Testi di esercizi di preparazione alla I prova in itinere

Gli esercizi in elenco sono in gran parte tratti da vecchie prove d'esame

Esercizio 1

Al variare di k discutere e ove possibile risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + ky = 4 \\ kx + 2y = -1 \\ 3x + ky = 7 \end{cases}$$

Interpretare geometricamente i risultati trovati

Soluzione

Sottraendo alla terza equazione la prima si trova il sistema equivalente $\begin{cases} 2x+ky=4 \\ kx+2y=-1 \\ x=3 \end{cases}$ da cui, per sostituzione, si trova il sistema equivalente $\begin{cases} ky=-2 \\ 2y=-1-3k \\ x=3 \end{cases}$.

Se k=0 il sistema è chiaramente impossibile perché la prima equazione diventa 0=-2. Supponiamo quindi k≠0. Il sistema è equivalente a $\begin{cases} y = \frac{-2}{k} \\ y = \frac{-1-3k}{2} \\ x = 3 \end{cases}$ ed è dunque possibile e determinato per i valori di k per cui $\frac{2}{k} = \frac{1+3k}{2}$. Da qui si trova $3k^2+k-4=0$, cioè k=1 o $k=-\frac{4}{3}$.

Per k=1 il sistema ammette l'unica soluzione x=3, y=-2. Per $k=-\frac{4}{3}$ il sistema ammette invece l'unica soluzione x=3, y=3/2. Per gli altri valori di k il sistema è impossibile.

Se interpretiamo i risultati nel piano, le tre equazioni rappresentano tre rette che appartengono allo stesso fascio quando k=1 o k=-4/3. Nel primo caso il sostegno del fascio è il punto (3,-2), nel secondo è il punto (3,3/2). Per gli altri valori di k le rette non appartengono ad uno stesso fascio. In particolare se k=0 la prima e la terza equazione rappresentano due rette parallele all'asse y e la seconda una retta parallela all'asse x che interseca le prime due, per k=±2 la prima e la seconda equazione rappresentano due rette parallele e la terza una retta che le interseca entrambe, per $k=\pm\sqrt{6}$ la seconda e la terza equazione rappresentano due rette parallele e la prima una retta che le interseca.

Se interpretiamo i risultati nello spazio, le tre equazioni rappresentano tre piani paralleli all'asse z che appartengono allo stesso fascio quando k=1 o k=-4/3. Nel primo caso il sostegno del fascio è la retta di equazioni cartesiane x=3, y=-2, nel secondo è la retta di equazioni cartesiane x=3, y=3/2. Per gli altri valori di k i piani non appartengono ad uno stesso fascio . In particolare se k=0 la prima e la terza equazione rappresentano due piani paralleli al piano yz e la seconda un piano parallelo al piano xz che interseca i primi due, per k=±2 la prima e la seconda equazione rappresentano due piani fra loro paralleli e la terza un piano che li interseca entrambi, per $k=\pm\sqrt{6}$ la seconda e la terza equazione rappresentano due piani tra loro paralleli e la prima un piano che li interseca.

Esercizio 2

Discutere ed ove possibile risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} 2x + hy + (h-1)z = 1 \\ x + hz = 0 \\ x - hy + (h+2)z = -1 \end{cases}$$

ove h è un parametro reale.
Interpretare geometricamente i risultati.
Se esiste un valore di h in corrispondenza al quale le tre equazioni del sistema rappresentano piani appartenenti ad uno stesso fascio, determinare i parametri direttori della retta sostegno del fascio.

<u>Soluzione</u>

Il rango della matrice completa è minore o uguale a 3 ed è sempre maggiore o uguale al rango della matrice dei coefficienti.
Il determinante della matrice dei coefficienti è:

$$\begin{vmatrix} 2 & h & h-1 \\ 1 & 0 & h \\ 1 & -h & h+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2h+1 \\ 1 & 0 & h \\ 1 & -h & h+2 \end{vmatrix} = h(3h\text{-}2h\text{-}1) = h(h\text{-}1),$$

pertanto se $h \neq 0,1$ il rango della matrice dei coefficienti è 3 e coincide col rango della matrice completa, in tal caso il sistema ha una e una soluzione data da

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1/h \\ z = 0 \end{cases}$$

Se h=0 il sistema diventa:

$$\begin{cases} 2x - z = 1 \\ x = 0 \\ x + 2z = -1 \end{cases}$$

la caratteristica della matrice dei coefficienti è 2, perché, come abbiamo già visto, il determinante della matrice dei coefficienti è 0, ma la matrice dei coefficienti ha il minore

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Il minore della matrice completa ottenuto orlando il minore precedente con terza riga e quarta colonna è

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

perciò la matrice dei coefficienti ha rango diverso da quella completa ed il sistema è impossibile.
Per h=1 il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + z = 0 \\ x - y + 3z = -1 \end{cases}$$

la matrice dei coefficienti ha rango 2 (perché il suo determinante è 0 ed il minore $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ è non nullo), consideriamo allora il minore della matrice completa ottenuto orlando il minore precedente con terza riga e quarta colonna:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

tale minore è nullo e dunque anche la matrice completa ha rango 2 (l'altro minore di ordine 3 che si può ottenere per orlatura è ovviamente nullo essendo il determinante della matrice dei coefficienti); il sistema è allora possibile ed ammette ∞^1 soluzioni date da:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

con t parametro arbitrario.

Si potevano trovare le soluzioni del sistema usando il <u>metodo di eliminazione gaussiana</u>.
Riordinando le equazioni si ha

$$\begin{cases} x + hz = 0 \\ 2x + hy + (h-1)z = 1 \\ x - hy + (h+2)z = -1 \end{cases}$$

e sottraendo dalla seconda equazione la prima moltiplicata per 2 e dalla terza equazione la prima si ha:

$$\begin{cases} x + hz = 0 \\ hy + (-h-1)z = 1 \\ -hy + 2z = -1 \end{cases}$$

ed ancora aggiungendo alla terza riga la seconda si ha:

$$\begin{cases} x + hz = 0 \\ hy + (-h-1)z = 1 \\ (-h+1)z = 0 \end{cases}$$

Quindi la terza equazione per h=1 diventa l'identità 0=0.
Il sistema si riduce a

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$$

che ammette ∞^1 soluzioni (x=-t, y=1+2t, z=t, con t parametro arbitrario)
Se invece $h \neq 1$ si ha

$$\begin{cases} x + hz = 0 \\ hy + (-h-1)z = 1 \\ z = 0 \end{cases} \text{ e quindi } \begin{cases} x = 0 \\ hy = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione dice che se h=0 il sistema è impossibile (per h=0 si avrebbe 0=1)
Se $h \neq 0,1$ si ha invece l'unica soluzione x=0, y=1/h, z=0.

Dal <u>punto di vista geometrico</u> le 3 equazioni del sistema possono essere viste come equazioni di piani nello spazio.
Per $h \neq 0,1$ tali piani hanno un punto comune (appartengono ad una stella ma non ad uno stesso fascio),
per h=0, i tre piani sono tutti paralleli all'asse y e a due a due si intersecano lungo rette parallele all'asse y,

per h=1, i tre piani appartengono ad uno stesso fascio, che ha come sostegno la retta rappresentata in forma parametrica dalle soluzioni del sistema. Una terna di parametri direttori per tale retta è dunque (-1, 2, 1).

Esercizio 3
Al variare del parametro reale a, si consideri il sistema lineare A$\underline{x}$=$\underline{b}$ dove

$$[A \mid \underline{b}]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a-1 & a \\ 3-a & 2 & 1 & 3 \\ 1 & a & 1 & a-1 \end{array}\right]$$

(1) Studiare la risolubilità del sistema al variare del parametro a ∈ R, precisando anche il numero di parametri liberi.
(2) Determinare i valori del parametro per cui X = $(2, -1, 1)_T$ è soluzione del sistema.
(3) Interpretando ogni equazione del sistema come quella di un piano in uno spazio affine di dimensione 3, discutere la posizione mutua dei piani al variare di a ∈ R.
Soluzione
(1) Effettuando sulle righe di [A|$\underline{b}$] le operazioni elementari di togliere dalla riga 2 la riga 1 moltiplicata per 3-a e alla riga 3 la riga 1 R2 − (3 − a)R1 → R2; R3 −R1 → R3 si ottiene la matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a-1 & a \\ 0 & a^2-3a+2 & a^2-4a+4 & a^2-3a+3 \\ 0 & 0 & -a+2 & -1 \end{array}\right]$$

ove a^2-3a+2=0 se e solo se a = 1 oppure a = 2; e 2 − a = 0 se e solo se a = 2; quindi la nuova matrice ha 3 pivot se a ≠1,2. In particolare, se a ≠1,2 rk(A) = rk([A|$\underline{b}$]) = 3 e quindi il sistema A$\underline{x}$ = $\underline{b}$ ha una sola soluzione.
Se a = 2; la matrice (dopo aver effettuato le operazioni elementari indicate sopra) diventa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

da cui rk(A) = 1, rk([A|$\underline{b}$]) =2. Quindi, se a = 2; il sistema non ha soluzioni.
Infine, se a = 1; la matrice calcolata dopo le prime due operazioni elementari

diventa $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$ ed effettuando l' operazione elementare di togliere la terza riga la seconda

otteniamo una matrice a scalino $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$, quindi il sistema non ha soluzioni.

(2) Riscriviamo il sistema dando alle incognite i valori 2; −1; 1; rispettivamente, come richiesto dal testo. Il sistema diventa allora

$\begin{cases} 2-a+a-1=a \\ 6-2a-2+1=3 \\ 2-a+1=a-1 \end{cases}$ che ha l' unica soluzione a = 1.

(3). Siano α,β,γ i piani di equazione x + ay + (a − 1)z = a; (3 − a)x + 2y + z =3; x + ay + z = a + 1, rispettivamente. Per a≠1, 2 i tre piani si intersecano in un punto solo, avendo il sistema un' unica soluzione, quindi appartengono ad una stessa stella. Per a = 1, le equazioni dei tre piani diventano x+y=1,2x+2y+z=3, x+y+z=0 e sono piani che a due a due si intersecano ma non hanno punti comuni. Per a = 2; le equazioni dei tre piani diventano x + 2y + z =2, x+2y+z=3, x+2y+z=1 e sono tre piani paralleli.

Esercizio 4.

Si considerino la matrice A= $\begin{bmatrix} -h & -1 & 1 \\ 0 & h & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e i vettori $\underline{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{b}=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2-h \end{bmatrix}$.

a) Al variare del parametro h discutere e risolvere il sistema A$\underline{x}$=$\underline{b}$.

b) Interpretare geometricamente i risultati trovati.

c) Per h=2 calcolare det A^4.

d) Dopo aver osservato che per h=-1 le soluzioni del sistema di cui al punto a) rappresentano una retta r, si scriva l'equazione del piano che passa per r ed è parallelo alla retta s di equazioni

$$\begin{cases} x = 2 \\ y + 2z = -1 \end{cases}$$

Soluzione

a) Essendo rk(A) ≤ rk ([A|b]) ≤ 3 il sistema è sicuramente possibile e determinato se det A≠0

$$\det\begin{bmatrix} -h & -1 & 1 \\ 0 & h & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -h-1 & 0 & 0 \\ 0 & h & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$ =-(h+1)(h-1)=0 per h=±1.

Quindi per h≠±1 il sistema ha una ed una sola soluzione che si trova o con la regola di Cramer o ancor più facilmente osservando che il sistema dato è equivalente al sistema $\begin{cases} -(h+1)x = 1+h \\ x+(h-1)y = 2-h \\ x-y+z = 2-h \end{cases}$ la cui soluzione è x=-1, y=(3-h)/(h-1), z=3-h-(3-h)/(h-1).

Per h=1 il sistema diventa $\begin{cases} -x-y+z=3 \\ y-z=0 \\ x-y+z=1 \end{cases}$ ed è chiaramente impossibile.

Per h=-1 il sistema diventa $\begin{cases} x-y+z=3 \\ y-z=0 \\ x-y+z=3 \end{cases}$ ed ammette ∞^1 soluzioni: x=3,y=z=t.

b) Le tre equazioni del sistema sono le equazioni di tre piani che per h≠±1 appartengono ad una stessa stella, per h=-1 appartengono ad uno stesso fascio avente per sostegno la retta r di equazioni $\begin{cases} x = 3 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$, mentre per h=1 non hanno alcun punto comune.

c) Per h=2 det A=-3 quindi per il teorema di Binet, det A^4=81.

d) Abbiamo già osservato nel punto b) che per h=-1 le soluzioni del sistema rappresentano la retta r di equazioni $\begin{cases} x = 3 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$, il generico piano del fascio di sostegno r ha equazione $\lambda(x-3)+\mu(y-z)=0$.

Bisogna quindi determinare i parametri λ e μ in modo che il piano e la retta s siano paralleli e dunque non abbiano punti comuni, ovvero in modo che il sistema $\begin{cases} \lambda(x-3)+\mu(y-z)=0 \\ x=2 \\ y+2z=-1 \end{cases}$

sia impossibile. Poniamo x=2 e y=-1-2z nella prima equazione ed abbiamo $-\lambda+\mu(-1-3z)=0$, da cui si ottiene che affiché il sistema sia impossibile dobbiamo porre $\mu=0$. Dunque il piano cercato è il piano x=3. Altrimenti basta osservare che i parametri direttori del generico piano del fascio sono $\lambda,\mu,-\mu$, e quelli della retta s sono 0,-2,1 per cui dalla condizione di parallelismo fra retta e piano si ottiene ancora $\mu=0$.

<u>Esercizio 5</u>.

Siano

$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ed I la matrice identica di ordine 2.

Determinare una matrice X tale che: $B(A+2I)B=B^2X$.

<u>Soluzione</u>

Poiché $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ è una matrice non singolare, esiste B^{-1} e da $B(A+2I)B=B^2X$, moltiplicando a sinistra 2 volte per B^{-1}, si ottiene $X= B^{-1}(A+2I)B$.

Ora $B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e dunque

$$X=\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 5/2 & 5/2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & 15/2 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}.$$

<u>Esercizio 6</u>.

Dire per quali valori di h è invertibile la matrice C=AB, dove $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & h-1 \end{bmatrix}$, dire se per tali valori esistono l'inversa di A e di B e calcolare C^{-1}.

<u>Soluzione</u>

Le matrici A e B sono due matrici triangolari, quindi i loro determinanti sono i prodotti degli elementi diagonali: det A=2h, det B=h-1. Per il teorema di Binet det C=det A det B=2h(h-1).

Quindi C è invertibile se e solo se $h \neq 0,1$ e per tali valori sono invertibili anche A e B. Si ha subito che $C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & h & h \\ 0 & 1 & 2h-1 \end{bmatrix}$, da cui

$$C^{-1}=\frac{1}{2h(h-1)}\begin{bmatrix} 2h^2-2h & 2 & -2h \\ 0 & 2h-1 & -h \\ 0 & -1 & h \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{h(h-1)} & \frac{1}{1-h} \\ 0 & \frac{2h-1}{2h(h-1)} & -\frac{1}{2h-2} \\ 0 & -\frac{1}{2h(h-1)} & \frac{1}{2h-2} \end{bmatrix}.$$

(Si potevano anche calcolare A^{-1} e B^{-1} e poi $C^{-1}=B^{-1}A^{-1}$)

<u>Esercizio 7</u>

Siano $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ h-1 & h \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & h \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dire per quali valori di h l'equazione matriciale $A(X^{-1}+C)=B$ ammette soluzione.

<u>Soluzione</u>

Osserviamo che esiste A^{-1}perché A è non singolare. L'equazione matriciale $A(X^{-1}+C)=B$ è equivalente a $X^{-1}=A^{-1}B-C$, ma entrambe le equazioni richiedono che X sia non singolare.

Si ha $A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $A^{-1}B=\begin{bmatrix} h-1 & h \\ \frac{h}{3} & 1+\frac{h}{3} \end{bmatrix}$ e $X^{-1}=A^{-1}B-C=\begin{bmatrix} h-2 & 0 \\ \frac{h}{3}-1 & 1+\frac{h}{3} \end{bmatrix}$ e perché questa sia l'inversa di una matrice si deve avere $\det X^{-1}=1/\det X \neq 0$, cioè $h \neq -3,2$.

<u>Esercizio 8</u>

Dire per quali valori di h esiste l'inversa della matrice

$A=\begin{bmatrix} h+1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ h & 2 & 6 \end{bmatrix}$ e, dove esiste, calcolare A^{-1} e $\det A^{-1}$.

Per gli altri valori di h si determini il rango di A.

Dire per quali valori di h i vettori $\underline{u}=[h+1,1,2]$, $\underline{v}=[0,1,3]$, $\underline{w}=[h,2,6]$ sono linearmente dipendenti.

Per tali valori $\underline{u}$ è combinazione lineare di $\underline{v}$ e $\underline{w}$?

<u>Soluzione</u>

A^{-1} esiste se e solo se $\det A \neq 0$, calcoliamo dunque detA.

$$\begin{vmatrix} h+1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ h & 2 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ h & 2 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ h & 2 & 0 \end{vmatrix}=h.$$

Perciò se $h \neq 0$, esiste A^{-1} ed è

$A^{-1}=\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3h & 4h+6 & -3h-3 \\ -h & -h+2 & h+1 \end{bmatrix}$ ed è (senza fare calcoli!) $\det A^{-1}=1/h$

Per h=0 la caratteristica di A è 2, infatti è <3 ed il minore $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ è diverso da 0

I vettori $\underline{u}=[h+1,1,2]$, $\underline{v}=[0,1,3]$, $\underline{w}=[h,2,6]$, che sono i tre vettori riga di A, sono linearmente dipendenti solo se A non ha rango 3, perciò solo per h=0. Per tali valori si ha $\underline{u}=[1,1,2]$, $\underline{v}=[0,1,3]$, $\underline{w}=[0,2,6]$ ed il vettore $\underline{u}$ non è combinazione lineare degli altri due perché ogni combinazione lineare di $\underline{v}$ e $\underline{w}$ ha la prima componente nulla.

Esercizio 9

Si considerino le rette r ed s di equazioni rispettivamente

$$\begin{cases} x = k + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + 2z = 4 \end{cases}$$

Determinare i valori di k per cui r ed s sono complanari e per tali valori determinare l'equazione del piano che le contiene entrambe.

Soluzione

Il fascio di piani che ha per sostegno la retta s ha equazione: $\lambda(3x-2y)+\mu(x+2z-4)=0$, r ed s sono complanari se è possibile determinare λ ed μ in modo che r sia tutta contenuta in un piano del fasci. Sostituiamo dunque le coordinate del generico punto di r nel generico piano del fascio, abbiamo $\lambda(3k+3t-2-4t)+\mu(k+t-2-4)=0$, cioè $t(-\lambda+\mu) -2\lambda+\mu k+3\lambda k- 6\mu=0$ che deve essere soddisfatta da tutti i valori di t, dunque deve essere $\lambda=\mu$ e $k=1/2$. Pertanto le due rette sono complanari per $k=1/2$ ed in tal caso il piano π che le contiene entrambe è $\mu(3x-2y)+\mu(x+2z-4)=0$, cioè $4x-2y+2z-4=0$.

Esercizio 10

Si considerino le rette r ed s di equazioni parametriche r: $x= t$, $y = 1+t$, $z = 1$ e s: $x = t$, $y = 1$, $z = -t$.
(1) Discutere la loro posizione reciproca
(2) Determinare l' equazione cartesiana del piano contenente r e parallelo ad s.

Soluzione

Punto (1). La retta r ha vettore direzione $(1,1,0)_T$, la retta s ha vettore direzione $(1,0,-1)_T$. I due vettori sono linearmente indipendenti e dunque le due rette non sono parallele.
Per vedere se sono incidenti, scriviamo le loro equazioni cartesiane e vediamo se il sistema formato dalle 4 equazione delle due rette è possibile.
Abbiamo r) $\begin{cases} y = 1 + x \\ z = 1 \end{cases}$, s) $\begin{cases} x = -z \\ y = 1 \end{cases}$ e facendo il sistema di queste equazioni troviamo la contraddizione 0=1. Dunque le due rette non sono neppure incidenti e pertanto sono sghembe.
Punto (2). Il fascio di piani che ha per sostegno la retta r ha equazione $\lambda(x-y+1)+\mu(z-1)=0$. Per trovare il piano del fascio parallelo ad s dobbiamo trovare il piano del fascio che non ha intersezioni con la retta s. Dunque poiché il piano ha parametri direttori $(\lambda,-\lambda,\mu)$ dalla condizione di parallelismo fra retta e piano abbiamo $\lambda-\mu=0$, ovvero $\lambda=\mu$. Altrimenti possiamo trovare i valori di λ e μ per cui il sistema $\begin{cases} \lambda(x - y + 1) + \mu(z - 1) = 0 \\ x = -z \\ y = 1 \end{cases}$ è impossibile.
Sostituendo nella prima equazione abbiamo $\lambda(x)+\mu(-x-1)=0$, ovvero $(\lambda-\mu)x-\mu=0$ da cui ancora troviamo che il sistema è impossibile se $\lambda=\mu$, per cui il piano cercato è $x-y+z=0$.

Esercizio 11

Discutere la mutua posizione delle rette

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Soluzione

La prima retta ha come terna di parametri direttori (vettore direzione) (-1,1,1), i parametri direttori della seconda retta si ottengono dalla matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ oppure riscrivendo la retta in equazioni parametriche e sono dunque la terna (1,-1,1). I due vettori non sono proporzionali e dunque le due rette non sono parallele.

Sono incidenti se e solo se il sistema $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \\ x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$ è possibile. Sostituendo x ed y nella quarta equazione si ha 2=1 e quindi il sistema è impossibile. Perciò le due rette sono sghembe.

<u>Esercizio 12.</u>
Determinare la mutua posizione della retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = -4 - 3t \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{e del piano } \alpha : 3x + 4y = 0.$$

<u>Soluzione</u>
Nello spazio una retta ed un piano possono essere o paralleli o incidenti oppure la retta può giacere sul piano. Si tratta quindi di considerare il sistema formato dalle equazioni della retta e dall'equazione del piano: se ha ∞^1 soluzioni la retta appartiene al piano, se ha una ed una sola soluzione la retta e il piano sono incidenti, se non la soluzioni la retta e il piano sono paralleli. Il sistema $\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = -4 - 3t \\ z = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$ è impossibile, infatti sostituendo i valori di x ed y in funzione di t nella quarta equazione troviamo -25=0, pertanto retta e piano sono paralleli.

<u>Esercizio 13</u>
Siano P, Q ed R i punti di coordinate (1,1,1), (0,2,0), (3,3,3) rispettivamente. Verificare che i tre punti non sono allineati e scrivere l'equazione del piano π passante per P, Q ed R. Fissate le coordinate di un punto T non appartenente a π, verificare che le rette PR e QT sono sghembe. Scrivere l'equazione di una retta passante per O complanare sia con PR sia con QT.
<u>Soluzione</u>
I punti P, Q ed R sono allineati solo se la matrice $\begin{bmatrix} 1-0 & 1-2 & 1-0 \\ 3-0 & 3-2 & 3-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ha rango 1, ma il minore $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ è diverso da 0 e dunque la matrice ha rango 2.

Possiamo trovare l'equazione del piano π passante per P, Q ed R, osservando che la retta PR ha equazioni cartesiane x=y e x=z e quindi il generico piano del fascio di sostegno PR è $\lambda(x-y)+\mu(x-z)=0$ da cui imponendo al piano di passare per Q otteniamo $-2\lambda=0$ ovvero $\lambda=0$. Il piano ha pertanto equazione x-z=0. Altrimenti possiamo osservare che dati 3 punti non allineati di coordinate (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3), l'equazione del piano passante per quei 3 punti è

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ e dunque l'equazione del piano π passante per P, Q ed R è $$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

da cui si ricava 4x-4z=0, cioè x-z=0.
Prendiamo ad esempio T di coordinate (1,0,0).
Le rette PR e QT hanno rispettivamente equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x = 1 - u \\ y = 2u \\ z = 0 \end{cases},$$

non sono parallele in quanto la prima ha come parametri direttori 2,2,2, e la seconda –1,2,0;
non sono incidenti perché il sistema formato dalle 6 equazioni delle due rette nelle 5 incognite x,y,x,t,u, è impossibile (si trova la contraddizione u=0, u=1).
Il risultato si poteva ottenere per via sintetica osservando che non può esistere un piano contenente le due rette perché tale piano dovrebbe contenere P,Q,R,T , ma per definizione T non appartiene al piano contenente P,Q,R.
Una retta passante per O complanare sia con PR sia con QT può essere vista come la retta comune ai due piani PRO e QTO.
Il piano PRO è un qualsiasi piano del fascio di sostegno PR (visto che O appartiene alla retta PR), possiamo quindi ad esempio prendere il piano PQR. Troviamo il piano QTO. La retta QT in forma cartesiana ha equazioni $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Il piano z=0 allora contiene la retta QT ed il punto O e pertanto è il piano QTO.

La retta comune ai due piani ha dunque equazioni $\begin{cases} x - z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, cioè è l'asse y.

Notate che poiché il punto O appartiene alla retta PR ci sono infinite rette complanari a PR e QT e passanti per O. Basta infatti in questo caso prendere un punto S di QT e scrivere la retta OS.
Un'altra retta che risponde alle richieste si trova scrivendo la retta per O parallela alla retta QT. Infatti passando per O che è un punto di PR, la retta è complanare a PR e passando per un punto di QT, o essendo parallela a QT, è complanare alla retta QT.