GEOMETRIA 23 MARZO

$\mathbb{K}$ ALGEBRICAMENTE CHIUSO

Considero piano proiettivo $\mathbb{P}^2_K$

una quadrica è classificata dal rango
- 1
- 2
- MASSIMO (3)

RANGO 1 — LA QUADRICA ASSUME QUESTA FORMA $y_0^2 = 0 \iff$ IPERPIANO DOPPIO
RETTA DOPPIA

RANGO 2 — $y_0^2 + y_1^2 = 0 \iff$ RIDUCIBILE (UNIONE DI DUE RETTE)

$$(y_0 + i y_1)(y_0 - i y_1) = 0$$

RANGO 3 — $y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = 0$ CONICA PRIVA DI PUNTI DOPPI
CONICA NON DEGENERE
(NON PUÒ CONTENERE RETTE)

QUADRICHE IN $\mathbb{P}^3_K$, K ALG. CHIUSO

QUADRICHE DEGENERI $1 \leq rg \leq 3$

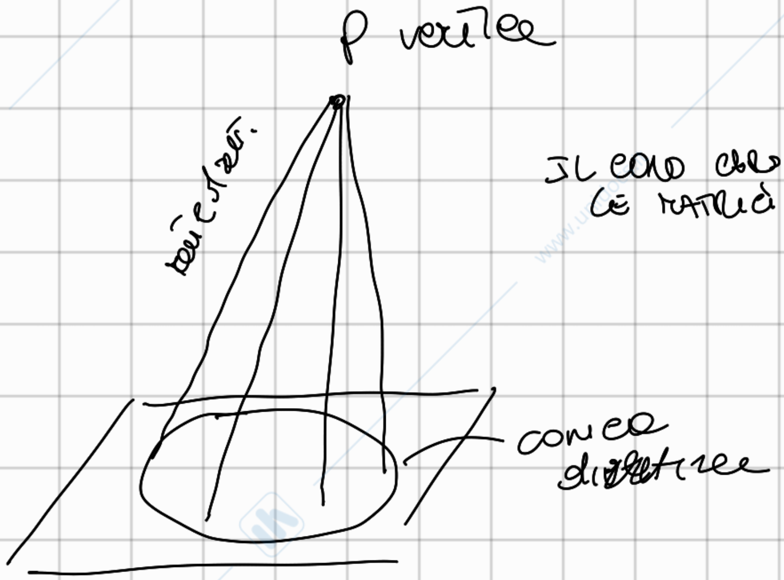
$rg\, A = 1 \Rightarrow$ PIANO DOPPIO
$rg\, A = 2 \Rightarrow$ QUADRICA RIDUCIBILE
$rg\, A = 3 \Rightarrow$ CONO DI VERTICE 1 PUNTO

unioni **quadrica riducibile** avrà tale equazione

$$\underbrace{(a_0x_0+\dots+a_3x_3)}\underbrace{(b_0x_0+\dots+b_3x_3)}=0$$

EQUAZ LINEARI
le cui radici formano i due piani

Cono di vertice 1 punto



IL CONO CARATTERIZZA LE MATRICI DI RANGO 3

Considerazione di tipo geometrico

premessa: K campo infinito $f \in K[x_0,\dots,x_n]$ polinomio

Supponiamo che f non sia polinomio nullo: $f \neq 0$
ogni polinomio definisce una funzione polinomiale: $f: K^{n+1} \to K$
$(\alpha_0,\dots,\alpha_n) \to f(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$

NON È IDENTICAMENTE NULLA

conseguenza: CI DEVE ESSERE ALMENO UN PUNTO CHE NON SODDISFA L'EQUAZIONE

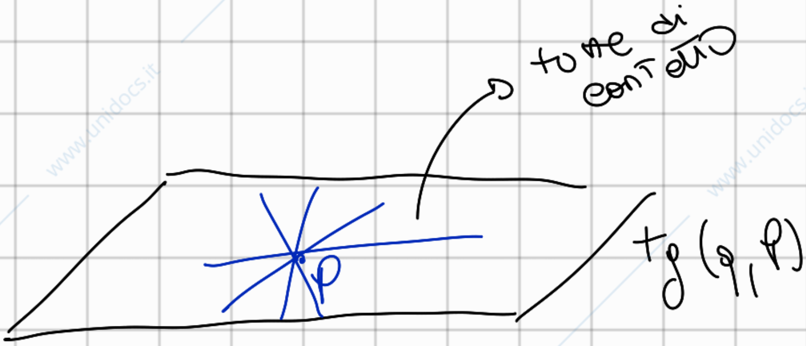
UNA QUADRICA NON PUÒ RIEMPIRE TUTTO LO SPAZIO SE IL CAMPO È INFINITO.

OSSERVAZIONE

Supp. quadrica $q \in P$ punto semplice $\mathbb{P}^3 \supseteq q$

$\exists$ piano tangente $T_g(q, P) \cap q = C$ interseco la quadrica con uno dei suoi piani tangenti

una quadrica in un piano la chiamo conica.
necessariamente degenere



P è un punto doppio di C
deriva dalla definizione di tangente
tutte le rette sono di contatto

PROPOSIZIONE

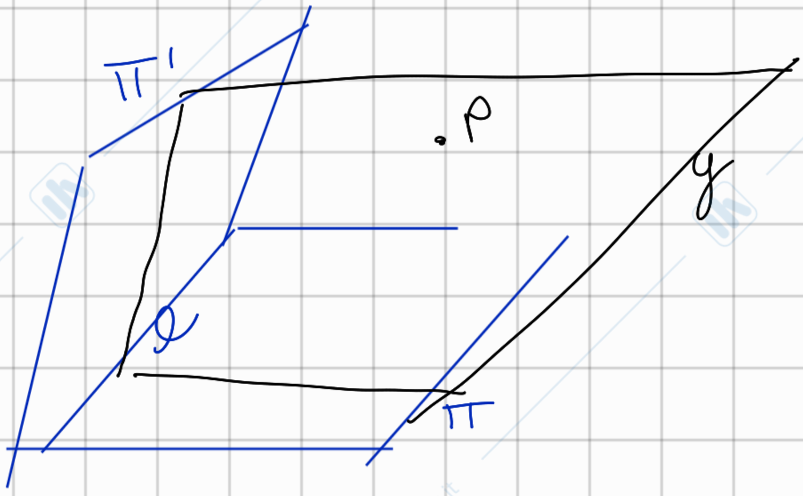
UNA QUADRICA CONTIENE DUE PIANI DISTINTI SE E SOLO SE È RIDUCIBILE

q contiene 2 piani distinti $\Rightarrow$ q è riducibile ($rg = 2$)

$(a_0 x_0 + \ldots + a_3 x_3)(b_0 x_0 + \ldots + b_3 x_3) = 0$

$\Leftarrow$ ovvia perché si vede che è costituita da 2 piani

$\Rightarrow$ SE CONTIENE 2 PIANI DISTINTI NON C'È NESSUN ALTRO PUNTO AL DI FUORI DEI DUE PIANI (dobbiamo dimostrarlo) quindi non possiede altri punti al di fuori dei due piani



ASSUMIAMO CHE C'È UN PUNTO FUORI E VEDIAMO CHE TUTTO LO SPAZIO È CONTENUTO DA LO SPAZIO

l è la retta comune ai due piani
prendo altro piano passante per P non contenente l

$y \ni P$, $y \not\ni l$ piano ⟹

RICORDA

(un piano ed una retta si devono per forza incontrare per Grassman passando ai proiettivi per ragioni dimensionale)

V $\dim V = 4$ U^3, W^2

non è possibile $U^3 \cap W^2 = \{0\}$
c'è almeno una retta in comune e quindi un punto in comune piano e retta

$\Rightarrow \gamma' \subseteq q$

ogni piano distinto da $<P_1, \ell>$
è INTERAMENTE CONTENUTO IN q

devono essere soddisfatte queste condizioni:

Poiché ogni punto di $\mathbb{P}^3$ appartiene a qualche piano
$y \in P_1$, $y \not\supset \ell$

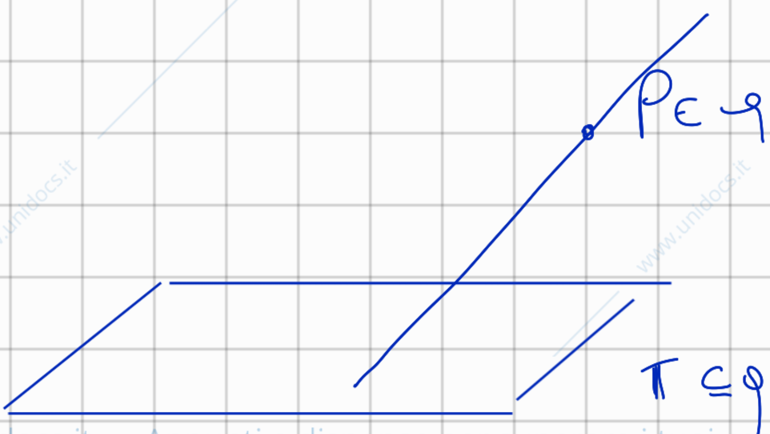
arriviamo all'assurdo, che $\mathbb{P}^3 \subset q$

PROPOSIZIONE 2

una quadrica contiene un piano se e soltanto se
è un piano doppio oppure è riducibile

Tz: Si se q contiene un piano ma non è un piano
doppio, allora è riducibile

Prendo quadrica che contiene piano, ma non è un piano doppio
dobbiamo dimostrare che contiene
un altro piano, così seguirà la proposizione 1
e quindi sarà riducibile



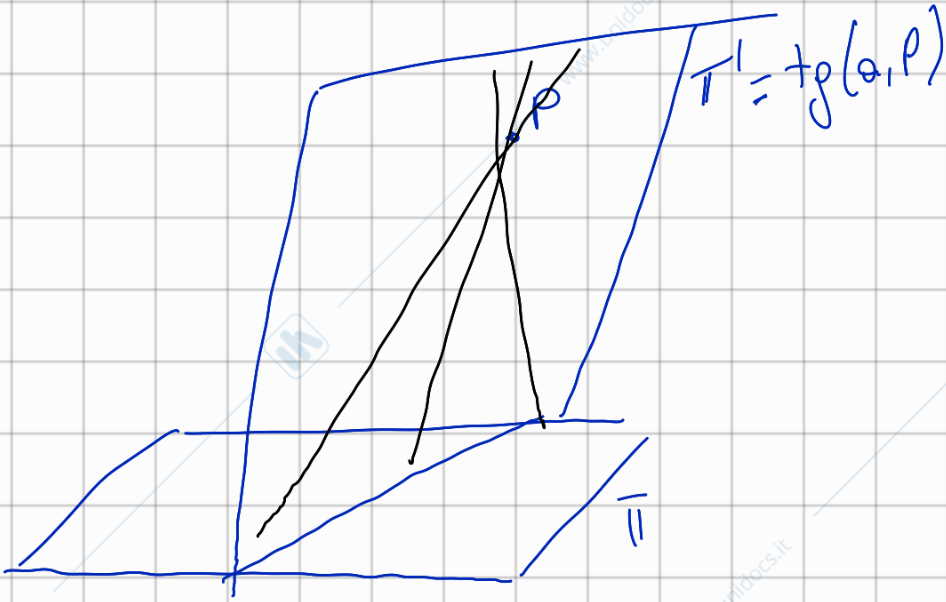
Se c'è almeno un altro punto doppio ho mostrato che è comunque reducibile

P è necessariamente un punto semplice

(altrimenti avremmo $q = \mathbb{R}^3$)

MOSTRO CHE PIANO TANGENTE È INCLUSO NELLA QUADRICA

$$Tg(q, P) = \pi' \subseteq q$$



ogni retta s $P \in S \subseteq \pi'$, $S \subseteq q$ appartiene alla quadrica

$$\pi' = Tg(q, P) \subseteq q$$

↳ MIA QUADRICA CONTIENE 2 PIANI DISTINTI

$$\pi \cup \pi' \subseteq q$$

È RIDUCIBILE

PER LA PRIMA PROPOSIZIONE

$z_0 y_0 + \dots + z_n y_n = 0$ *

$Z \neq \underline{0}$ almeno uno dei coeff. diversi da zero

perché questa equazione definisce un iperpiano?

* l'eq. definisce un sottospazio vettoriale
di K^{n+1} di dimensione n
perché è numero di incognite meno rango

PASSANDO AI PROIETTIVI

il proiettivizzato avrà dimensione $n-1$

NATURA DEI PUNTI SEMPLICI

consideriamo le quadriche prive di punti doppi o solo uno

Supp. che P è punto semplice
DI UNA QUADRICA NON RIDUCIBILE
(questa quadrica non contiene piani)
Se intersechiamo la quadrica con il TANGENTE
Taglia la quadrica al massimo in due rette