STUDIO DEGLI ELLISSOIDI

LE Q. NON. DEG. SI CLASSIFICANO:

1) STUDIO CONICA INFINITO
- a) ellissoidi } conica infinito non degenere immaginaria
- b) iperboloidi → reale
- c) paraboloidi → CONICA DEG. RIDUCIBILE

2) NATURA PUNTI
- a) PUNTI ELLITTICI → PUNTO DI TANGENZA
- b) PUNTI IPERBOLICI → TAGLIANO LA Q. IN DUE RETTE REALI

È NECESSARIO DET. IL SEGNO DEL DETERMINANTE quando è pos non c'è nessun punto ed è ellissoide (?)

punti ellittici ⇒ det negativo

IPERBOLOIDI: conica infinito non degenere (3 AUTOVALORI NON NULLI) REALE

DUE CASI:

iperboloidi a punti ellittici

$$a_{11}|A_{00}|>0 \quad , \quad a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$$

le due non sono completamente verificate

e $|A|<0$

iperboloide A PUNTI IPERBOLICI

$$a_{11}|A_{00}|>0 \quad , \quad a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$$

non verificate contemporaneamente

e $|A|>0$

cambia solo la condizione del segno del determinante

possiamo dire che gli autovalori di A_{00} sono di segno discorde (non nulli e di segno discorde)

ESEMPIO

IPERBOLOIDE A PUNTI ELLITTICI

$$-\frac{x^2}{a_1}+\frac{y^2}{a_2}-\frac{z^2}{a_3}=1$$

$$\frac{x^2}{a_1}-\frac{y^2}{a_2}+\frac{z^2}{a_3}=-1$$

SCRIVO LA MATRICE

OMOGENIZZO 1

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

tre autovalori non nulli di segno discorde

il det. è negativo => punti ellittici

considerazione

$$\frac{x^2}{a_1}+\frac{z^2}{a_2}=-1+\frac{k^2}{a_2}$$

se $k=0$ ellisse di raggio negativo non ci sono soluzioni

man mano che cresce k cresce anche l'ellisse

PARABOLOIDI

quadrica non degenere
conica degenere (?)

IL RANGO DI A_∞ è pari a 2 in quanto Γ_∞ è riducibile

(il piano all'infinito è tangente alla quadrica)

SI DISTINGUONO DUE CASI

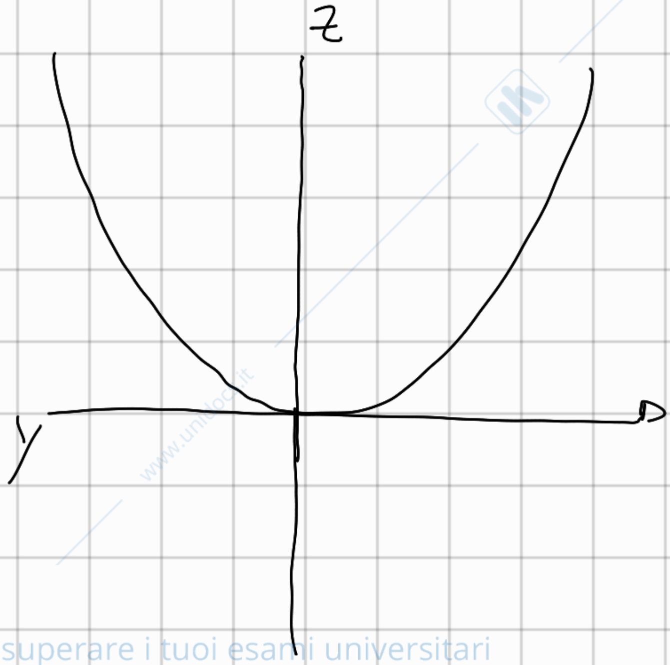
$$\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}-2x_3x_0=0 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PARABOLOIDE A PUNTI IPERBOLICI

$$-\frac{x^2}{a_1}+\frac{y^2}{a_2}=2z$$

8

$$2z=-\frac{x^2}{a_1} \quad \text{quando } y=0$$



QUADRICHE NON DEGENERI

Γ_∞

- non degenere immaginaria
  - $|A|>0$ non ha punti: ellissoide immaginario
  - $|A|<0$ ellissoide reale
- non deg. reale
  - $|A|>0$
  - $|A|<0$ IPERBOLOIDE A 2 FALDE
- degenere
  - $|A|>0$ A_∞ HA AUTOVALORI DI SEGNO DISCORDE
  - $|A|<0$ PARABOLOIDE A PUNTI ELLITTICI. A_∞ HA AUTOVALORI DI SEGNO CONCORDE

FORMA CANONICA DELLE QUADRICHE IRRIDUCIBILI

La matrice A_{∞}, essendo simmetrica e reale definisce un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^3$ che ammette una base ortonormale di autovalori

Esiste una matrice $M=(m_{ij})$ ORTOGONALE

$$\mathrm{DIAG}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = M^t A_\infty M$$

(LA MATRICE M HA PER COLONNE UNA BASE ORTONORMALE DI

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = (v_i^t \, v_j) = (\delta_{ij})$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$$

L'inverso coincide con la trasposta

M è ORTOGONALE cioè $M^{-1} = M^T$

NELLE NUOVE COORDINATE, LA QUADRICA ASSUME LA SEGUENTE FORMA

$$\lambda_1 (y_1')^2 + \lambda_2 (y_2')^2 + \lambda_3 (y_3')^2 + 2\alpha_1 y_1' + 2\alpha$$

IL FATTO CHE LA MATRICE SIA ORTOGONALE È UN'ISOMETRIA $\Rightarrow$ ISOMETRIA cioè un'applicazione che conserva

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

$$\|v\|^2 = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v^t v$$

$$\underset{\substack{\#\\0}}{\lambda_1} y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + 2\alpha_1 y_1 + 2\alpha_2 y_2 + 2\alpha_3 y_3 + k = 0$$

$$\lambda_1 y_1^2 + 2\alpha_1 y_1 = \lambda_1\left(y_1 + \frac{\alpha}{\lambda_1}\right)^2 - \frac{\alpha_1^2}{\lambda_1} = \lambda_1 z_1^2$$

$$z_1 = y_1 + \frac{\alpha_1}{\lambda_1}$$

I CASO

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non nulli con lo stesso segno

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = h \qquad \lambda_i > 0$$

$h > 0 \Rightarrow$ ellissoide reale

$h < 0 \Rightarrow$ ellissoide immaginario

$h = 0 \Rightarrow \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 0 \quad (0,0,0)$

(cono immaginario)

II CASO

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non nulli di segno discorde

$$a_i = |\lambda_i|$$

$$a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 - a_3 y_3^2 = h$$

$h > 0 \Rightarrow$ iperboloide a punti iperbolici

$h < 0 \Rightarrow$ iperboloide punti ellittici

$h = 0 \Rightarrow a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 - a_3 y_3^2 = 0$

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$$

(cono reale)

Giovedì santo

Esercizio

$$x^2 - 2xy + 2y^2 + z^2 - 1 = 0$$

scrivo quadrica in coordinate affine

$$y_1^2 - 2y_1y_2 + 2y_1y_2^2 + y_3^2 - 1 = 0$$

ora in coordinate omogenee, nello sp. proiettivo

$$-x_0^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 = 0$$

MATRICE ASSOCIATA

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ quadrica non DEGENERE

CALCOLO DET. CON LAPLACE

$$-1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 = $$

$= |A|$ prec. ellit. ca.

$$|A_{00}| = 1$$

$a_{11} |A_{00}| > 0$,

$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$

sono verificate
contemporaneamente
questo mi dice
che è un
ELLISSOIDE

La quadrica è un ellissoide reale

TROVO AUTOVALORI $\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$

$$\left|\begin{pmatrix} 1-x & -1 \\ -1 & 2-x \end{pmatrix}\right| = (1-x)(2-x) - 1 = 0$$
$$= x^2 - 3x + 1 = 0$$

Esercitazione

$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$rg\, A = 3 = rg\, A_{00}$

questo mi dice che è un cono
perche vuol dire che c'è un
punto doppio che non
sta all'infinito

IN GENERALE QUANDO

Γ_{∞} reale $\Rightarrow$ cono reale

Γ_{∞} immag. $\Rightarrow$ cono IMMAGINARIO

* STUDIARLA ANDIAMO A VALUTARE:

autovalori discordi x 1° CASO

concordi x 2° CASO

IL VERTICE DEL CONO DEVE ESSERE UN PUNTO PROPRIO

punto di coordinate omogenee

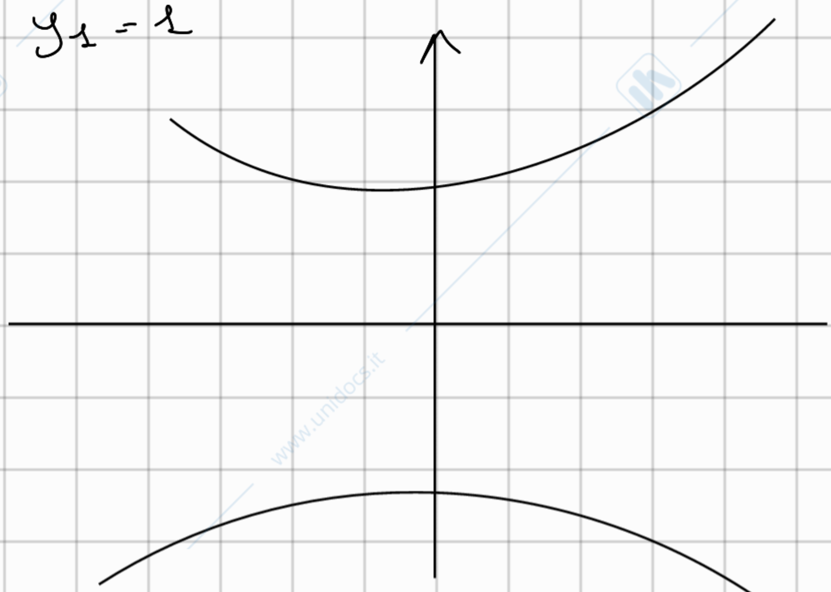
$$P_0 \equiv [1,0,0,0] \rightsquigarrow (0,0,0)$$

spazio affine

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0 \\ y_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1^2 + y_2^2 = 1 \\ y_3 = 1 \end{cases} \leftarrow \text{conica}$$

$$\begin{cases} y_2^2 - y_3^2 = -1 \\ y_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_3^2 - y_2^2 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

IPERBOLE



$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0 \\ y_1 = y_3 + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (y_3+1)^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0 \\ y_1 = y_3 + 1 \end{cases}$$

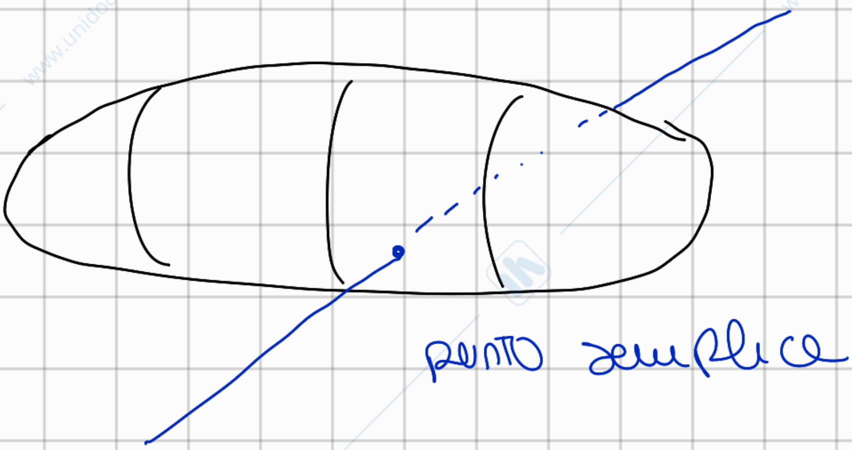
$$\begin{cases} y_2^2 + 2y_3 + 1 = 0 \\ y_1 = y_3 + 1 \end{cases}$$

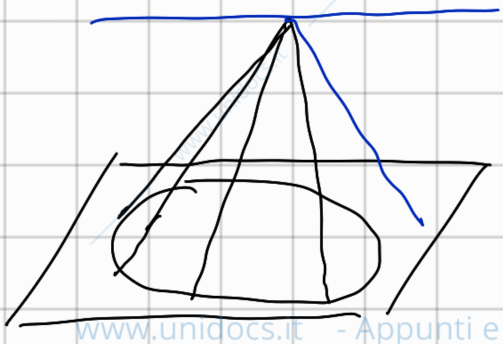
RIPETIAMO:

CONSIDERO una quadrica ed un punto semplice (c'è qualche retta secante passante per P)

$\nexists \; q \ni P$

PUNTO DOPPIO, tutte le rette per P sono di contatto





punto doppio
↳ RETTA
o incontra il cono solamente nel vertice
oppure è interamente

quindi ✱

$q \ni P$ semplice $q \cap Tg(Q, P) = \mathcal{C}$

P è un punto doppio di $\mathcal{C}$

|| per def di spazio tangente, esso non contiene secanti

Esercizio

$6x^2 - 6xz - 2 = 0$

scrivo coordinate affini

$6y_1^2 - 6y_1y_3 - 2 = 0$

coord. omogenee:

$-2x_0^2 + 6x_1^2 - 6x_1x_3 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg\, A = 3$

1ª, 2ª, 3ª colonna sono indipendenti

$rg\, A_\infty = 2$ è un cilindro

cilindro:

$rg = 1$ parabolico

$rg = 2$ iperbolico o ellittico

VEDIAMO CHI È IL PUNTO DOPPIO: il terzo vettore della base canonica

$Ker\, A < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$

$P_0 = [0, 0, 1, 0]$ improprio

per distinguere il punto improprio basta guardare coordinata zeresima uguale a zero

STABILIAMO SE È ELLITTICO O IPERBOLICO

ANDIAMO A GUARDARE GLI AUTOVALORI di A_{00}

oppure:

$$-2x_0^2+6x_1^2-6x_1x_3=0$$

interseco con il piano all'infinito

$$\begin{cases} -2x_0^2+6x_1^2-6x_1x_3=0 \\ x_0=0 \end{cases}$$

$$\Gamma_\infty \quad \begin{cases} 6x_1^2-6x_1x_3=0 \\ x_0=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_1(x_1-x_3)=0 \\ x_0=0 \end{cases}$$

SONO DUE RETTE REALI

È UNA CONICA RIDUCIBILE REALE
QUINDI È CILINDRO IPERBOLICO

$$x^2+3y-z=0$$

$$y_1^2+3y_2^2-y_3=0 \qquad x_1^2+3x_2^2-x_0x_3=0$$

$$rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

PARABOLOIDE

É una quadrica non degenere

$$|A| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{3}{4} < 0$$

PARABOLOIDE A PUNTI ELLITTICI