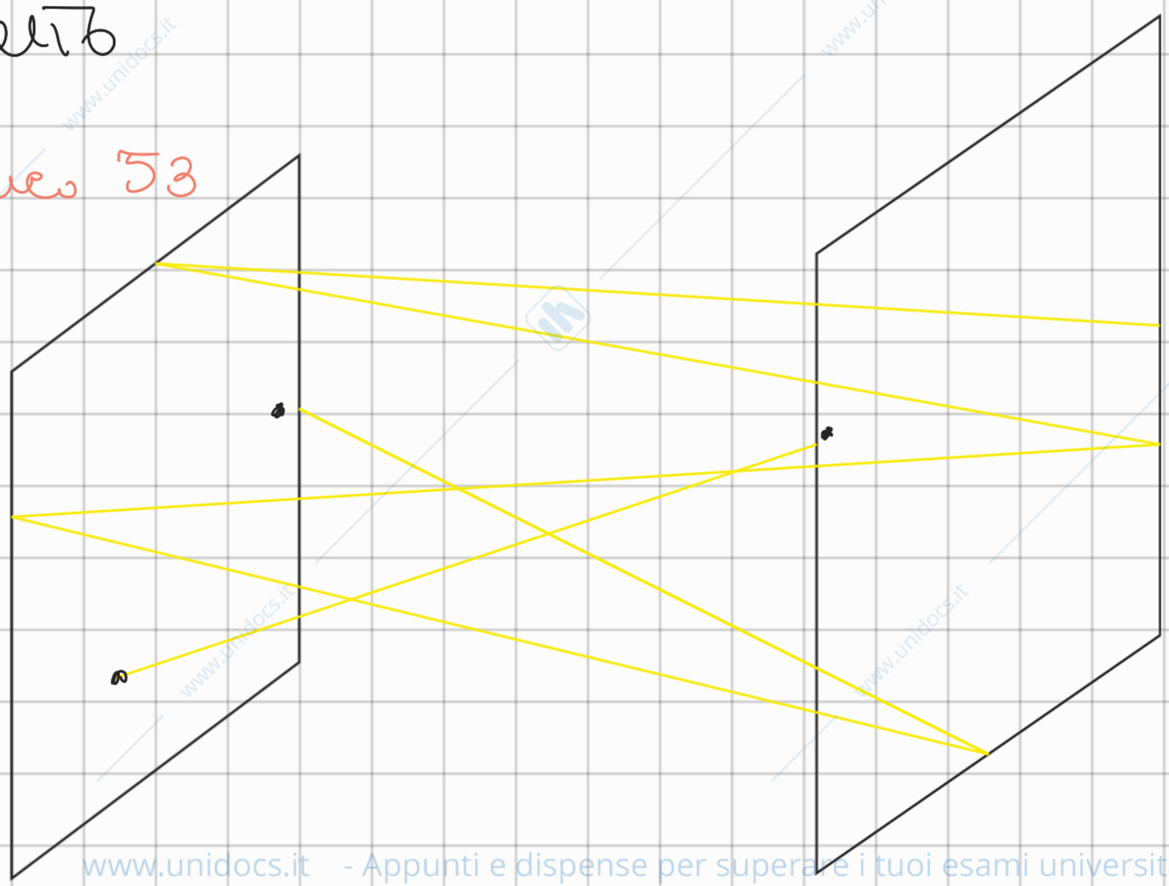
$$\dim \langle l, l' \rangle = \dim l + \dim l' + 1$$
$$1 + 1 + 1 = 3$$

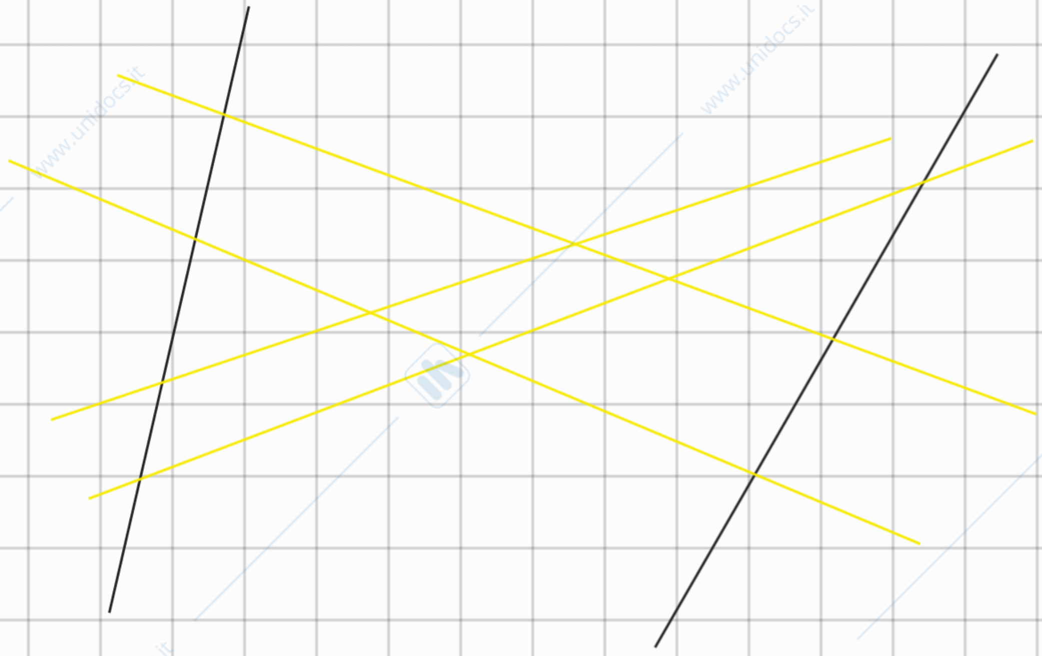
È assurdo perché la dimensione del sottosp. di Join è 2

Due rette in un piano si incontrano sempre

In $\mathbb{P}^3$ $\exists$ coppie di rette sghembe
in tal caso il Join è tutto $\mathbb{P}^3$
a meno che non si incontrino in un punto

Esercizio 53





Join è unione delle rette
cioè ogni punto sta in una secante
a queste due (?)

IL JOIN È IL PIÙ PICCOLO SOTTOSPAZIO CHE CONTIENE

Dobbiamo dim che la somma proiettiva è
inclusa nell'unione:

Tesi

$$\langle \mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2) \rangle \boxed{\subseteq} \bigcup_{P \in \mathbb{P}(W_1),\, P' \in \mathbb{P}(W_2)} \ell_{PP'}$$

Supponiamo che il punto non appartenga

$$Q \notin \mathbb{P}(W_1) \cup \mathbb{P}(W_2)$$

$$\exists\, \ell_{PP'} \mid Q \in \ell_{PP'} \text{ con } P \in \mathbb{P}(W_1) \wedge P' \in \mathbb{P}(W_2)$$

$$\langle \mathbb{P}(w_1), \mathbb{P}(w_2) \rangle = \mathbb{P}(\underbrace{W_1 + W_2}) \ni Q = [v]$$

⊳ il punto deve stare qui
cioè la sua direzione
deve stare nella somma

$$v \in W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \}$$

$$v \in L(w_1, w_2), \quad w_1 \in W_1 \wedge w_2 \in W_2$$

$$Q = [v] \in \mathbb{P}(L(w_1, w_2)) = \ell_{[w_1][w_2]}$$

SPAZIO PROIETTIVO COME AMPLIAMENTO

- insieme di classi di equivalenza secondo proporzionalità
- consideriamo l'insieme $P_K^n := K^n \cup P_K^{n-1}$

GLI ELEMENTI DI P_K^n SONO DI DUE TIPI

(i) vettori appartenenti alla potenza cartesiana K^n

(ii) direzioni nella potenza cartesiana K^n

METTO IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA:

$$\tilde{P}_K^n \to P_K^n :$$

$$c(t_1, \dots, t_n) := [1, t_1, \dots, t_n] \; ; \; \forall (t_1, \dots, t_n) \in \tilde{K}$$

$$c(t_1, \dots, t_n) := [0, t_1, \dots, t_n] \; , \; \forall [t_1, \dots, t_n] \in P_K^{n-1}$$

dobbiamo dimostrare che è BIETTIVA

$U_0 = \{[x_0, \dots, x_n],\ x_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n_K$

$i : K^n \longrightarrow U_0$

$i : \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow U_0^*$ COMPLEMENTARE

c) biunivoca

$i(t_1, \dots, t_n) = [1, t_1, \dots, t_n]$

é iniettiva (supp che due immagini coincidono) cioé

$$i(t_1, \dots, t_n) = i(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$$

$$[1, t_1, \dots, t_n] = [1, t'_1, t'_2, \dots, t'_n]$$

ci deve essere una costante di proporzionalità tale che

$$\lambda(1, t_1, \dots, t_n) = (1, t'_1, \dots, t'_n)$$

se confrontiamo i primi coefficienti troviamo

$$\lambda = 1$$

quindi $(1, t_1, \dots, t_n) = (1, t'_1, \dots, t'_n)$

a maggior ragione

$$(t_1, \dots, t_n) = (t'_1, \dots, t'_n)$$

DIMOSTRIAMO CHE È SURIETTIVA

$\forall$ punto $P \in U_0$ $\exists$ un vettore $(t_1, \dots, t_n)$ tale che
$\iota(t_1, \dots, t_n) = V$

$$P = [x_0, x_1, \dots, x_n] \qquad x_0 \neq 0$$

$$P \equiv \left[1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right] = \iota\underbrace{\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}$$

è il vettore che stavamo cercando $\rightarrow$

$\rightarrow$ basta porre $(t_1, \dots, t_n) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$

$v_1, v_2 \in \mathbb{K}^n$

L è l'unica retta nello spazio affine passante per v_1 e v_2

$i(L) \subseteq \mathbb{P}^n \qquad \iota(v_1) = P_1, \; \iota(v_2) = P_2$

$\langle P_1, P_2 \rangle = \ell_{P_1 P_2} =$

PREMESSA

$v^{\perp}: \{ u : \varphi(v, u) = 0 \}$ $\quad \varphi(v,u) = \varphi_v(u) = 0$

$\varphi_v : V \to K$

$\varphi_v(u) := \varphi(v, u)$ forma lineare su V

$v^{\perp} = \text{Ker}\, \varphi_v$

$\dim V = \dim \text{Ker}\, \varphi_v + \dim \text{Im}\, \varphi_v =$

$= \dim v^{\perp} + \dim \text{Im}\, \varphi_v$

$\dim v^{\perp}$ $\begin{cases} \dim V \\ \dim V - 1 \end{cases}$

se è anisotropo $= \varphi(v, v) = \varphi_v(v) \neq 0$

quindi v non c'è nel nucleo

$\dim v^{\perp} = n - 1$

$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$= 0x_1 + 0x_2 \equiv 0$ questo non è ANISOTROPO

ESERCIZIO 79

$$V = \underset{1}{L(v)} \oplus v^{\perp} \rightarrow \text{dim} - 1$$

è sufficiente dimostrare che la somma è diretta
cioè che l'intersezione tra
la retta generata da v
e la perpendicolare è nulla

$$L(v) \cap v^{\perp} = \{0\}$$

GRASSMANN

Prendiamo un vettore nell'intersezione:

$u \in L(v) \cap v^{\perp}$ $\quad u = 0$

Io so che u $\in L(v)$, $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $u = \lambda v$

$\in v^{\perp}$ $\quad g(v, u) = 0$

USO LA LINEARITÀ

$$g(v, \lambda v) = 0 = \lambda g(v, v) = \lambda q(v)$$

FORMA QUADRATICA $\quad \neq 0$ vettore è anisotropo

$\lambda = 0$

se $\lambda = 0 \Rightarrow u = 0$

La somma è diretta

TEO DIAGONALIZZAZIONE

ci consente di trovare una base

1) POLARIZZAZIONE $\Rightarrow \exists$ vettori anisotropi

2) $V = L(v) \oplus v^{\perp}$

3) applico ipotesi induttiva a $v^{\perp}$

Dim

Base d'induzione $\dim V = 1$

l'enunciato è ovvio perché la matrice associata è 1×1 perché la dim dello sp. vettoriale è 1

PASSO INDUTTIVO $\dim V = n+1$

per ip induttiva supp. che sia vera per tutti gli spazi di dimensione n

usiamo la FORMULA DI POLARIZZAZIONE

$$y(v,u) = \frac{1}{2}\{q(v+u) - q(v) - q(u)\}$$

- $y = 0$ l'enunciato è banale

$y(v,u) \neq 0$ la forma quadratica assumerà almeno un vettore anisotropo

assumo v anisotropo cioè $q(v) \neq 0$

Applico a v l'esercizio 7.9

$$V = L(v) \oplus v^{\perp} \qquad \dim v^{\perp} = \dim V - 1 = m$$

PER IPOTESI INDUTTIVA $v^{\perp}$ POSSEDE UNA BASE ORTOGONALE (formata da vettori ortogonali tra lo

$\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$

aggiungo v perché è ortogonale ai vettori e

$\{v, e_1, \dots, e_m\}$ è la BASE CERCATA

COMMENTO LA BASE TROVATA È ORTOGONALE SONO INDIPENDENTI PERCHÉ GENERANO LO SPAZIO VETTORIALE

$$\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$

$$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \to (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 y_2 + x_2 y_1$$

$$q(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 = 0$$

tutti i vettori sono anisotropi quindi anche se la matrice non è zero

infatti $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile in un campo di caratteristica 2

SUPP. PER ASSURDO che sia diagonalizzabile
$\exists$ una base
$\{u_1, u_2\}$ che diagonalizzi la forma

$$\begin{pmatrix} \varphi(u_1,u_1) & \varphi(u_1,u_2) \\ \varphi(u_2,u_1) & \varphi(u_2,u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(u_1) & 0 \\ 0 & \varphi(u_2) \end{pmatrix} =$$

matrice diagonale

forma quadratica

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per il teo. di diagonalizzazione
$\exists$ un sistema di coordinate nelle quali l'equazione assume la forma seguente:

$$\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 = 0$$

VEDIAMO CASI PARTICOLARI

1) CAMPO ALGEBRICAMENTE CHIUSO
2) CAMPO REALE

1) $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \neq 0 \quad \exists \sqrt{\lambda_i} \quad 1 \le i \le r$

$y_1 = \sqrt{\lambda_1}\, x_1 \qquad y_i^2 = \lambda_i x_i^2$

$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_r^2 = 0$ quadrica scritta in forma canonica

rado e vedere quelli diversi da zero e l'equazione si trasforma in una somma di quadrati.

La forma canonica dipende solo dal rango

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$rg = 1 \qquad rg = 2 \qquad rg = 3$

2) $V \mid \mathbb{R}$

non tutti gli scalari hanno radice quadrata però c'è la radice quadrata del suo opposto

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p > 0 \qquad \lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_r < 0$

$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 =$

$1 \leq i \leq p$ per def : $y_1 = \sqrt{\lambda_i}\, x_1$ $\quad y_1^2 = \lambda_1 x_1^2$

si può fare perché i primi p sono positivi

quando invece

$p+1 \leq i \leq r$ poniamo $y_i = \sqrt{-\lambda_i}\, x_i$ $\quad y_1^2 = -\lambda_1 x_1^2$

FORME CANONICHE DELLE QUADRICHE REALI

$$y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{rg = 1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad rg = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad rg = 3$$

F è un endomorfismo
(matrice quadrata che rappr.

$M^{-1} F M$ SIMILITUDINE

A forma bilineare

$M^t A M$ congruenza

Nel campo reale coincidono le similitudine con la congruenza

Quadriche definite in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \qquad (a,b,c) \neq (0,0,0)$$

supp. che 1) $\boxed{a = c = 0} \Rightarrow bxy = 0 \qquad xy = 0$

$x = 0$ oppure $y = 0$

$x = 0 \wedge y \neq 0 \quad$ o $\quad x \neq 0 \wedge y = 0$

$[0, y] \equiv [0, 1] \qquad [x, 0] \equiv [1, 0]$

secondo punto base canonica

primo punto base canonica

se $\boxed{a \neq 0}$ $\quad ax^2 + bxy + cy^2 = 0$

$[1,0]$ NON È UN PUNTO DELLA QUADRICA
TUTTE LE EVENTUALI SOLUZIONI SONO DEL TIPO
$[x,y]$ con $y \neq 0$ $\quad [x,y] = \left[\frac{x}{y}, 1\right]$

$\frac{x}{y} = t$

$at^2 + bt + c = 0$, equazione polinomiale in una sola incognita t

Si possono presentare tre casi

a) NESSUNA SOLUZIONE (la quadrica è vuota)

b) un'unica soluzione (doppia) $a(t_1 - t_0)^2 = 0$

c) due soluzioni distinte

Se K è algebricamente chiuso escludo la a)

21 MARZO

$P \neq P'$: $P = [x_0, \dots, x_n]$, $P' = [y_0, \dots, y_n] \in \mathbb{P}^n$
cerco punti intersezione tra $l_{PP'}$ (retta) e quadrica associata ad A (matrice)

siano $X = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in K^{n+1}$

$l_{PP'}$: $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1_K \to [\lambda X + \mu Y] \in \mathbb{P}^n_K$ $\to$ FORMA PARAMETRICA

$X^t A X = 0 \to$ EQ QUADRATICA DI A

L' INTERSEZIONE è : $(\lambda x + \mu y)^t A (\lambda x + \mu y) = 0$

cioè : $\underbrace{\lambda^2 x^t A x}_{\text{F. QUADRATICA IN P}} + 2\lambda\mu \underbrace{\phi_A(x,y)}_{x^t A y} + \underbrace{\mu^2 y^t A y}_{\text{FORMA QUADRATICA IN P'}} = 0$

NB l'equazione con λ, μ ha come sol $[P]$, $[P']$

OSS se $x^t A x = x^t A y = y^t A y = 0 \Rightarrow l_{pp'} \subseteq$ QUADRICA
$\Rightarrow x = y$ = ISOTROPO $\Rightarrow x \perp y$

NB l'equazione con λ, μ ha come sol $\emptyset$, $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_1 \neq \mu_1$

Se P ∈ QUADRICA $\Rightarrow \cap = P$: molteplicità$(P) = 2$
$\cap = P, S : P \neq S$

DEF $l_{pp'} \cap x^t A x = \{P\} \Rightarrow l$ Tang $x^t A x$ in P
$l_{pp'} \cap x^t A x = \{P, P'\} \Rightarrow l$ tang $x^t A x$ in P, P'

PUNTI SEMPLICI E IPERPIANO TANGENTE

voglio trovare rette tangenti a $q \in P_K^m$: $P = [x] \in q$
$q \subset P_K^m$ in un suo punto

Fisso $P' \neq P$: $P' = [y]$ allora $l_{pp'} \cap q$:

$$\mu (2\lambda \phi_A(x,y) + \mu y^t A y) = \mu(a\lambda + b\mu) = 0$$

L'equazione ha soluzione $[\lambda, \mu] = [1, 0]$
corrispondente al punto P

Se $A(x,y) \neq 0 \Rightarrow [\lambda, \mu] = [b, -a]$ è secante

Supponiamo $\phi_A(x,y) = 0 \wedge y^t A y \neq 0$ $[\lambda, \mu] = [1, 0]$
sol. doppia
retta tangente in P

Se $\phi_A(x,y) = y^t A y = 0$ allora $l_{pp'} \subseteq q$

RIASSUMENDO:

$\phi_A(X,Y) \neq 0 \Rightarrow$ SECANTE

$\phi_A(X,Y) = 0$ e $Y^t A Y \neq 0 \Rightarrow$ RETTA TANGENTE IN P

$\phi_A(X,Y) = 0$ e $Y^t A Y = 0 \Rightarrow$ RETTA CONTENUTA NELLA QUADRICA

"di contatto"

Fissato $P = [x] \in q$, la condizione $X^t A Y = 0$ si interpreta come un'equazione in incognite $[Y] = P'$

posto $Z^t = [z] = X^t A \in \mathcal{M}^{n+1}$ può: $z \neq 0$ o $z = 0$

(i) $z \neq 0 \Rightarrow P$ è semplice

$z_0 y_0 + \dots + z_n y_n = 0$ *

soluzione* = IPERPIANO TANGENTE a $P = tg(q, P)$

(ii) $z = 0 \Rightarrow P$ è doppio

tutte le rette che passano per P sono di contatto

DEF $q \not\ni P$ = doppi $\Rightarrow q$ = non degenere

$q \ni P$ = doppi $\Rightarrow q$ = degenere (almeno un p doppio)

DEF $P = [x]$ è DOPPIO e $q \Leftrightarrow X^t A = 0$

ovvero: $AX = 0 \in \mathcal{M}^{n+1}$

ha coordinate omogenee col $\in$ contenuto nel nucleo $\cup P$ doppi = sotto sp. proiett.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari