GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

Prima prova in itinere - 03/05/2013

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. *Siano date le rette*

$$r : \begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = -3 + t \\ z(t) = -1 + 3t \end{cases} \qquad e \qquad s_h : \begin{cases} x - hy + (-1+h)z = 0 \\ (1+h)y + (1-h)z = 2h \end{cases}.$$

(1) *Studiare la posizione reciproca di r e s_h al variare di $h \in \mathbb{R}$.*
(2) *Posto $h = 0$, trovare il piano π contenente s_0 e parallelo ad r.*
(3) *Posto $h = 0$, dire se il piano contenente r e parallelo ad s_0 interseca un punto dell'asse x.*

Soluzione 1. *Punto 1.*
Soluzione A: Se $h \neq 2$ la retta r interseca il piano $x - hy + (-1+h)z = 0$ nel punto le cui coordinate si ottengono dalle equazioni parametriche di r ponendo $t = \frac{h+1}{h-2}$ e interseca il piano $(1+h)y + (1-h)z = 2h$ nel punto le cui coordinate si ottengono dalle equazioni parametriche di r ponendo $t = \frac{2h+2}{-h+2}$, pertanto r interseca s_h se e solo se tali punti coincidono e quindi se e solo se $h + 1 = -(2h + 2)$ ovvero se e solo se $h = -1$. Se $h = 2$ la retta r risulta parallela ad entrambi i piani che individuano la retta s_2 senza giacere su alcuno di essi. Se $h \neq -1, 2$ allora r ed s_h sono rette sghembe.
Soluzione B: La retta r ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ 3x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

quindi per decidere la mutua posizione delle due rette r e s_h dobbiamo considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ 3x + z = 2 \\ x - hy + (-1+h)z = 0 \\ (1+h)y + (1-h)z = 2h \end{cases}.$$

Facendo le mosse $R2 \to R2 - 3R1$ e $R3 \to R3 - R1$ si ottiene

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -3y + z = 8 \\ -(h+1)y + (-1+h)z = 2 \\ (1+h)y + (1-h)z = 2h \end{cases},$$

da cui facendo $R4 \to R4 - R3$ e $R3 \to 3(R3 - \frac{h+1}{3}R2)$ si ottiene

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -3y + z = 8 \\ (2h-4)z = 5 - h \\ 0 = 2h + 2 \end{cases}.$$

Ne segue che se $h \neq -1, 2$ il rango della matrice completa del sistema è 4 mentre il rango della matrice dei coefficienti è 3, il sistema è impossibile e le due rette sono sghembe. Se $h = -1$ il rango della matrice dei coefficienti e di quella completa sono entrambi 3, il

sistema ha una e una sola soluzione e le due rette sono incidenti. Se $h=2$ il rango della matrice completa è 3 quello della mtrice dei coefficienti è 2, il sistema è impossibile e le due rette sono parallele.
Punto 2: Il fascio di piani che ha per sostegno la retta s_0 ha equazione $\lambda(x-z)+\mu(y+z-2)=0$. La retta r non ha intersezioni col generico piano del fascio solo se $-4\lambda+4\mu=0$ dunque solo se $\lambda=\mu$ da cui si ottiene l'equazione del piano richiesto: $x+y-2=0$.
Punto 3: Dalle equazioni cartesiane della retta r si ottiene che il fascio di piani di sostegno r ha equazione $\lambda(x+y+2)+\mu(3x+z-2)=0$. La retta s_0 non ha intersezioni col generico piano del fascio solo se $\mu=0$ dunque il piano contenente r e parallelo ad s_0 ha equazione $x+y+2=0$ ed incontra l'asse x nel punto di coordinate $(-2,0,0)$.

Esercizio 2. *Nello spazio vettoriale reale $V=\mathbb{R}_3[x]$, siano*

$$U=\{P(x)\in V\mid P(1)=0\}\qquad e \qquad W=\{P(x)\in V\mid P(0)=0, P''(0)=0\}.$$

(1) *Calcolare una base di U, ed una di W e la dimensione dei sottospazi U e W.*
(2) *Calcolare una base e la dimensione di $U+W$ e di $U\cap W$.*
(3) *Estendere la base trovata per $U\cap W$ ad una base di V.*

Soluzione 2. *Punto 1. Si ha $U=\{ax^3+bx^2+cx+d|\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\wedge a+b+c+d=0\}$, $W=\{ax^3+cx|\ a,c\in\mathbb{R}\}$. Se riferiamo V alla base $\{x^3,x^2,x,1\}$ i vettori di U sono rappresentati come $\{[a,b,c,-a-b-c]^T|\ a,b,c\in\mathbb{R}\}$ e quelli di W come $\{[a,0,c,0]^T|\ a,b\in\mathbb{R}\}$. Quindi i vettori $\{[1,0,0,-1]^T,[0,1,0,-1]^T,[0,0,1,-1]^T\}$ sono un sistema di generatori per il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ che rappresenta U ed è immediato verificare che sono linearmente indipendenti, pertanto $dimU=3$ e una base di U formata dai polinomi $\{x^3-1,x^2-1,x-1\}$, analogamente si ottiene che i vettori $\{[1,0,0,0]^T,[0,0,1,0]^T\}$ sono una base per il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ che rappresenta W e dunque $dimW=2$ e una base di W formata dai polinomi $\{x^3,x\}$.*
Punto 2. Si verifica facilmente che i vettori $\{[1,0,0,-1]^T,[0,1,0,-1]^T,[0,0,1,-1]^T,[1,0,0,0]^T\}$ sono linearmente indipendenti, quindi $dimU+W=4$, e $U+W=\mathbb{R}_3[x]$ per cui una base di $U+W$ è $\{x^3,x^2,x,1\}$. Per la formula di Grassmann, si ricava $\dim(U\cap W)=1$, il vettore x^3-x appartiene sia ad U sia a W e quindi è una base di $U\cap W$.
Punto 3. Applicando il procedimento delle eliminazioni successive a $\{x^3-x,x^3,x^2,x,1\}$ si ottiene subito che $\{x^3-x,x^3,x^2,1\}$ è una base di V.

Esercizio 3. *Sia $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice*

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&3&1\\1&0&-4\end{pmatrix}$$

rispetto alla base di partenza $\mathcal{B}=\{\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2},\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3},\mathbf{e_3}\}$ e alla base di arrivo $\mathcal{B}'=\{\mathbf{e_2},\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2},\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}\}$.

(1) *Determinare una base e la dimensione di $\mathrm{Im}(f)$, di $\ker(A)$ e di $\ker(f)$.*
(2) *Calcolare le coordinate di $\mathbf{v}=-\mathbf{e_1}+\mathbf{e_3}$ rispetto alla base di $\mathrm{Im}(f)$ e trovare le controimmagini di $\mathbf{v}$.*
(3) *Sia $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice*

$$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&h&0\end{pmatrix}$$

rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$. Scrivere la matrice che rappresenta l'applicazione lineare $f+g$ e stabilire i valori di h per cui l'applicazione risulta invertibile.

Soluzione 3. *Punto 1.* *Si ha* $rkA = 2$ *e dunque* $dimkerA = 1$. *Per trovare* $kerA$ *dobbiamo determinare le soluzioni del sistema lineare omogeneo* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *che sono date dai vettori* $\{[4t, -3t, t]^T | \ t \in \mathbb{R}\}$, *quindi una base di* $kerA$ *è* $[4, -3, 1]^T$. *Questo ci dice anche che* $dimkerf = dimkerA = 1$ *e che* $dimImf = 2$. *Dobbiamo ora trovare la matrice* A' *che rappresenta l'applicazione lineare* f *rispetto alle basi canoniche. Quindi o si utilizzano le formule per i cambiamenti di base o si ricorda che le colonne della matrice che rappresenta una trasformazione lineare dallo spazio vettoriale* V *allo spazio vettoriale* W *quando* V *riferito ad una base* $\mathcal{B}$ *e* W *ad una base* $\mathcal{C}$ *sono le coordinate delle immagini dei vettori della base* $\mathcal{B}$ *rispetto alla base* $\mathcal{C}$. *Quindi abbiamo* $f(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}) = f(\mathbf{e_1})+f(\mathbf{e_2}) = 1\mathbf{e_2}+2(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2})+1(\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}) = 2\mathbf{e_1}+4\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}$, $f(\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}) = f(\mathbf{e_2})+f(\mathbf{e_2}) = 1\mathbf{e_2}+3(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}) = 3\mathbf{e_1} + 4\mathbf{e_2}$, $f(\mathbf{e_3}) = -1\mathbf{e_2} + 1(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}) - 4(\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}) = 1\mathbf{e_1} - 4\mathbf{e_1} - 4\mathbf{e_3}$, *da cui ricaviamo* $f(\mathbf{e_2}) = 2\mathbf{e_1} + 8\mathbf{e_2} + 4\mathbf{e_3}$ *e* $f(\mathbf{e_1}) = -4\mathbf{e_2} - 3\mathbf{e_3}$. *Pertanto si ha*

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Da qui, essendo le prime due colonne di A' *linearmente indipendenti e* $rkA' = 2$ *si ottiene che una bese per* Imf *è formata dalle prime due colonne di* A'. *Una base per* $kerf$ *si trova cercando una autosoluzione del sistema lineare omogeneo* $A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *e risulta essere* $[4, 1, -2]^T$.

Punto 2. *Le coordinate di* $\mathbf{v} = -\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}$ *rispetto alla base di* $\mathrm{Im}(f)$ *sono le soluzioni del sistema corrispondente all'equazione matriciale* $x[0, -4, -3]^T + y[2, 8, 4]^T = [-1, 0, 1]^T$ *ovvero* $x = -1$, $y = \frac{-1}{2}$. *Poiché* $[0, -4, -3]^T = f(\mathbf{e_1})$ *e* $[2, 8, 4]^T = f(\mathbf{e_1})$, *si ottiene* $\mathbf{v} = -\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3} = -f(\mathbf{e_1}) - \frac{1}{2}f(\mathbf{e_2})$ *quindi una sua contrimmagine è* $-\mathbf{e_1} - \frac{1}{2}\mathbf{e_2}$. *Tutte le controimmagini si ottengono aggiungendo a questa soluzione particolare tutti i vettori di* $kerf$.

Punto 3. *La matrice che rappresenta l'applicazione lineare* $f + g$ *rispetto alle basi* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$ *è*

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & h & -4 \end{pmatrix}.$$

. *Con la solita procedura del cambiamento di base è possibile scrivere anche la matrice che rappresenta* $f + g$ *rispetto alle basi canoniche. L'applicazione* $f + g$ *è invertibile se e solo se è rappresemtata (rispetto a una base qualsiasi da una matrice invertibile e dundue se e solo se* $detA + B \neq 0$, *da cui si ha* $h \neq 15$.