Esame di Geometria e Algebra Lineare		
Politecnico di Milano – Prova del 12 luglio 2018		
Ingegneria informatica, elettrica, elettronica, delle telecomunicazioni e dell'automazione		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. I compiti privi di indicazione leggibile di nome e cognome non verranno corretti.

1. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro e si consideri il sistema

$$\begin{cases} x + ky & = 1 - k \\ -x + (k+2)y + kz & = 1 \\ (k+1)y + kz & = 1 \end{cases}$$

   (a) Determinare, al variare di k, quante soluzioni ha tale sistema.

   (b) Verificare che per $k = 0$ l'insieme delle soluzioni rappresenta in $\mathbb{R}^3$ una retta r e trovarne le equazioni parametriche.

   (c) Detta s la retta $x = z = 0$, trovare l'equazione del luogo $\mathcal{L}$ dei punti di $\mathbb{R}^3$ equidistanti da r e da s.

   (d) Verificato che $\mathcal{L}$ è una quadrica, classificarla.

Soluzione

(a) La matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1-k \\ -1 & k+2 & k & 1 \\ 0 & k+1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

che ridotte a scala diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1-k \\ 0 & 2k+2 & k & 2 \\ 0 & 0 & k/2 & k/2 \end{pmatrix}$$

quindi per $k \neq, 0, -1$ il sistema ha una e una sola soluzione, per $k = 0$ ha ∞^1 soluzioni, per $k = -1$ non ha soluzioni (la matrice dei coefficienti ha rango 2 e la completa rango 3).

(b) Per $k = 0$ le ∞^1 soluzioni del sistema rappresentano la retta r di equazioni parametriche $x = 1, y = 1, z = t$.

(c) Indicate con (x_P, y_P, z_P) le coordinate di un generico punto P dello spazio, il piano per P perpendicolare ad r ha equazione $x = z_P$ e interseca r nel punto di coordinate $(1, 1, z_P)$, quindi la distanza di P da r è $\sqrt{(x_P - 1)^2 + (y_P - 1)^2}$. Analogamente, la distanza di P dalla retta s è $\sqrt{x_P^2 + z_P^2}$. Il luogo $\mathcal{L}$ ha dunque equazione $(x-1)^2 + (y-1)^2 = x^2 + z^2$, ovvero $y^2 - z^2 - 2x - 2y + 2 = 0$.

(d) Essendo rappresentato da una equazione di secondo grado nelle variabili x, y e z, il luogo è una quadrica. Il complesso dei termini quadratici è una forma quadratica rappresentata da una matrice singolare con autovettori non nulli di segno diverso. La quadrica non è degenere e dunque è un paraboloide iperbolico.

2. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente per matrice rappresentativa rispetto alla base canonica la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

e si considerino i vettori

$$u = (1, k, 1) \quad v = (1, 1-k, 1) \quad w = (1, 1, -1).$$

(a) Determinare per quali valori del parametro reale k i vettori u, v, w formano una base di $\mathbb{R}^3$.

(b) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile.

(c) Trovare *l'unico* valore di k per cui u è autovettore di f e verificare che per tale valore $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(d) Per il valore di k trovato al punto precedente, scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ (in partenza e in arrivo).

Soluzione

(a) Accostando i tre vettori u, v e w si ottiene una matrice quadrata di ordine 3 il cui determinante è $4k - 2$, per cui i vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$ se e solo se $k \neq 1/2$.

(b) Troviamo gli autovalori di A. Si ha $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)[(1/2-\lambda)(3/2-\lambda) + 1/4] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1)$ quindi A ammette l'autovalore 1 con molteplicità algebrica 3. Essendo A diversa dalla matrice identica, la molteplicità geometrica di A non può essere 3, dunque A non è diagonalizzabile.

(c) Perché u sia autovettore di f, avendo A il solo autovelore 1, deve risultare $Au = u$ da cui si ha $1 + k = 1$, cioé $k = 0$. Poiché $0 \neq 1/2$, per $k = 0$ i tre vettori u, v, w formano una base di $\mathbb{R}^3$.

(d) Per $k = 0$ i tre vettori sono

$$u = (1, 0, 1) \quad v = (1, 1, 1) \quad w = (1, 1, -1).$$

Si ha $f(u) = u$, $f(v) = (2, 1, 2) = u + v$, $f(w) = w$ per cui la matrice cercata diventa

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lo stesso risultato si poteva ottenere usando la matrice di passaggio.

3. Consideriamo i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1, 0, 1, 0) \qquad v_2 = (1, 0, 0, 1) \qquad v_3 = (0, 0, -1, 1)$$

e sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da v_1, v_2, v_3. Sia H il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da $x + y = 0$ e sia V il complemento ortogonale di H, ovvero $V = H^{\perp}$.

(a) Trovare delle basi ortonormali per U e V.

(b) Determinare le dimensioni di $U + V$ e di $U \cap V$.

(c) Dato un generico vettore $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, determinare le sue proiezioni ortogonali $P_U(v)$ su U e $P_V(v)$ su V.

(d) Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da $f(v) = P_U(v)+P_V(v)$ è un'applicazione lineare ortogonalmente diagonalizzabile. Determinare se 0 è un autovalore di f: in caso affermativo trovare una base dell'autospazio associato.

Soluzione

(a) Una base di U è $\{v_1 = (1, 0, 1, 0),\ v_2 = (1, 0, 0, 1)\}$ in quanto $v_3 = -v_1 + v_2$. Applicando il metodo di Gram-Schmidt a v_1 e v_2 si ottiene la base ortogonale $\{v_1,\ v_2' = v_2 - 1/2(v_1) = (1/2, 0, -1/2, 1)\}$. Normalizzandola otteniamo una base ortogonale di U che è $\{w_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0),\ w_2 = (1/\sqrt{6}, 0, -1/\sqrt{6}, \sqrt{2/3}\}$. Poiché V è il complemento ortogonale di H, V ha dimensione 1 e una sua base è $\{q = (1, 1, 0, 0)\}$ che normalizzata diventa $\{q' = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0)\}$.

(b) Sappiamo che $dim(U) = 3$ e $dim(V) = 1$. Si verifica subito che $v_1,\ v_2,\ q$ sono vettori linearmente indipendenti quindi $dim(U + V) = 3$ e $dim(U \cap V) = 2 + 1 - 3 = 0$.

(c) Si ha $P_U(v) =< v, w_1 > w_1+ < v, w_2 > w_2 = ((x + z)/2, 0, (x + z)/2, 0) + ((x - z + 2t)/6, 0, 2(x - z + 2t)/6, (x - z + 2t)/3))$, $P_V(v) =< v, q' > q' = ((x + y)/2, (x + y)/2, 0, 0)$.

(d) Le matrici proiezioni su un sottospazio euclideo sono simmetriche. L'applicazione f in quanto somma di una proiezioni ha come matrice rappresentativa la somma delle due matrici proiezione, dunque è simmetrica e ortogonalmente diagonalizzabile.
Con facili conti si trova che la matrice rappresentativa di f è

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

il cui determinante è 0. Pertanto il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ ha autosoluzioni che sono autovettori associati all'autovalore 0. Le soluzioni del sistema sono $x = -t, y = t, z = t$ per cui una base dell'autospazio associato all'autovalore 0 è formato dal vettore $(-1, 1, 1, 1)$.