

ESAME DI GEOMETRIA
Politecnico di Milano – Ingegneria

Secondo compito in itinere – 28 Giugno 2013

1. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 2k & 1 \\ 0 & 1 & 2k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2k & 1 & 0 \\ 1 & 2k & 0 \\ k & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Determinare i valori del parametro reale k in corrispondenza dei quali le matrici A e B sono simili.
- Per $k = 0$, riconoscere la trasformazione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla matrice A .

2. Siano

$$X = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + t = 0, x + 2y - z + t = 0\}$$

$$\text{e } \mathbf{v} = (1, 2, 1, 0).$$

- Determinare una base ortogonale \mathcal{B} del sottospazio X .
- Determinare la proiezione ortogonale $p_X(\mathbf{v})$ del vettore \mathbf{v} sul sottospazio X .
- Determinare il simmetrico ortogonale $s_X(\mathbf{v})$ del vettore \mathbf{v} rispetto al sottospazio X .
- Determinare l'angolo ϑ tra i vettori \mathbf{v} e $\mathbf{v}' = p_X(\mathbf{v})$.
- Sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una trasformazione ortogonale. Determinare l'angolo ϑ' tra i vettori $f(\mathbf{v})$ e $f(\mathbf{v}')$.

3. Siano

$$Q : x^2 + 3y^2 + z^2 - 4xz + 6y = 0$$

$$\pi : x - 2y + z + 2 = 0$$

$$\Gamma = Q \cap \pi.$$

- Riconoscere la quadrica Q .
- Scrivere l'equazione canonica di Q .
- Stabilire se Q è una quadrica a centro. In caso affermativo, determinare il centro di Q .
- Stabilire se Q è una quadrica di rotazione.
- Scrivere le equazioni della curva Γ' proiezione ortogonale di Γ sul piano coordinato xy .
- Riconoscere la curva Γ' .
- Riconoscere la curva Γ .

Soluzioni

1. (a) Le matrici A e B possiedono gli stessi autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2k + 1$ e $\lambda_3 = 2k - 1$. Poiché tali autovalori dipendono dal parametro k , bisogna vedere se esistono autovalori multipli. Si ha che $\lambda_1 = \lambda_2$ per $k = 0$, $\lambda_1 = \lambda_3$ per $k = 1$, mentre $\lambda_2 = \lambda_3$ non è mai possibile. Si hanno i seguenti casi.

- Per $k \neq 0, 1$, le due matrici date possiedono tre autovalori reali distinti e quindi sono entrambe diagonalizzabili. Quindi sono simili.
- Per $k = 0$, si ha che A è diagonalizzabile (essendo reale e simmetrica), mentre B non lo è. Quindi le due matrici date non sono simili.
- Per $k = 1$, entrambe le matrici risultano diagonalizzabili. Quindi sono simili.

In conclusione, le matrici A e B sono simili per $k \neq 0$.

- (b) Per $k = 0$, si ha la matrice di permutazione

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice è ortogonale e ha determinate -1 . Quindi la trasformazione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rappresentata dalla matrice A è una trasformazione ortogonale, inoltre, poiché A è reale e simmetrica e ha come autovalori 1 (contato due volte) e -1 , la trasformazione f è una riflessione rispetto al piano dato dall'autospazio $V_1 = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle$.

2. (a) Risolvendo il sistema lineare che definisce il sottospazio X , si trova che il generico vettore di tale sottospazio è $\mathbf{x} = (x, y, y, -x - y)$. Scegliamo $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0, -1)$ (per $x = 1$ e $y = 0$). Cerchiamo ora i vettori $\mathbf{x} = (x, y, y, -x - y) \in X$ ortogonali a \mathbf{x}_1 . Si deve avere $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle = 0$, ossia $2x + y = 0$. Pertanto si hanno i vettori $\mathbf{x} = (x, -2x, -2x, x)$. Scegliamo il vettore $\mathbf{x}_2 = (1, -2, -2, 1)$. Una base ortogonale di X è pertanto data da $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$.
- (b) Utilizzando la base ortogonale $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ di X trovata nel punto precedente, si ha che la proiezione ortogonale di \mathbf{v} su X è data dal vettore

$$\begin{aligned} p_X(\mathbf{v}) &= \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_1 \rangle}{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle} \mathbf{x}_1 + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_2 \rangle}{\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle} \mathbf{x}_2 \\ &= \frac{1}{2} (1, 0, 0, -1) - \frac{1}{2} (1, -2, -2, 1) \\ &= (0, 1, 1, -1). \end{aligned}$$

- (c) Il simmetrico ortogonale di \mathbf{v} rispetto a X è il vettore

$$s_X(\mathbf{v}) = 2p_X(\mathbf{v}) - \mathbf{v} = 2(0, 1, 1, -1) - (1, 2, 1, 0) = (-1, 0, 1, -2).$$

- (d) L'angolo ϑ tra i vettori \mathbf{v} e $p_X(\mathbf{v})$ è l'angolo compreso tra 0 e π tale che

$$\cos \vartheta = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{v}'\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Quindi $\vartheta = \pi/4$.

- (e) Poiché le trasformazioni ortogonali conservano il prodotto scalare, esse conservano anche gli angoli. Infatti, si ha

$$\cos \vartheta' = \frac{\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{v}') \rangle}{\|f(\mathbf{v})\| \|f(\mathbf{v}')\|} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{v}'\|} = \cos \vartheta.$$

Di conseguenza, si ha $\vartheta' = \vartheta = \pi/4$.

3. (a) Gli invarianti ortogonali della quadrica sono $I_4 = 27$, $I_3 = -9$, $I_2 = 3$, $I_1 = 5$. Poiché $I_4 > 0$, $I_3 \neq 0$, $I_2 > 0$ e $I_1 I_3 < 0$, la quadrica Q è un iperboloide iperbolico (a una falda).
- (b) Gli autovalori della matrice B che rappresenta la parte quadratica dell'equazione di Q sono $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$. Quindi l'equazione canonica di Q

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0$$

diventa

$$3x^2 + 3y^2 - z^2 = 3.$$

- (c) Poiché $I_3 \neq 0$, Q è una quadrica a centro. Le coordinate del centro C di Q soddisfano il sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + 1 = 0 \\ z - 2x = 0 \end{cases}$$

da cui si ha $C \equiv (0, -1, 0)$.

- (d) Poiché possiede due autovalori uguali, Q è una quadrica di rotazione.
- (e) Le equazioni di Γ sono

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + 3y^2 + z^2 - 4xz + 6y = 0 \\ x - 2y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ha $z = -x + 2y - 2$. Sostituendo nella prima equazione e semplificando, si ottiene

$$\Gamma : \begin{cases} 6x^2 - 12xy + 7y^2 + 12x - 2y + 4 = 0 \\ x - 2y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

Pertanto, si ha

$$\Gamma' : \begin{cases} 6x^2 - 12xy + 7y^2 + 12x - 2y + 4 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

- (f) Poiché è l'intersezione di una quadrica con un piano, la curva Γ è una conica. Poiché Γ' è la proiezione di Γ sul piano xy parallelamente alla direzione dell'asse z , anche Γ' è una conica. Nel piano xy , abbiamo la conica di equazione

$$6x^2 - 12xy + 7y^2 + 12x - 2y + 4 = 0.$$

Gli invarianti ortogonali sono $I_3 = -162 \neq 0$ e $I_2 = 6 > 0$. Quindi Γ' è una ellisse reale (irriducibile).

- (g) Poiché le proiezioni parallele conservano la natura delle coniche, anche la conica Γ è una ellisse reale (irriducibile) come Γ' .