APPLICAZIONI LINEARI

1. Esercizi

Esercizio 1. Date le seguenti applicazioni lineari

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y) = (x - 2y, x + y, x + y)$;
(2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $g(x, y, z) = (x + y, x - y)$;
(3) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $h(a, b, c) = (2a + c)\mathbf{i} + (\mathrm{b} - \mathrm{c})\mathbf{j}$;

calcolarne nucleo, immagine e matrice associata rispetto alle basi canoniche.

Esercizio 2. Calcolare $g \circ f$ e $f \circ g$ dove f e g sono le applicazioni lineari del precedente esercizio. Verificare che la matrice associata rispetto alle basi canoniche a $g \circ f$ è $A_g A_f$ dove A_g è la matrice associata rispetto alle basi canoniche a g e A_f è quella associata ad f sempre rispetto alle basi canoniche.

Esercizio 3. Calcolare $\ker f$ ed $\mathrm{Im} f$ per l' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata rispetto alla base canonica $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ di $\mathbb{R}^3$ alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

e verificare il teorema del rango ($\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f$). f è iniettiva? f è suriettiva?

Esercizio 4. Data l' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ definita da

$$f(a, b, x, y) = (x + y, x + y, x + y, a + b, a + b, a + b)$$

calcolare $f^{-1}(1, 2, 1, 1, 0, 0)$ ed $f^{-1}(2, 2, 2, 1, 1, 1)$. Calcolare, inoltre, $\dim \ker f$ e $\dim \mathrm{Im} f$, e la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ ed $\mathbb{R}^6$.

Esercizio 5. Calcolare la matrice associata all' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica C di $\mathbb{R}^3$ e C' di $\mathbb{R}^2$, dove f è definita dalle seguenti condizioni: $f(1, 1, 0) = (1, 0), f(1, 0, 1) = (1, x), f(0, 1, 1) = (0, 1)$. Studiare poi f.

Esercizio 6. Data l' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definita come

$$f(1, 1) = (1, 0, 0, -1), f(1, 2) = (-2, 0, 0, 2),$$

calcolare $f^{-1}(3, 0, 0, -3)$.

Esercizio 7. Esiste un' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che verifica $f(1, -1) = (1, 1)$, $f(0, -1) = (0, 1)$, $f(1, -2) = (1, 4)$? Esiste un' applicazione (non lineare) che le verifica?

Esercizio 8. Dire se l' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(1, 1) = (2, 1)$, $f(1, 2) = (-1, 0)$ è invertibile, e, in caso affermativo, calcolarne l' inversa.

Esercizio 9. Un' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$

(1) è sempre iniettiva;
(2) è sempre suriettiva;
(3) non è mai iniettiva;
(4) non è mai suriettiva.

Esercizio 10. L' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$$f(x, y, z) = (x + y, 0, y + z, x + z)$$

(1) è invertibile;
(2) $f^{-1}(1, 0, 0, 1)$ è formato da infiniti vettori;
(3) ha come immagine un sottospazio di dimensione 3;
(4) $\dim \mathrm{Im} f = 2$.

Esercizio 11. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un' applicazione lineare tale che $f(1, 1) = f(1, -1)$.

(1) f è suriettiva. (V) (F)
(2) $(0, 1) \in \ker f$. (V) (F)
(3) $\dim \ker f = 1$. (V) (F)
(4) f non è iniettiva. (V) (F)
(5) Esistono infinite applicazioni lineari verificanti le condizioni date. (V) (F)

Esercizio 12. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l' applicazione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + z).$$

(1) f non è lineare;
(2) $\ker f$ ha dimensione 1;
(3) f non è suriettiva;
(4) f è iniettiva.

Esercizio 13. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l' applicazione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x - 2z).$$

(1) $(1, 0, 1) \in \mathrm{Im} f$;
(2) $\ker f$ ha dimensione 2;
(3) la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche è $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$;
(4) $\ker f = \mathcal{L}((1, 0, 1))$.

2. Soluzione di alcuni esercizi

Soluzione dell' Esercizio 1. Cominciamo studiando $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che è definita come

$$f(x, y) = (x - 2y, x + y, x + y).$$

Il nucleo è dato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $(0, 0)$. Quindi $\ker(f) = \{(0, 0)\}$, la sua dimensione è 0, la sua base è $B = \emptyset$, e, dalla caratterizzazione dell' iniettività per le applicazioni lineari, otteniamo che f è iniettiva. Dal Teorema del Rango, si ottiene subito che $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \ker(f) = 2 - 0 = 2$. Inoltre, essendo f iniettiva, una base dell' immagine è $(f(1, 0), f(0, 1))$ ossia $((1, 1, 1), (-2, 1, 1))$. In generale, se f è iniettiva, le immagini dei vettori di una base del dominio formano una base dell' immagine dell' applicazione. f non è suriettiva perché $\dim \mathrm{Im}(f) \neq \dim \mathbb{R}^3$. La matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche ha per colonne le componenti di $f(1,0)$ ed $f(0,1)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Avendo già calcolato $f(1,0)$ ed $f(0,1)$ abbiamo che la matrice cercata è

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consideriamo ora la seconda applicazione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definita come

$$g(x,y,z) = (x+y, x-y).$$

Questa volta calcoliamo prima l' immagine di g. Dalla teoria, è noto che l' immagine è generata dalle immagini dei vettori di una base del dominio. Quindi

$$\mathrm{Im}(g) = \mathcal{L}(g(1,0,0), g(0,1,0), g(0,0,1)) = ((1,1),(1,-1),(0,0)).$$

Una base di $\mathrm{Im}(g)$ si calcola scartando dai generatori quelli che dipendono linearmente dagli altri. In questo caso, una base dell' immagine è $((1,1),(1,-1))$ e la dimensione del sottospazio è 2. In particolare, $\dim \mathrm{Im}(g) = \dim \mathbb{R}^2$ e quindi g è suriettiva. Dal Teorema del Rango, si ricava che $\dim \ker(g) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Im}(g) = 3-2 = 1$, e quindi g non è iniettiva. Calcoliamo $\ker(g)$ risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0. \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono i vettori di $\mathbb{R}^3$ della forma $(0,0,z)$ con z parametro libero. Qundi $\ker(g) = \{(0,0,z)|z \in \mathbb{R}\}$, ed una sua base è $((0,0,1))$. Infine, la matrice associata a g rispetto alle basi canoniche ha come colonne le componenti di $g(1,0,0), g(0,1,0), g(0,0,1)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$, e quindi si ha

$$A_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Infine, consideriamo l' applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita come

$$h(a,b,c) = (2a+c)\mathbf{i} + (\mathrm{b}-\mathrm{c})\mathbf{j} = (2\mathrm{a}+\mathrm{c}, \mathrm{b}-\mathrm{c}).$$

Calcoliamo per prima cosa l' immagine di h. $\mathrm{Im}(h)$ è generato dai vettori $h(1,0,0), h(0,1,0), h(0,0,1)$ e quindi

$$\mathrm{Im}(h) = \mathcal{L}((2,0),(0,1),(1,-1)).$$

Una sua base è $((2,0),(0,1))$ e quindi $\dim \mathrm{Im}(h) = 2$, ed h è suriettiva. Inoltre, $\dim \ker(h) = 1$ ed h non è iniettiva. Il nucleo di h si calcola risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2a+c=0 \\ b-c=0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $\ker(h) = \{(-\frac{c}{2}, c, c)|c \in \mathbb{R}\}$. Una base di $\ker(h)$ è allora $((-1,2,2))$. La matrice associata ad h rispetto alle basi canoniche ha come colonne le componenti di $h(1,0,0), h(0,1,0), h(0,0,1)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$, e quindi abbiamo

$$A_h = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione dell' Esercizio 2. Calcoliamo $f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

$$f \circ g(x,y,z) = f(g(x,y,z)) = f(x+y, x-y) = (x+y-2x+2y, 2x, 2x) = (-x+3y, 2x, 2x).$$

L' applicazione lineare $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si calcola come

$$g \circ f(x, y) = g(f(x, y)) = g(x - 2y, x + y, x + y) = (2x - y, -3y)$$

e la matrice associata a questa applicazione rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ è

$$A_{g \circ f} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

D' altra parte, la matrice $A_g A_f$ è uguale a

$$A_g A_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = A_{g \circ f}.$$

Soluzione dell' Esercizio 3. Cominciamo con il calcolo dell' immagine di f. Per come si costruisce la matrice associata ad f rispetto ad una base, sappiamo che le colonne di A sono le componenti dei vettori $f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)$ rispetto alla base scelta. Quindi abbiamo che

- $f(1,0,0) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1) = (1,2,3)$,
- $f(0,1,0) = 0(1,0,0) - 1(0,1,0) - 2(0,0,1) = (0,-1,-2)$,
- $f(0,0,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1) = (1,1,1)$.

Si ha allora che $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}((1,2,3),(0,-1,-2),(1,1,1))$, che $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$ e che una sua base è $((1,2,3),(0,-1,-2))$. Gli ultimi due risultati si ottengono eliminando i vettori superflui dai generatori dell' immagine. In particolare, f non è suriettiva.

Calcoliamo ora il nucleo di f. Poiché le componenti del vettore nullo sono sempre nulle, rispetto a qualsiasi base si faccia il calcolo, abbiamo che i vettori del nucleo sono *tutti e soli quelli le cui componenti risolvono il sistema* $AX = 0$.

Le soluzioni del sistema sono $(-z,-z,z)$ e quindi abbiamo

$$\ker(f) = \{v \in \mathbb{R}^3 | [v]_B = {}^t(-z,-z,z), z \in \mathbb{R}\}.$$

Tali vettori sono allora $v = -z(1,0,0) - z(0,1,0) + z(0,0,1) = (-z,-z,z)$, e quindi $\ker(f) = \mathcal{L}((-1,-1,1))$ e la sua dimensione è 1. In particolare, f non è iniettiva.

Infine, risulta evidente che $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$.

Osserviamo infine esplicitamente che le componenti di un vettore rispetto alla base canonica coincidono con le entrate del vettore stesso.

Soluzione dell' Esercizio 4. Calcoliamo $f^{-1}(1,2,1,1,0,0)$ risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \\ x + y = 1 \\ a + b = 1 \\ a + b = 0 \\ a + b = 0. \end{cases}$$

È evidente che il sistema è senza soluzioni, e quindi $f^{-1}(1,2,1,1,0,0) = \emptyset$.

Nel secondo caso, dobbiamo risolvere il sistema (abbiamo eliminato le equazioni uguali)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

che ha infinite soluzioni che dipendono dalle variabili libere a, x. Abbiamo quindi

$$f^{-1}(2,2,2,1,1,1) = \{(a, 1-a, x, 2-x) \, | a, x \in \mathbb{R}\}.$$

Analogamente, possiamo calcolare il nucleo di f e risulta

$$\ker(f) = \{(a, -a, x, -x) \,|a, x \in \mathbb{R}\}.$$

La dimensione del nucleo è allora $\dim \ker(f) = 2$, e dal Teorema del rango $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$. Calcolando l' immagine di due vettori opportuni della base canonica di $\mathbb{R}^4$ otteniamo

$$f(0, 0, 1, 0) = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$$

e

$$f(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

che sono due vettori linearmente indipendenti dell' immagine di f. Quindi

$$\mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}((1, 1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 1)).$$

Per calcolare la matrice associata ad f rispetto alle basi canniche, calcoliamo le immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$ e le loro componenti rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^6$. Svolgendo i calcoli, abbiamo

- $f(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$;
- $f(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$;
- $f(0, 0, 1, 0) = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$;
- $f(0, 0, 0, 1) = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$.

In conclusione, la matrice associata è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soluzione dell' Esercizio 5. La prima cosa da verificare è se l' applicazione f è assegnata. Dalla teoria, è noto che l' applicazione è assegnata se si conoscono le immagini dei vettori di una base del dominio. Quindi, bisogna verificare se $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Ma questo è vero, perché la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante -2 e quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti. Essendo nel numero giusto, essi formano una base del dominio, e quindi l' applicazione f è fissata.

Siano ora C e C' le basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$, rispettivamente. Per calcolare la matrice di f rispetto a tali basi, dobbiamo innanzitutto esprimere i vettori di C come combinazioni lineari di $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$. Risolvendo gli opportuni sistemi lineari, otteniamo

- $(1, 0, 0) = \frac{1}{2}(1, 1, 0) + \frac{1}{2}(1, 0, 1) - \frac{1}{2}(0, 1, 1)$;
- $(0, 1, 0) = \frac{1}{2}(1, 1, 0) - \frac{1}{2}(1, 0, 1) + \frac{1}{2}(0, 1, 1)$;
- $(0, 0, 1) = -\frac{1}{2}(1, 1, 0) + \frac{1}{2}(1, 0, 1) + \frac{1}{2}(0, 1, 1)$;

da cui si ricavano le loro immagini. Bisogna poi scrivere le immagini come combinazioni lineari dei vettori di C'. In ultimo, si ha

- $f(1, 0, 0) = (1, 0)$;
- $f(0, 1) = (0, 0)$;
- $f(0, 0, 1) = (0, 1)$;

e quindi la matrice cercata è

$$M_{C,C'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per studiare f usiamo la matrice $M_{C,C'}(f)$. L' immagine è generata dai vettori $f(1,0,0) = (1,0)$, $f(0,0,1) = (0,1)$ che sono linearmente indipendenti. Quindi, $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}((1,0), (0,1))$ ed ha dimensione 2. In conclusione, f è suriettiva, e, per il Teorema del Rango, $\ker(f)$ ha dimensione 1. Poiché $f(0,1,0) = (0,0)$, per definizione, $(0,1,0) \in \ker(f)$, e quindi $\ker(f) = \mathcal{L}((0,1,0))$.

Soluzione dell' Esercizio 6. La prima osservazione è che $((1,1),(1,2))$ è una base di $\mathbb{R}^2$ perché la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da zero. Quindi f è fissata perché conosciamo le immagini dei vettori di una base del dominio. Inoltre, conosciamo anche l' immagine di f che è generata appunto dalle immagini dei vettori della base del dominio che è stata scelta. Allora abbiamo

$$\mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}\left((1,0,0,-1), (-2,0,0,2)\right)$$

una cui base è $((1,0,0,-1))$. Risulta allora evidente che la controimmagine di $(3,0,0,-3)$ è non vuota perché il vettore appartiene all' immagine di f. Per calcolarla, procediamo come segue: sia $v \in \mathbb{R}^2$ un vettore di componenti ${}^t(a,b)$ rispetto a $((1,1),(1,2))$. Per la linearità di f, la sua immagine è $f(v) = af(1,1) + bf(1,2) = (a-2b, 0, 0, -a+2b)$. Uguagliando $f(v)$ a $(3,0,0,-3)$ otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} a - 2b = 3 \\ -a + 2b = -3 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono infinite della forma $a = 3 + 2b$. Abbiamo allora che

$$f^{-1}(3,0,0,-3) = \{(3+2b)(1,1) + b(1,2) = (3+3b, 3+4b) | b \in \mathbb{R}\}.$$

Soluzione dell' Esercizio 7. Non esistono applicazioni lineari che soddisfano le richieste. Infatti, $(1,-2) = (1,-1) + (0,-1)$, mentre

$$(1,4) = f(1,-2) \neq f(1,-1) + f(0,-1) = (1,1) + (0,1) = (1,2).$$

Viene quindi violata la proprietà di linearità .

È possibile trovare applicazioni non lineari che verificano le condizioni assegnate. Una di queste è $f(x,y) = (x, y^2)$.

Soluzione dell' Esercizio 8. Ancora una volta, f è fissata perché i vettori $((1,1),(1,2))$ sono una base di $\mathbb{R}^2$. Inoltre, le loro immagini sono linearmente indipendenti, e quindi l' immagine dell' applicazione f ha dimensione 2 (e quindi f è suriettiva). Dal Teorema del Rango, si ottiene che $\dim\ker(f) = 0$ e quindi f è anche iniettiva. In conclusione, f è invertibile. Sia $B = ((1,1),(1,2))$ e $B' = ((2,1),(-1,0))$. Allora, $M_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, e $M_{B',B}(f^{-1}) = (I_2)^{-1} = I_2$. Usando la formula del cambio base, si ha che $M_{C,C}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, da cui

$$f^{-1}(x,y) = (-x+3y, -2x+5y).$$

Soluzione dell' Esercizio 9. Ricordiamo che $\dim \mathbb{R}^5 = 5$ e che $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Il Teorema del Rango, in questo caso, afferma che $\dim \ker(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = 5$, e poiché $\operatorname{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}^3$ abbiamo che $\dim \operatorname{Im}(f) \leq 3$. Possiamo allora affermare che $\dim \ker(f) \geq 2$, e quindi che f non è mai iniettiva. Inoltre, diamo due esempi per verificare che f può essere suriettiva, ma potrebbe anche non esserlo. $f_1(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_0, a_1, a_2)$ è suriettiva, mentre $f_2(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_0, a_1, 0)$ non lo è . In conclusione, l' unica affermazione vera è la (3).

Soluzione dell' Esercizio 10. (1) è falsa perché, se fosse invertibile, $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^4$ avrebbero la stessa dimensione. (2) è falsa perché le controimmagini si calcolano dall' uguaglianza

$$(x + y, 0, y + z, x + z) = (1, 0, 0, 1)$$

da cui otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

che ha l' unica soluzione $(1, 0, 0)$. Quindi $(1, 0, 0, 1)$ ha un' unica controimmagine. Ne segue anche che il sistema lineare omogeneo associato ha la soluzione nulla come unica soluzione, e quindi l' applicazione è iniettiva. Dal Teorema del Rango, ne consegue che $\dim \operatorname{Im}(f) = 3$, ossia (4) è falsa e l' affermazione (3) è vera.

Soluzione dell' Esercizio 11. (1) è falsa perché se due vettori distinti hanno la stessa immagine, allora f non è iniettiva. Per la caratterizzazione dell' iniettività per le applicazioni lineari, abbiamo che $\dim \ker(f) \geq 1$, e dal Teorema del rango, ricaviamo che $\dim \operatorname{Im}(f) \leq 1$. Quindi, possiamo escludere che $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$ ossia che f sia suriettiva. (2) è vera. Infatti dalle ipotesi otteniamo che $f(1, 1) - f(1, -1) = (0, 0)$. Usando la linearità di f possiamo scrivere che $(0, 0) = f(0, 2) = 2f(0, 1)$. Dividendo per 2 la precedente uguaglianza, otteniamo $f(0, 1) = (0, 0)$, ossia $(0, 1) \in \ker(f)$. (3) è falsa, perché non sappiamo quale sia il vettore immagine di $(1, 1)$. Se, ad esempio, $f(1, 1) = (0, 0)$ allora f è l' applicazione nulla, e quindi $\dim \ker(f) = 2$. (4) è vera perché due vettori distinti hanno la stessa immagine. (5) è vera perché ogni volta che scegliamo il vettore $f(1, 1)$ otteniamo una diversa applicazione lineare.

Soluzione dell' Esercizio 12. (1) è chiaramente falsa perché le entrate del vettore $f(x, y, z)$ sono dei polinomi lineari omogenei nelle variabili x, y, z. (2) è vera perché la matrice associata al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + z = 0. \end{cases}$$

è ridotta per righe ed ha rango 2. Poiché le soluzioi del sistema danno i vettori del nucleo di f abbiamo che $\dim \ker(f) = 1$. In particolare, non richiesto dall' Esercizio, una sua base è $((1, 1, -2))$. (4) è falsa perché f è iniettiva se, e solo se, $\dim \ker(f) = 0$, e ciò non capita in questo caso. (3) è falsa perché il Teorema del rango, in questo caso, afferma che $\dim \operatorname{Im}(f) = 3 - 1 = 2$ ossia $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, e quindi f è suriettiva.

Soluzione dell' Esercizio 13. (1) è chiaramente falsa perché i vettori dell' immagine di f sono in $\mathbb{R}^2$ e quindi non possono essere scritti con 3 componenti. (2) e (4) prevedono che si calcoli in nucleo dell' applicazione, ossia le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 2z = 0. \end{cases}$$

La matrice è già ridotta per righe ed il suo rango è 2 ossia il sistema ammette ∞^1 soluzioni. Ne consegue che $\dim \ker(f) = 1$ e quindi (2) è falsa. Le soluzioni del sistema sono della forma $\{(x, 0, x) | x \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1, 0, 1))$ e quindi (4) è vera. La matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

e quindi anche (3) è falsa.