NOTA BENE.

Questi appunti non sono esaustivi, non contengono tutto ciò che è stato detto a lezione/esercitazione; costituiscono una base minima di conoscenze necessarie a superare l'esame e sono utili ad un ripasso veloce. Contengono inoltre le dimostrazioni fatte a lezione.

SPAZI VETTORIALI (vedi Capitolo 4 dello Schlesinger e/o Capitolo 2 del Bernardi-Gimigliano)

Def.1. Un insieme V si dice *spazio vettoriale sul campo K* (che per noi sarà il campo razionale Q o il campo reale R o il campo complesso C) se sono definite un'operazione di somma su V (cioè una legge che ad ogni coppia ordinata $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ di elementi di V associa uno e un solo elemento di V, che indicheremo con $\underline{v}_1+\underline{v}_2$) ed un prodotto scalare-vettore (o esterno) fra gli elementi di K e quelli di V, che ad ogni coppia ordinata di elementi $k,\underline{v}$ con $k\in K$, $\underline{v}\in V$ associa uno e un solo elemento di V, che indicheremo con $k\cdot\underline{v}$, con le seguenti proprietà:

1. *associativa*: per ogni terna $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\in V$ si ha $(\underline{v}_1+\underline{v}_2)+\underline{v}_3=\underline{v}_1+(\underline{v}_2+\underline{v}_3)$
2. *commutativa*: per ogni coppia $\underline{v}_1,\underline{v}_2 \in V$ si ha $\underline{v}_1+\underline{v}_2 =\underline{v}_2+\underline{v}_1$
3. *esistenza dello zero*: esiste un elemento $\underline{0}$ in V tale che per ogni $\underline{v}\in V$ si ha $\underline{v}+\underline{0}=\underline{v}$
4. *esistenza dell'opposto*: per ogni $\underline{v}\in V$ esiste un elemento $\underline{v}'\in V$ tale che $\underline{v}+\underline{v}'=\underline{0}$
5. per ogni $k_1,k_2 \in K$ e per ogni $\underline{v} \in V$ si ha $(k_1+k_2)\cdot\underline{v}=k_1\cdot\underline{v} +k_2\cdot\underline{v}$

   (attenzione il simbolo + nei due membri dell'uguaglianza indica operazioni diverse: alla sinistra è la somma in K e alla destra è la somma in V)
6. per ogni $k_1,k_2\in K$ e per ogni $\underline{v} \in V$ si ha $(k_1\cdot k_2)\cdot\underline{v}=k_1\cdot(k_2\cdot\underline{v})$

   (attenzione il simbolo $\cdot$ nella parte a sinistra dell'uguaglianza la prima volta indica il prodotto in K e la seconda il prodotto scalare-vettore, nella parte destra indica sempre il scalare-vettore)
7. per ogni $k \in K$ e per ogni $\underline{v}_1,\underline{v}_2 \in V$ si ha $k\cdot(\underline{v}_1+\underline{v}_2)=k\cdot\underline{v}_1+k\cdot\underline{v}_2$

   (questa volta il simbolo $\cdot$ indica sempre il prodotto scalare-vettore, il simbolo + la somma in V)
8. per ogni $\underline{v}\in V$ si ha $1\cdot\underline{v}=\underline{v}$ (dove 1 rappresenta l'unità di K) .

Nel seguito chiameremo *vettori* gli elementi di V e li sottolineeremo per distinguerli dagli elementi di K, inoltre l'opposto $\underline{v}'$ del vettore $\underline{v}$ sarà indicato con $-\underline{v}$ (se ci riflettete un momento capite subito la ragione). Chiameremo invece *scalari* gli elementi di K.

Quando non ambiguo, ometteremo il simbolo $\cdot$ per indicare il prodotto scalare-vettore e scriveremo semplicemente $k\underline{v}$ per indicare $k\cdot\underline{v}$.

(Le condizioni 1.,2.,3.,4. dicono che V rispetto all'operazione di somma è un *gruppo abeliano*. Quando come campo degli scalari si usa un generico campo K, non solo Q o R o C, il simbolo 1 della proprietà 8. va interpretato come l'elemento neutro rispetto al prodotto di K) .

Esempi

a. Sia V l'insieme dei vettori della fisica applicati in uno stesso punto P, se prendiamo come somma in V la solita somma di vettori (quella ottenuta con la regola del parallelogramma) e come prodotto scalare-vettore fra il campo R e V il solito prodotto di uno scalare per un vettore, otteniamo uno spazio vettoriale su R.

b. Sia V l'insieme delle matrici di uno stesso tipo (m,n) ad elementi reali (complessi), se prendiamo l'usuale somma di matrici come somma in V e l'usuale prodotto di uno scalare per una matrice come prodotto scalare-vettore, otteniamo uno spazio vettoriale su R (su C).
In particolare l'insieme delle matrici si tipo (n,1) (o quello delle matrici di tipo (1,n)) a coefficienti reali è uno spazio vettoriale che indicheremo con R^n.

c. Sia V l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x, se prendiamo come somma in V l'usuale somma di polinomi e come prodotto scalare-vettore l'usuale prodotto di un numero reale per un polinomio, otteniamo uno spazio vettoriale su R.

d. R è uno spazio vettoriale su se stesso se prendiamo come somma l'usuale somma in R e come prodotto scalare-vettore l'usuale prodotto di numeri reali.

Osserviamo che in uno spazio vettoriale valgono le seguenti proprietà:

- $k\cdot\underline{v}=\underline{0}$ se e solo se $k=0$ oppure $\underline{v}=\underline{0}$.
- $-\underline{v}=(-1)\cdot\underline{v}$
- $k_1\cdot(k_2\cdot\underline{v}) = k_2\cdot(k_1\cdot\underline{v})$
- $\underline{v}+\underline{w}=\underline{v}+\underline{u}$ implica $\underline{w}=\underline{u}$

Def. 2. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K, diciamo che un vettore $\underline{v}\in V$ è *combinazione lineare* dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2,\ldots, \underline{v}_n \in V$ se esistono n elementi $k_1,k_2,\ldots,k_n \in K$, detti *coefficienti della combinazione*, tali che $\underline{v}=k_1\underline{v}_1+k_2\underline{v}_2+\ldots+k_n\underline{v}_n$.

I vettori $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n$ si dicono *linearmente indipendenti* se l'unico modo di ottenere il vettore $\underline{0}$ come loro combinazione lineare è prendere tutti i coefficienti della combinazione uguali a 0, altrimenti si dicono *linearmente dipendenti*, in altre parole $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n$ si dicono linearmente dipendenti se esistono n elementi $h_1,h_2,\ldots,h_n \in K$ non tutti nulli tali che $h_1\underline{v}_1+h_2\underline{v}_2+\ldots+h_n\underline{v}_n= \underline{0}$.

Osservazioni

1. I vettori $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi (NON necessariamente ciascuno di essi) è combinazione lineare dei restanti; in particolare se $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_r$ sono vettori linearmente indipendenti e $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_r ,\underline{v}$ sono vettori linearmente dipendenti, allora il vettore $\underline{v}$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_r$, ne segue quindi che ogni insieme di vettori che contenga il vettore $\underline{0}$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti e ogni insieme di vettori che contenga due vettori uguali (o proporzionali) è un insieme di vettori linearmente dipendenti.
2. Se $H=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n \}\subseteq V$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti, allora ogni sottoinsieme T di V tale che $H\subseteq T$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti
3. $H=\{\underline{v}_1\}$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti se e solo se $\underline{v}_1=\underline{0}$
4. Se $I=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n \}\subseteq V$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti, allora ogni sottoinsieme J di V tale che $J\subseteq I$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti

Def.3. Dato uno spazio vettoriale V su K, un sottoinsieme H di V si dice *sottospazio (vettoriale)* di V se H è a sua volta uno spazio vettoriale su K rispetto alla stessa somma di V e allo stesso prodotto scalare-vettore di K per V.

(Questo in particolare significa che la somma di due qualsiasi vettori di H è un vettore di H, che $\underline{0}$ sta in H, che per ogni vettore $\underline{v}$ di H anche $-\underline{v}$ sta in H e che per ogni vettore $\underline{v}$ di H e per ogni λ in K il vettore $\lambda\underline{v}$ sta in H).

Per verificare se un sottoinsieme H di V è un sottospazio sussiste il seguente

Criterio: Un sottoinsieme H di uno spazio vettoriale V su K è un sottospazio di V se e solo se valgono le seguenti due condizioni:

1. per ogni $\underline{v},\underline{w}\in H$, $\underline{v}+\underline{w}\in H$ e
2. per ogni $\underline{v}\in H$ e per ogni $\lambda\in K$, $\lambda\underline{v}\in H$.

Esempi

e. L'insieme $H=\{[x,y,z,t]^T \mid x,y,z,t\in R,\ x=2\}$ non è un sottospazio di R^4 in quanto $\underline{0}\notin H$.

f. L'insieme $H=\{[x,y,z,t]^T \mid x,y,z,t\in R,\ x^2=y\}$ non è un sottospazio di R^4.

   Infatti considerato il vettore $[x,x^2,z,t]^T$ (appartenente ad H) ed uno scalare $\lambda\neq 0,1$, il vettore $\lambda[x,x^2,z,t]^T = [\lambda x,\lambda x^2,\lambda z,\lambda t]^T$ non appartiene ad H in quanto la seconda componente non è il quadrato della prima.

g. L'insieme $H=\{[x,y,z,t]^T \mid x,y,z,t\in R,\ x=y+z\}$ è un sottospazio di R^4.

   Infatti considerati due qualsiasi vettori $[y_1+z_1,y_1,z_1,t_1]^T$, $[y_2+z_2,y_2,z_2,t_2]^T$ in H ed un qualsiasi λ in R si ha $[y_1+z_1,y_1,z_1,t_1]^T+[y_2+z_2,y_2,z_2,t_2]^T = [y_1+z_1+(y_2+z_2),\ y_1+y_2,z_1+z_2,t_1+t_2]^T =$ $=[(y_1+y_2)+(z_1+z_2),y_1+y_2,z_1+z_2,t_1+t_2]^T$ che è un vettore di H ed anche $\lambda[y_1+z_1,y_1,z_1,t_1]^T$ $= [\lambda(y_1+z_1),\lambda y_1,\lambda z_1,\lambda t_1]^T = [\lambda y_1+\lambda z_1,\lambda y_1,\lambda z_1,\lambda t_1]^T$ che è un vettore di H, dunque, usando il criterio, si può concludere che H è un sottospazio di R^4.

h. Sia A una matrice di tipo (m,n), l'insieme $\ker A=\{\underline{x}\in R^n \mid A\underline{x}=\underline{0}\}$ è un sottospazio di R^n.

   Infatti se $\underline{x},\underline{y}\in \operatorname{Ker} A$ e $\lambda\in K$ si ha $A\underline{x}=\underline{0}$, $A\underline{y}=\underline{0}$ e quindi $A(\underline{x}+\underline{y})=A\underline{x}+A\underline{y}=\underline{0}+\underline{0}=\underline{0}$ ovvero $\underline{x}+\underline{y}\in\ker A$, ed anche $A(\lambda\underline{x})=\lambda(A\underline{x})=\underline{0}$ ovvero $\lambda\underline{x}\in\ker A$.

i. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e siano $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n\in V$ l'insieme $L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n)=\{a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+\dots+a_n\underline{v}_n \mid a_i\in K\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

   Infatti presi comunque $\underline{w}_1=a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+\dots+a_n\underline{v}_n$, $\underline{w}_2=b_1\underline{v}_1+b_2\underline{v}_2+\dots+b_n\underline{v}_n$ in $L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n)$, si ha $\underline{w}_1+\underline{w}_2=(a_1+b_1)\underline{v}_1+(a_2+b_2)\underline{v}_2+\dots+(a_n+b_n)\underline{v}_n\in L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n)$ e, per ogni elemento λ di K, $\lambda\underline{w}_1=(\lambda a_1)\underline{v}_1+(\lambda a_2)\underline{v}_2+\dots+(\lambda a_n)\underline{v}_n\in L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n)$.

Def.4. Lo spazio $L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n)=\{a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+\dots+a_n\underline{v}_n \mid a_i\in K\}$ definito nell'esempio i. si chiama (sotto) *spazio vettoriale* (o anche sottospazio lineare) *generato da* $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n$.

I vettori $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n$ costituiscono un *sistema di generatori* di V se $V=L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n)$.

Uno spazio vettoriale ha *dimensione finita* se ammette un insieme finito di generatori.

I vettori $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n$ formano una *base* di V se sono un insieme di generatori linearmente indipendenti.

Proprietà

1. Se $G=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n\}\subseteq V$ è un insieme di generatori di V, allora ogni sottoinsieme G' di V, tale che $G\subseteq G'$ è un insieme di generatori di V

2. *Sia* V *uno spazio vettoriale su* K, $B=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n\}$ *è una base di* V *se e solo se* ogni vettore di V si scrive in uno ed un sol modo come combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n$.
   Infatti se $B=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n\}$ è una base, cioè un insieme di generatori linearmente indipendenti di V, dal fatto che siano generatori abbiamo che ogni vettore $\underline{v}\in V$ si può scrivere come combinazione lineare di $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n$. Supponiamo allora che sia

$\underline{v}= \lambda_1\underline{v}_1+\lambda_2\underline{v}_2+\ldots+\lambda_n\underline{v}_n= \mu_1\underline{v}_1+\mu_2\underline{v}_2+\ldots+\mu_n\underline{v}_n$. Questa uguaglianza implica che $\underline{0} = (\lambda_1- \mu_1)\underline{v}_1+(\lambda_2- \mu_2)\underline{v}_2+\ldots+(\lambda_n- \mu_n)\underline{v}_n$, da cui per l'indipendenza lineare di $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n$, si ricava $\lambda_1= \mu_1$, $\lambda_2= \mu_2,\ldots, \lambda_n= \mu_n$.
Viceversa, se ogni vettore di V si può scrivere in uno e un sol modo come combinazione lineare di $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$, i vettori $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ sono un insieme di generatori di V, inoltre se $\underline{0}=\eta_1\underline{v}_1+\eta_2\underline{v}_2+\ldots+\eta_n\underline{v}_n$, per l'unicità della scrittura di $\underline{0}$ come combinazione lineare di $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n$, si ricava $\eta_1= \eta_2=\ldots=\eta_n=0$, quindi i vettori $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti e dunque una base di V.

3. Siano V uno spazio vettoriale su K, $B=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ una base di V, il vettore $\underline{v}= \lambda_1\underline{v}_1+\lambda_2\underline{v}_2+\ldots+\lambda_n\underline{v}_n$ può essere identificato con la n-upla $[\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n]^T$ (o anche con la n-upla $[\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n]$) di elementi di K. La n-upla $\underline{v}|_B= [\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n]^T$ di elementi di K è l'insieme delle *coordinate di* $\underline{v}$ rispetto alla base B. Inoltre se $\underline{v} = \lambda_1\underline{v}_1+\lambda_2\underline{v}_2+\ldots+\lambda_n\underline{v}_n$ e $\underline{w} = \mu_1\underline{v}_1+\mu_2\underline{v}_2+\ldots+\mu_n\underline{v}_n$, è facile verificare che $\underline{v}+\underline{w} = (\lambda_1+ \mu_1)\underline{v}_1+(\lambda_2+ \mu_2)\underline{v}_2+\ldots+(\lambda_n+ \mu_n)\underline{v}_n$ e $\lambda\underline{v} = (\lambda\lambda_1)\underline{v}_1+ (\lambda\lambda_2)\underline{v}_2+\ldots + (\lambda\lambda_n)\underline{v}_n$ quindi lo spazio vettoriale V (rispetto alla base B) può essere identificato con l'insieme delle matrici di tipo (n,1), o con l'insieme delle matrici di tipo (1,n), ad elementi in K (queste considerazioni sono formalizzate meglio nel capitoletto sulle applicazioni lineari) .

4. *Se* $G=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ *è un sistema di generatori di* V*, da* G *si può sempre estrarre una base di* V (in altre parole ogni spazio vettoriale di dimensione finita ha una base).

   Il procedimento di estrazione procede così (*algoritmo degli scarti successivi*):

   - eliminiamo dai vettori di G tutti gli eventuali $\underline{0}$,
   - supposto che $\underline{v}_1, \underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n$ siano tutti non nulli, eseguiamo il seguente algoritmo:

     passo 0: i: = 2, B:=G

     passo 1: se $\underline{v}_i$ è combinazione lineare dei precedenti vettori si pone B:=B -{$\underline{v}_i$ },

     passo 2: i:=i+1

     passo 3: se i≤n, si torna al passo 1 altrimenti si restituisce B.

   E' facile provare che B è un insieme di generatori (infatti sappiamo che ogni vettore di V è combinazione lineare dei vettori di G e se sostituiamo i vettori eliminati con la loro scrittura come combinazione lineare dei precedenti scriviamo il generico vettore di V come combinazione lineare di vettori di B), inoltre i vettori di B sono linearmente indipendenti perché se $\underline{0}$ si scrivesse come combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli dei vettori di B, il vettore di B con indice massimo che compare nella scrittura di $\underline{0}$ si potrebbe scrivere come combinazione lineare dei precedenti, ma allora avrebbe dovuto essere eliminato da B.

5. *Se* $G=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ *è un sistema di generatori di* V*, e* $\underline{u}_1,\underline{u}_2,\ldots,\underline{u}_r$ *è un insieme di vettori linearmente indipendenti di* V*, esiste sempre una base di* V *che contiene* $\underline{u}_1,\underline{u}_2,\ldots,\underline{u}_r$ (*teorema del completamento della base*)

   Basta osservare che $\{\underline{u}_1,\underline{u}_2,\ldots,\underline{u}_r,\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ è un sistema di generatori di V ed applicare l'algoritmo precedente a questo sistema di generatori trovando quindi una base. Nessuno degli $\underline{u}_i$ viene cancellato perché per ipotesi $\{\underline{u}_1,\underline{u}_2,\ldots,\underline{u}_r\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti e quindi nessuno degli $\underline{u}_i$ è combinazione lineare dei precedenti.

6. *Se* $G=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ *è un sistema di generatori di* V*, ogni insieme* $\underline{w}_1,\underline{w}_2,\ldots,\underline{w}_m$ *di vettori di* V *con* m>n *è costituito da vettori linearmente dipendenti.*

Procediamo per induzione su n.

Caso base. Se n=1 due vettori qualsiasi di V costituiscono un insieme di vettori linearmente dipendenti. Infatti siano $\underline{w}_1,\underline{w}_2\in V$ due vettori distinti se uno di essi è $\underline{0}$ allora i due vettori sono linearmente dipendenti. Quindi supponiamoli entrambi diversi dal vettore nullo, poiché $V=\{\underline{v}_1\}$ è un sistema di generatori di V allora $\underline{w}_1= a\underline{v}_1$, $\underline{w}_2= b\underline{v}_1$ con a,b diversi da 0 e dunque $b\underline{w}_1 - a\underline{w}_2=\underline{0}$ con a,b non nulli.

Supponiamo allora per ipotesi di induzione che se un insieme di n-1 vettori è un insieme di generatori di uno spazio vettoriale allora ogni insieme di n vettori di quello spazio è un insieme di vettori linearmente dipendenti.

Sia ora $G=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ un sistema di generatori di V e prendiamo in V un qualsiasi insieme di n+1 vettori $\underline{w}_1,\underline{w}_2,\ldots,\underline{w}_{n+1}$.

Se uno dei vettori $\underline{w}_1,\underline{w}_2,\ldots,\underline{w}_{n+1}$ è il vettore nullo, l'insieme $\underline{w}_1,\underline{w}_2,\ldots,\underline{w}_{n+1}$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti, pertanto assumiamo che nessun $\underline{w}_i$ sia $\underline{0}$. Poiché $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ è un sistema di generatori di V abbiamo

$\underline{w}_1= a_{11}\underline{v}_1+a_{12}\underline{v}_2+\ldots+a_{1n}\underline{v}_n$

$\underline{w}_2= a_{21}\underline{v}_1+a_{22}\underline{v}_2+\ldots+a_{2n}\underline{v}_n$

……

$\underline{w}_{n+1}= a_{n+1\,1}\underline{v}_1+a_{n+1\,2}\underline{v}_2+\ldots+a_{n+1\,n}\underline{v}_n$

dove possiamo sempre assumere $a_{11}\neq 0$ (in caso contrario riordiniamo i $\underline{v}_i$)

Allora

$a_{11}\underline{w}_2- a_{21}\underline{w}_1=(a_{11}a_{22}- a_{21}a_{12})\underline{v}_2+\ldots+(a_{11}a_{2n}- a_{21}a_{1n})\underline{v}_n$

$a_{11}\underline{w}_3- a_{31}\underline{w}_1=(a_{11}a_{32}- a_{31}a_{12})\underline{v}_2+\ldots+(a_{11}a_{3n}- a_{31}a_{1n})\underline{v}_n$

……

$a_{11}\underline{w}_{n+1}- a_{n+1\,1}\underline{w}_1=(a_{11}a_{n2}- a_{n+1 1}a_{n+1 2})\underline{v}_2+\ldots+(a_{11}a_{n+1 n}- a_{n+1\,1}a_{1n+1})\underline{v}_n$

quindi $a_{11}\underline{w}_2- a_{21}\underline{w}_1$, $a_{11}\underline{w}_3- a_{31}\underline{w}_1,\ldots, a_{11}\underline{w}_{n+1}- a_{n+1\,1}\underline{w}_1$ sono n vettori appartenenti allo spazio vettoriale generato da $\{\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ quindi sono linearmente dipendenti per ipotesi di induzione e dunque esistono dei coefficienti $b_1,b_2,\ldots,b_n$ non tutti nulli tali che
$b_1(a_{11}\underline{w}_2- a_{21}\underline{w}_1)+ b_2(a_{11}\underline{w}_3- a_{31}\underline{w}_1)+\ldots+ b_n (a_{11}\underline{w}_{n+1}- a_{n+1\,1}\underline{w}_1)=\underline{0}$

da cui $(-b_1a_{21}-b_2a_{31}-\ldots-b_n a_{n+1\,1})\underline{w}_1 + b_1a_{11}\underline{w}_2+ b_2a_{11}\underline{w}_3+\ldots+ b_n a_{11}\underline{w}_{n+1}=\underline{0}$ con almeno un $b_ia_{11}\neq 0$, pertanto $\underline{w}_1,\underline{w}_2,\ldots,\underline{w}_{n+1}$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti.

7. *Se* V *è uno spazio vettoriale di dimensione finita e* $B=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ *e* $B'=\{\underline{u}_1,\underline{u}_2,\ldots,\underline{u}_r\}$ *sono due basi di* V *allora* m=r.

   Infatti B, essendo una base, è un insieme di generatori e B', essendo una base, è un insieme di vettori linearmente indipendenti di V, perciò $r\leq m$. Scambiando il ragionamento si ha che B', essendo una base, è un insieme di generatori e B, essendo una base, è un insieme di vettori linearmente indipendenti di V e dunque $m\leq r$, da cui l'asserto.

8. *Siano* V *è uno spazio vettoriale sul campo* K *e* $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2,\ldots, \underline{v}_t\}\subseteq V$. *Allora per ogni* $k\in K$ *si ha* $L(\underline{v}_1, \underline{v}_2,\ldots, \underline{v}_t)=L(\underline{v}_1, \underline{v}_2,\ldots, \underline{v}_j+k\underline{v}_i,\ldots,\underline{v}_t)$.
   Infatti $\underline{v}_j+k\underline{v}_i\in L(\underline{v}_1, \underline{v}_2,\ldots, \underline{v}_t)$ che implica $L(\underline{v}_1, \underline{v}_2,\ldots, \underline{v}_j+k\underline{v}_i,\ldots,\underline{v}_t)\subseteq L(\underline{v}_1, \underline{v}_2,\ldots, \underline{v}_t)$ e analogamente $\underline{v}_j \in L(\underline{v}_1, \underline{v}_2,\ldots, \underline{v}_j+k\underline{v}_i,\ldots,\underline{v}_t)$ che implica l'inclusione opposta.

Def. 5. Si dice *dimensione* di uno spazio vettoriale di dimensione finita il numero di vettori che compongono una sua base.

Osservazione 5.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, allora ogni insieme di generatori è formato da $m \geq n$ vettori, ogni insieme di vettori linearmente indipendenti è formato da $r \leq n$ vettori. In particolare un insieme di generatori formato da n vettori è una base e un insieme di n vettori linearmente indipendenti è una base.

Osservazione 6.

Osservate che se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita n, ogni suo sottospazio ha dimensione $m \leq n$, in particolare ogni sottospazio di dimensione n coincide con V (la base del sottospazio è un insieme di vettori linearmente indipendenti in V ed avendo la stesso numero di vettori di una base di V è a sua volta una base di V).

Esempi

j. Consideriamo lo spazio vettoriale R^3. I vettori $\underline{e}_1=[1,0,0]^T$, $\underline{e}_2=[0,1,0]^T$, $\underline{e}_3=[0,0,1]^T$ costituiscono una base di V. Infatti sono linearmente indipendenti in quanto $a\underline{e}_1+b\underline{e}_2+c\underline{e}_3=\underline{0}$ implica a=b=c=0, ed ogni vettore $\underline{v}=[a,b,c]^T$ di R^3 si può scrivere come combinazione lineare di $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ ($[a,b,c]^T=a\underline{e}_1+b\underline{e}_2+c\underline{e}_3$); questa base si chiama *base canonica* di R^3. In generale la base canonica di R^n è formata dagli n vettori $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ dove $\underline{e}_i$ è il vettore le cui componenti diverse dalla i-esima sono tutte 0 e la componente i-esima è 1 (per ogni $1 \leq i \leq n$).
k. L'insieme di vettori { $[1,1,1]^T$, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$} è un sistema di generatori di R^3, ma non è una base perché i vettori non sono linearmente indipendenti, una base di R^3 è anche { $[1,1,1]^T$, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$}, infatti $a[1,1,1]^T+b\,\underline{e}_1+c\,\underline{e}_2=\underline{0}$ implica a=b=c=0 ed inoltre ogni vettore $[a,b,c]^T$ si può scrivere ad esempio come $c[1,1,1]^T+(a-c)\underline{e}_1+(b-c)\underline{e}_2$.
l. I polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3 nella variabile x formano uno spazio vettoriale V su R rispetto alla somma di polinomi e al prodotto esterno definito come usuale prodotto di un numero per un polinomio. E' immediato verificare che $\{1,x,x^2,x^3\}$ è una base di V.

   $G=\{1, x, x-1, 2x+x^2, x^2+x^3\}$ è un sistema di generatori di V infatti un qualsiasi polinomio $a+bx+cx^2+dx^3$ si può scrivere ad esempio come

   $d(x^2+x^3)+(c-d)(2x+x^2)+(d-c)(x-1)+(b+d-c)x+(a+d-c)\cdot 1$.

   G non è una base, infatti il polinomio 0 si scrive nella forma

   $0=0(x^2+x^3)+0(2x+x^2)+1(x-1)-1(x)+1$, quindi come combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli dei vettori di G.

   Possiamo immediatamente osservare che x è combinazione lineare dei vettori 1,x-1 (è la loro somma). Se eliminiamo x da G otteniamo allora

   $G'=\{1, x-1, 2x+x^2, x^2+x^3\}$; i vettori di G' sono linearmente indipendenti. Si verifica facilmente che i vettori di G' sono un sistema di generatori, infatti sostituendo (x-1)+1 ad x abbiamo $a+bx+cx^2+dx^3 = d(x^2+x^3)+(c-d)(2x+x^2)+0\cdot(x-1)+(b+2d-2c)x+a\cdot 1=$

   $d(x^2+x^3)+(c-d)(2x+x^2)+0\cdot(x-1)+(b+2d-2c)(x-1+1)+a\cdot 1=$

   $d(x^2+x^3)+(c-d)(2x+x^2)+(b+2d-2c)(x-1)+a\cdot 1\cdot(x-1)+(b+2d-2c)(x-1)+(b+2d-2c+a)\cdot 1$, dunque G' è una base di V.

m. Sapendo che $[1,1,1,1]^T$, $[2,0,2,0]^T$, $[-1,1,-1,1]^T$, $[0,0,2,2]^T$, $[1,0,0,0]^T$, $[0,0,0,1]^T$ è un sistema di generatori per R^4, estrarne una base.

Non ci sono vettori nulli nel nostro insieme, inoltre $[2,0,2,0]^T$ non è combinazione lineare di $[1,1,1,1]^T$, quindi si considera il vettore successivo $[-1,1,-1,1]^T$ che risulta essere somma dei precedenti, dunque lo si elimina dal sistema di generatori e si passa a considerare $[0,0,2,2]^T$, $[0,0,2,2]^T$ non si può scrivere come combinazione lineare di $[1,1,1,1]^T$ e $[2,0,2,0]^T$ (infatti ogni combinazione lineare di tali vettori ha prima e terza componente uguale) e quindi si passa a considerare $[1,0,0,0]^T$. $[1,0,0,0]^T$ non è combinazione lineare di $[1,1,1,1]^T$, $[2,0,2,0]^T$, $[0,0,2,2]^T$, perché il sistema lineare

$$\begin{cases} a+2b=1 \\ a=0 \\ a+2b+2c=0 \\ a+2c=0 \end{cases}$$

(che corrisponde alla equazione matriciale $[1,0,0,0]^T = a[1,1,1,1]^T+b[2,0,2,0]^T+c[0,0,2,2]^T$) è impossibile.

I vettori $[1,1,1,1]^T$, $[2,0,2,0]^T$, $[0,0,2,2]^T$, $[1,0,0,0]^T$ sono pertanto linearmente indipendenti e sono una base per R^4 avendo R^4 dimensione 4.

Osservate che se aveste applicato l'algoritmo degli scarti successivi al sistema di generatori precedente, riordinato così: $[2,0,2,0]^T$, $[-1,1,-1,1]^T$, $[1,1,1,1]^T$, $[0,0,0,1]^T$, $[0,0,2,2]^T$, $[1,0,0,0]^T$ avreste trovato come base: $[2,0,2,0]^T$, $[-1,1,-1,1]^T$, $[0,0,0,1]^T$, $[0,0,2,2]^T$; il risultato dell'algoritmo degli scarti successivi infatti dipende dall'ordine considerato per l'insieme di vettori linearmente indipendenti.

Dalla definizione di base e dimensione e dal teorema di Rouché Capelli si ricava

Teorema 1 (di nullità più rango). Se A è una matrice di tipo (m,n), si ha dim kerA+rk(A)=n.

Dim. Se rk(A)=r, per il teorema di Rouché Capelli il sistema lineare Ax=0 ha infinite soluzioni che si scrivono in uno e un sol modo nella forma $t_1\underline{v}_1+t_2\underline{v}_2+\ldots+t_{n-r}\underline{v}_{n-r}$ dove ogni $\underline{v}_i$ è la soluzione che si ottiene assegnando il valore 1 alla i-esima variabile libera del sistema e 0 alle altre variabili libere, quindi $t_1\underline{v}_1+t_2\underline{v}_2+\ldots+t_{n-r}\underline{v}_{n-r}$ è la soluzione che si ottiene dando all'i-esima variabile libera, $1\le i\le n-r$, il valore t_i . Le soluzioni del sistema dipendono quindi dai valori dati ai parametri $t_1,t_2,\ldots,t_{n-r}$ e a valori delle (n-r)-upla che differiscono per almeno una componente corrispondono soluzioni diverse in quanto almeno la i-esima variabile libera nelle due soluzioni del sistema avrebbe due valori diversi. Quindi i vettori $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_{n-r}$ sono una base per ker A e dunque dim ker A=n-r.

<u>Rango di una matrice e dimensioni degli spazi righe e colonne della matrice</u>

Abbiamo già osservato (note sull'algebra delle matrici) che una matrice A di tipo (m,n) può essere vista come costituita dall'accostamento (verticale) di m vettori riga di tipo (1,n) : $\underline{r}_1, \underline{r}_2,\ldots,\underline{r}_m$. Poniamo Row(A)=L($\underline{r}_1, \underline{r}_2,\ldots, \underline{r}_m$).

Analogamente A può essere vista come costituita dall'accostamento (orizzontale) di n vettori colonna di tipo (m,1) : $\underline{c}_1, \underline{c}_2,\ldots, \underline{c}_n$. Poniamo Col(A)=L($\underline{c}_1, \underline{c}_2,\ldots, \underline{c}_n$).

E' molto importante il seguente

Teorema 2: rk(A)=dim Row(A)=dim Col(A).

Per dimostrarlo usiamo alcuni lemmi

Lemma 1: Se A' è ottenuta da A utilizzando una mossa di Gauss, allora Row(A)=Row(A') e in particolare se U è una matrice a scala ottenuta da A per eliminazione gaussiana Row(U)=Row(A).

Dim. Ovviamente se si scambiano fra loro due righe di A lo spazio Row (A) non cambia, inoltre dalla Proprietà 8 si ha che lo spazio Row A non cambia se a una riga di A si aggiunge un multiplo di un'altra riga. Dunque se A' è ottenuta da A con una mossa di Gauss Row (A)=Row(A'). Poiché U è ottenuto da A con un numero finito di mosse di Gauss abbiamo anche Row(U)=Row(A).

Lemma 2: Se U è una matrice a scalino dim Row(U)=rk(U).

Dim. Si verifica immediatamente che le righe di U che contengono i pivot (uniche righe diverse dal vettore $\underline{0}$) sono linearmente indipendenti e sono il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che posso estrarre dall'insieme di righe di U.

Lemma 3. Col(A) è l'insieme di tutti i vettori $\underline{b}$ tali che il sistema lineare $A\underline{x}=\underline{b}$ è possibile.

Dim. Se il sistema $A\underline{x}=\underline{b}$ è possibile e la n-upla $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ è una sua soluzione, questo significa che $a_1\underline{c}_1+a_2\underline{c}_2+\ldots+a_n\underline{c}_n=\underline{b}$ e dunque $\underline{b}\in$ Col(A). Viceversa se $\underline{b}\in$ Col(A) esiste una n-upla di scalari $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ tale che $a_1\underline{c}_1+a_2\underline{c}_2+\ldots+a_n\underline{c}_n=\underline{b}$ ovvero tale che $A[a_1,a_2,\ldots,a_n]^T=b$, quindi la n-upla è una soluzione del sistema $A\underline{x}=\underline{b}$ che dunque è possibile.

<u>Osservazione 7.</u>

Dal lemma 3 segue che le soluzioni del sistema omogeneo $A\underline{x}=\underline{0}$ dicono in che modo il vettore $\underline{0}$ può essere scritto come combinazione lineare dei vettori colonna di A e quindi anche quali colonne di A sono linearmente indipendenti.

Lemma 4. Se A' è ottenuta da A utilizzando una mossa di Gauss, allora dim Col(A)=dim Col(A') e in particolare se U è una matrice a scala ottenuta da A per eliminazione gaussiana dim Col(U) = dim Col(A).

Dim. I due sistemi lineari $A\underline{x}=\underline{0}$ e $A'\underline{x}=\underline{0}$ sono equivalenti. Dalla osservazione 7 segue quindi che le colonne di A' che occupano la stessa posizioni delle colonne linearmente indipendenti di A sono linearmente indipendenti e viceversa.

Lemma 5: dim Col(U)=rk(U).

Dim. E' immediato verificare che le colonne di U che contengono i pivot sono un insieme di vettori linearmente indipendenti. Inoltre se le ultime t righe della matrice U sono nulle lo spazio generato dalle colonne ha al più dimensione n-t (possiamo infatti pensare di associare ad ogni vettore colonna di U quello formato dalle sue prime n-t componenti). I pivot di U sono esattamente n-t e quindi le colonne che contengono i pivot sono n-t e sono un insieme di vettori linearmente indipendenti e quindi sono una base di Col(U).

Dim. del Teorema 2. Dai lemma 1 e 2 abbiamo dim Row(A)=dim Row (U)=rk(U), dai lemma 4 e 5 abbiamo dim Col(A)=dim Col (U)=rk(U) dove U è la matrice a scala ottenuta da A col procedimento descritto nel capitoletto sui sistemi lineari, in cui abbiamo anche definito rk(A)=rk(U).

Il Lemma 4 si poteva anche dimostrare direttamente osservando che

Lemma 4'. $\{[v_{11}, v_{21},\ldots, v_{m1}]^T, [v_{12}, v_{22},\ldots, v_{m2}]^T,\ldots, [v_{1n}, v_{2n},\ldots, v_{mn}]^T\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti di R^m se e solo se $\{[v_{11},.., v_{j1}+k\, v_{i1},.., v_{m1}]^T, [v_{12},.., v_{j2}+k\, v_{i2},.., v_{m2}]^T,.., [v_{1n},.., v_{jn}+k\, v_{in},.., v_{mn}]^T\}$, è un insieme si vettori linearmente indipendenti di R^m.

Dim. Siano $\{[v_{11}, v_{21},\ldots, v_{m1}]^T, [v_{12}, v_{22},\ldots, v_{m2}]^T,\ldots, [v_{1n}, v_{2n},\ldots, v_{mn}]^T\}$ un insieme di vettori di R^m e siano $a_1, a_2,\ldots, a_n$ elementi di K tali che

$a_1[v_{11},\ldots, v_{j1}+k\, v_{i1},..., v_{m1}]^T + a_2[v_{12},..., v_{j2}+k\, v_{i2},..., v_{m2}]^T +\ldots+ a_n[v_{1n},..,v_{jn}+k\, v_{in},.., v_{mn}]^T =\underline{0}$.

Questo equivale a dire che la n-upla $(a_1, a_2,\ldots, a_n)$ è soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a_1v_{11}+a_2v_{12}+\ldots+a_nv_{1n}=0 \\ \quad\quad\quad\ldots. \\ a_1v_{i1}+a_2v_{i2}+\ldots+a_nv_{in}=0 \\ \quad\quad\quad\ldots. \\ a_1(v_{j1}+kv_{i1})+a_2(v_{j2}+kv_{i2})+\ldots+a_n(v_{jn}+kv_{in})=0 \\ \quad\quad\quad\ldots. \\ a_1v_{m1}+a_2v_{m2}+\ldots+a_nv_{mn}=0 \end{cases}$$

che è equivalente al sistema

$$\begin{cases} a_1v_{11}+a_2v_{12}+\ldots+a_nv_{1n}=0 \\ \quad\quad\quad\ldots. \\ a_1v_{i1}+a_2v_{i2}+\ldots+a_nv_{in}=0 \\ \quad\quad\quad\ldots. \\ a_1v_{j1}+a_2v_{j2}+\ldots+a_nv_{jn}=-k(a_1v_{i1}+a_2v_{i2}+\ldots+a_nv_{in}) \\ \quad\quad\quad\ldots. \\ a_1v_{m1}+a_2v_{m2}+\ldots+a_nv_{mn}=0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} a_1v_{11}+a_2v_{12}+\ldots+a_nv_{1n}=0 \\ \quad\quad\quad\ldots. \\ a_1v_{i1}+a_2v_{i2}+\ldots+a_nv_{in}=0 \\ \quad\quad\quad\ldots. \\ a_1v_{j1}+a_2v_{j2}+\ldots+a_nv_{jn}=0 \\ \quad\quad\quad\ldots. \\ a_1v_{m1}+a_2v_{m2}+\ldots+a_nv_{mn}=0 \end{cases}$$

I vettori $\{[v_{11}, v_{21},\ldots, v_{m1}]^T, [v_{12}, v_{22},\ldots, v_{m2}]^T,\ldots, [v_{1n}, v_{2n},\ldots, v_{mn}]^T\}$ sono linearmente indipendenti se e solo se il primo sistema ammette solo la soluzione banale se e solo se l'ultimo sistema ha solo la soluzione banale e quindi se e solo se i vettori $\{[v_{11}, v_{21},\ldots, v_{m1}]^T, [v_{12}, v_{22},\ldots, v_{m2}]^T,\ldots, [v_{1n}, v_{2n},\ldots, v_{mn}]^T\}$ sono linearmente indipendenti.

Il lemma 4' e l'osservazione che il cambiare in tutti i vettori di un insieme la componente di posto i con quella di posto j porta vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti e viceversa, dice che ogni mossa di Gauss non cambia la dimensione dello spazio colonne di A.

Sostanzialmente il teorema 2 dice che il rango di A coincide

- col massimo numero di vettori colonna linearmente indipendenti che si possono estrarre dalle colonne di A
- col massimo numero di vettori riga linearmente indipendenti che si possono estrarre dalle righe di A

Quindi

Corollario 3. $rk(A)=rk(A^T)$.

E' ovvio che

- solo la matrice nulla (di un qualunque tipo (m,n)) ha rango 0
- se A è una matrice non nulla di tipo (m,n), $1 \le rk(A) \le \min(m,n)$
- se A è una matrice quadrata di ordine n, rk(A)=n se e solo se det $A \neq 0$ e in tal caso A si dice matrice *non singolare* (vedere il capitolo sul determinante)

Osserviamo che il Teorema 2 ci offre un *metodo veloce per verificare se un insieme di vettori riga (colonna) è linearmente indipendente*. Basta infatti calcolare il rango della matrice ottenuta per accostamento verticale (orizzontale) dei vettori dati. Se il rango è minore del numero dei vettori accostati, i vettori sono linearmente dipendenti; in caso contrario sono linearmente indipendenti,

Da quanto visto sopra si ottiene anche *la regola di Kronecker*, un metodo comodo per calcolare il rango di una matrice A di tipo (m,n). (Capitolo 6 dello Schlesinger e capitolo & del Bernardi-Gimigliano)

Chiamiamo *sottomatrice* di A una matrice di tipo (m',n') con m'≤m, n'≤n, ottenuta scegliendo m' righe distinte ed n' colonne distinte di A e considerando tutti gli elementi che si trovano all'intersezione di queste righe e colonne.

Chiamiamo *minore* di ordine r di A il determinante di una qualsiasi sottomatrice quadrata di ordine r di A

Sia A' una sottomatrice quadrata di A di ordine s < min (m,n). Una sottomatrice A'' di A ottenuta aggiungendo una riga ed una colonna a quelle già scelte per formare A' si dice *ottenuta per orlatura* da A'

<u>Esempio</u>

n. Sia A=$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$, A'=$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ è una sottomatrice di A (ottenuta scegliendo gli elementi comuni alla prima e terza riga e alla seconda e terza colonna di A), per orlare A' alle righe considerate per formare A' bisogna ovviamente aggiungere la seconda riga, poi possiamo scegliere se aggiungere alle colonne usate per formare A' la prima o la quarta colonna, abbiamo così due sottomatrici di A ottenute per orlatura da A': $\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

Per estensione si dice *minore orlato* di un minore M di una matrice A il determinante di una sottomatrice A'' ottenuta per orlatura dalla sottomatrice di cui M è il determinante.

Nel calcolo del rango risulta quindi molto utile la seguente

regola di Kronecker: Una matrice A ha rango r se e solo se esiste un minore M di A di ordine r diverso da 0 e tutti i minori (di ordine r+1) di A ottenuti orlando M sono nulli.

Dim. Osserviamo per prima cosa che se B è una sottomatrice quadrata di A con det B≠0, le righe di A scelte per formare B sono linearmente indipendenti, in caso contrario infatti la relazione di dipendenza fra quelle righe di A sarebbe anche una relazione di dipendenza fra le righe di B e si avrebbe det B=0.

Assumiamo che A abbia rango r. A ha almeno un minore di ordine r diverso da 0. Infatti A ha r righe linearmente indipendenti. Prendiamo la sottomatrice B formata da quelle righe, B ha rango r perché le sue righe sono linearmente indipendenti e quindi B ha r colonne linearmente indipendenti. Consideriamo la sottomatrice C di B formata da quelle colonne, C ha r colonne linearmente indipendenti, quindi ha rango r ed essendo quadrata ha determinante diverso da 0. Tutti i minori di ordine r+1 di A sono uguali a 0 altrimenti per la prima osservazione avremmo che A ha r+1 righe linearmente indipendenti e quindi rango r+1.

Viceversa supponiamo che A abbia un minore M di ordine r diverso da 0 e che tutti i minori ottenuti per orlatura da M siano nulli. Per la prima osservazione sappiamo che A ha almeno r righe linearmente indipendenti e quindi rk(A)≥r e le r righe di A scelte per formare la sottomatrice B di cui M è determinante sono linearmente indipendenti. Supponiamo che a quelle righe se ne possa aggiungere un'altra in modo che l'insieme delle righe così ottenuto sia costituito da vettori linearmente indipendenti. La sottomatrice C formata da quelle righe ha allora rango r+1, quindi

Col (C) ha una base formata da r+1 vettori. C ha B come sua sottomatrice e sappiamo che le colonne di C che contengono le colonne di B sono linearmente indipendenti, quindi possiamo aggiungere a tali colonne un'altra colonna per formare una base di Col (C) (Proprietà 5). Prendiamo la sottomatrice (quadrata) D di C formata da quelle colonne, D ha rango r+1 e quindi det D≠0. Abbiamo dunque trovato un minore orlato di M diverso da 0 contro l'ipotesi. Quindi dim Row(A)= r =rk(A).

<u>Esempio</u>.

o. Calcolare al variare di h il rango della matrice $A=\begin{bmatrix} h & 1 & 2 & -h \\ 2 & 2 & 2 & h \\ -h & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

Ovviamente $1 \le \text{rk } A \le 3$. Il minore $M=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-2$ è un minore di A di ordine 2 diverso da 0, quindi $2 \le \text{rk } A \le 3$. Il minore $\begin{vmatrix} h & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -h & 3 & 6 \end{vmatrix}=8h$ è diverso da 0 per h≠0, quindi per h≠0 A ha rango 3.

Vediamo cosa accade dell'altro minore ottenuto per orlatura da M, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -h \\ 2 & 2 & h \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$, quando h=0; il minore diventa , $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$ e quindi è uguale a 0, per cui A per h=0 ha rango 2.

<u>Intersezione, somma e somma diretta di sottospazi vettoriali</u>

Proposizione 1. L'intersezione insiemistica U∩W di due sottospazi vettoriali U, W di uno spazio vettoriale V è un sottospazio di V.

Dim. Presi comunque due vettori <u>z</u>, <u>v</u> di U∩W ed uno scalare λ, dal fatto che <u>z</u>,<u>v</u>∈U e che U è un sottospazio di V segue <u>z</u>+<u>v</u>∈U e λ<u>z</u>∈U; analogamente dal fatto che <u>z</u>,<u>v</u>∈W e che W è un sottospazio di V segue <u>z</u>+<u>v</u>∈W e λ<u>z</u>∈W; dunque <u>z</u>+<u>v</u>∈U∩W e λ<u>z</u>∈U∩W e pertanto U∩W è un sottospazio di V.

<u>Osservazione 7</u>. L'unione insiemistica U∪W di due sottospazi vettoriali U, W di uno spazio vettoriale V NON è in generale un sottospazio di V, più precisamente è un sottospazio se e solo se U⊆W o W⊆U.

Def. 5. Siano V uno spazio vettoriale, U e W due suoi sottospazi, si dice *somma* di U e W l'insieme U+W={<u>u</u>+<u>w</u>| <u>u</u>∈U, <u>w</u>∈W}

Proposizione 2. La somma U+W di due sottospazi vettoriali U, W di uno spazio vettoriale V è un sottospazio di V, più precisamente è il minimo sottospazio di V che contiene sia H sia K.

Dim Siano $\underline{z}_1$, $\underline{z}_2$ due generici elementi di U+W e λ un qualsiasi scalare. Per definizione di U+W , $\underline{z}_1=\underline{u}_1+\underline{w}_1$, $\underline{z}_2=\underline{u}_2+\underline{w}_2$, con $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in H$, $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in K$, allora $\underline{z}_1+\underline{z}_2=(\underline{u}_1+\underline{w}_1)+(\underline{u}_2+\underline{w}_2)=(\underline{u}_1+\underline{u}_2)+(\underline{v}_1+\underline{v}_2)$ (tenuto conto delle proprietà commutativa ed associativa), ma $\underline{u}_1+\underline{u}_2 \in U$, $\underline{w}_1+\underline{w}_2 \in W$, dunque $\underline{z}_1+\underline{z}_2 \in U+W$, inoltre $\lambda\underline{z}_1=\lambda(\underline{u}_1+\underline{w}_1)=\lambda\underline{u}_1+\lambda\underline{w}_1$, ma $\lambda\underline{u}_1 \in U$, $\lambda\underline{w}_1 \in W$, dunque $\lambda\underline{z}_1 \in U+W$. In conclusione U+W è un sottospazio.

Ovviamente considerato un generico vettore $\underline{u}\in U$, essendo $\underline{u}=\underline{u}+\underline{0}$ e appartenendo $\underline{0}$ ad ogni sottospazio e quindi in particolare a W si ha $\underline{u}\in U+W$, cioè $U\subseteq U+W$, analogamente si ottiene $W\subseteq U+W$. Sia ora H un sottospazio di V contenente U e W, per ogni $\underline{u}\in U$, $\underline{w}\in W$, si ha $\underline{u}+\underline{w}\in H$ (in quanto $\underline{u}$, $\underline{w}\in H$ e H è un sottospazio) e dunque $U+W\subseteq H$.

Sussiste la seguente

Formula di Grassman: Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale V. Se U e W hanno dimensione finita, allora hanno dimensione finita sia $U\cap W$, sia $U+W$ e inoltre si ha:

$$\dim U+\dim W=\dim (U\cap W)+\dim (U+W).$$

Dim. Sia dim U=n, dim W=m. $U\cap W$ è un sottospazio di U e di W e pertanto ha dimensione finita k con $k\leq \min(n,m)$. Siano $\underline{i}_1, \underline{i}_2,\dots,\underline{i}_k$ i vettori di una base di $U\cap W$. Allora esistono n-k vettori $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2,\dots,\underline{u}_{n-k}$ in U, tali che $\underline{i}_1, \underline{i}_2,\dots,\underline{i}_k$, $\underline{u}_1, \underline{u}_2,\dots,\underline{u}_{n-k}$ formano una base di U ed m-k vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2,\dots,\underline{w}_{m-k}$ in W, tali che $\underline{i}_1, \underline{i}_2,\dots,\underline{i}_k$, $\underline{w}_1, \underline{w}_2,\dots,\underline{w}_{m-k}$ formano una base di W.

I vettori $\underline{i}_1, \underline{i}_2,\dots,\underline{i}_k$, $\underline{u}_1, \underline{u}_2,\dots,\underline{u}_{n-k}$, $\underline{w}_1, \underline{w}_2,\dots,\underline{w}_{m-k}$ generano ovviamente U+W.

Sia $a_1\underline{i}_1+a_2\underline{i}_2+\dots+a_k\underline{i}_k+b_1\underline{u}_1+b_2\underline{u}_2+\dots+b_{n-k}\underline{u}_{n-k}+c_1\underline{w}_1+c_2\underline{w}_2+\dots+c_{m-k}\underline{w}_{m-k}=0$, allora $a_1\underline{i}_1+a_2\underline{i}_2+\dots+a_k\underline{i}_k+b_1\underline{u}_1+b_2\underline{u}_2+\dots+b_{n-k}\underline{u}_{n-k}=-(c_1\underline{w}_1+c_2\underline{w}_2+\dots+c_{m-k}\underline{w}_{m-k})$ è un vettore appartenente ad $U\cap W$ e quindi esistono k scalari $d_1,d_2,\dots,d_k$ tali che $-(c_1\underline{w}_1+c_2\underline{w}_2+\dots+c_{m-k}\underline{w}_{m-k})=d_1\underline{i}_1+d_2\underline{i}_2+\dots+d_k\underline{i}_k$ e quindi $d_1\underline{i}_1+d_2\underline{i}_2+\dots+d_k\underline{i}_k+c_1\underline{w}_1+c_2\underline{w}_2+\dots+c_{m-k}\underline{w}_{m-k}=0$, da cui essendo $\underline{i}_1, \underline{i}_2,\dots,\underline{i}_k$, $\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_{m-k}$ una base di W, si ottiene $d_1=d_2=\dots=d_k=c_1=c_2=\dots=c_{m-k}=0$ e quindi $-(c_1\underline{w}_1+c_2\underline{w}_2+\dots+c_{m-k}\underline{w}_{m-k})=\underline{0}$ e dunque $a_k\underline{i}_k+b_1\underline{u}_1+b_2\underline{u}_2+\dots+b_{n-k}\underline{u}_{n-k}=0$ da cui, essendo che $\underline{i}_1, \underline{i}_2,\dots,\underline{i}_k$, $\underline{u}_1, \underline{u}_2,\dots,\underline{u}_{n-k}$ una base di U, abbiamo $a_1=a_2=\dots=a_k=b_1=b_2=\dots=b_{n-k}=0$. Dunque i vettori $\underline{i}_1, \underline{i}_2,\dots,\underline{i}_k$, $\underline{u}_1, \underline{u}_2,\dots,\underline{u}_{n-k}$, $\underline{w}_1, \underline{w}_2,\dots,\underline{w}_{m-k}$ sono linearmente indipendenti e quindi sono una base di U+W.

Si ha pertanto $\dim (U+W)=n+m-k=\dim U+\dim W+\dim (U\cap W)$.

Se $\dim (U\cap W)=0$ (o equivalentemente $U\cap W=\underline{0}$), allora U+W si dice *somma diretta* di U e W e si scrive $U\oplus W$.

Proposizione 3. $U+W=U\oplus W$ se e solo se ogni vettore di U+W si scrive in uno ed un sol modo come somma di un vettore di U e di uno di W.

Dim. Sia $U+W=U\oplus W$e sia $\underline{z}\in U+W$, allora $\underline{z}=\underline{u}+\underline{w}$ con $\underline{u}\in U$, $\underline{w}\in W$. Da $\underline{z}=\underline{u}+\underline{w}=\underline{u}'+\underline{w}'$ con $\underline{u}'\in U$, $\underline{w}'\in W$ abbiamo $\underline{u}-\underline{u}'=\underline{w}'-\underline{w}\in U\cap W$, ma per ipotesi $U\cap W=\underline{0}$, dunque $\underline{u}=\underline{u}'$, $\underline{w}=\underline{w}'$.

Viceversa supponiamo che la scrittura di $\underline{z}=\underline{u}+\underline{w}$ con $\underline{u}\in U$, $\underline{w}\in W$ sia unica, allora se $\underline{i}\in U\cap W$, abbiamo $\underline{z}=\underline{u}+\underline{w}=(\underline{u}+\underline{i})+(\underline{w}-\underline{i})$ con $\underline{u}+\underline{i}\in U$, $\underline{w}-\underline{i}\in W$ dunque $\underline{u}=\underline{u}+\underline{i}$ e perciò $\underline{i}=\underline{0}$.

<u>Esempi</u>

p. Siano U il sottospazio di R^3 di base $\{[1, 0, 0]^T, [0, 1, 0]^T\}$ e W il sottospazio di R^3 di base $\{[1/4, -1/2, 0]^T\}$. Trovare dim e (una) base di H+K e $H\cap K$.

   Si ha ovviamente dim U=2, dim W=1. I vettori $[1, 0, 0]^T$, $[0, 1, 0]^T$, $[1/4, -1/2, 0]^T$ sono linearmente dipendenti, infatti $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1/4\\ 0 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$, dunque , essendo $[1, 0, 0]^T$, $[0, 1, 0]^T$ linearmente indipendenti, $[1/4, -1/2, 0]^T$ è combinazione lineare di $[1, 0, 0]^T$ e $[0, 1, 0]^T$, cioè $W\subseteq U$ e dunque $U\cap W=W$, perciò $\dim (U\cap W)=1$ ed una base di W è $\{[1/4, -1/2, 0]^T\}$, inoltre da $W\subseteq U$ si ottiene anche $U+W=U$ e quindi $\dim (U+W)=2$ ed una base di U+W è $\{[1, 0, 0]^T, [0, 1, 0]^T\}$

q. Siano U il sottospazio di R^3 di base $\{[0, 1, -1]^T, [1/4, -1/2, 0]^T\}$ e W il sottospazio di R^3 di base $\{[0, 0, 1]^T, [0, 1, 0]^T\}$. Calcolare $\dim (U+W)$ e $\dim (U\cap W)$.

$\{[0, 1, -1]^T, [1/4, -1/2, 0]^T, [0, 0, 1]^T, [0, 1, 0]^T\}$ è un sistema di generatori di U+W.

Inoltre i vettori $[0, 1, -1]^T, [1/4, -1/2, 0]^T, [0, 0, 1]^T$ sono linearmente indipendenti, dunque $\{[0, 1, -1]^T, [1/4, -1/2, 0]^T, [0, 0, 1]^T\}$ è una base di U+W, quindi dim (U+W)=3, di conseguenza usando la formula di Grassman si ottiene dim $(U \cap W)=1$

Cambiamento di base.

Abbiamo notato (proprietà 3) come un qualsiasi vettore $\underline{v}$ di uno spazio vettoriale V sul campo K, che ammette una base $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\ldots,\underline{b}_n\}$, possa essere rappresentato mediante una n-upla $\underline{v}|_B$ di elementi di K. Tali elementi sono i coefficienti della combinazione lineare che esprime $\underline{v}$ a partire dai vettori della base B e vengono detti *coordinate* o *componenti* del vettore $\underline{v}$ rispetto alla base B. Ovviamente se consideriamo un'altra base $C=\{\underline{c}_1,\underline{c}_2,\ldots,\underline{c}_n\}$ di V il vettore $\underline{v}$ sarà rappresentato da una n-upla $\underline{v}|_C$ diversa dalla precedente.

Nel seguito scriveremo $\underline{v}|_B=[\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n]^T$ e $\underline{v}|_C= [\mu_1, \mu_2,\ldots,\mu_n]^T$ per indicare rispettivamente le rappresentazioni di $\underline{v}$ come n-upla rispetto alla base B e alla base C.

Vogliamo trovare una formula che permetta di passare per ogni vettore $\underline{v}$ dalle sue componenti rispetto alla base B a quelle rispetto alla base C.

Poiché B è una base di V, i vettori di C si potranno scrivere, in uno e un sol modo come combinazione lineare dei vettori di B, supponiamo sia

$\underline{c}_1=x_{11}\underline{b}_1+x_{21}\underline{b}_2+\ldots+x_{n1}\underline{b}_n$

$\underline{c}_2=x_{12}\underline{b}_1+x_{22}\underline{b}_2+\ldots+x_{n2}\underline{b}_n$

….

$\underline{c}_n=x_{1n}\underline{b}_1+x_{2n}\underline{b}_2+\ldots+x_{nn}\underline{b}_n$

allora ponendo $S=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$, si ottiene $[\underline{c}_1,\underline{c}_2,\ldots,\underline{c}_n] = [\underline{b}_1,\underline{b}_2,\ldots,\underline{b}_n]\, S$

dove la k-esima colonna della matrice S è il vettore delle coordinate di $\underline{c}_k$ rispetto alla base B, la matrice S viene detta *matrice di cambiamento di base dalla base* B *alla base* C.

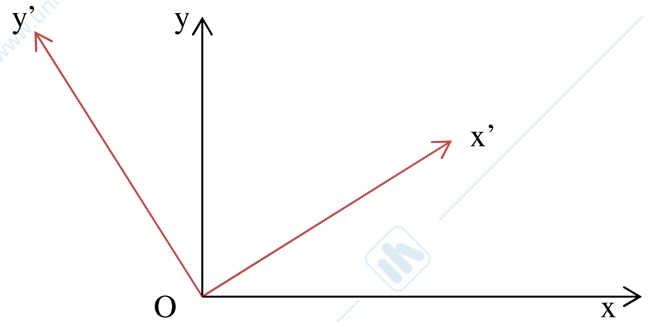
Ora essendo $\underline{v}= [\underline{c}_1|\underline{c}_2|\ldots|\underline{c}_n][\mu_1, \mu_2,\ldots,\mu_n]^T = [\underline{b}_1|\underline{b}_2|\ldots|\underline{b}_n]\, [\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n]^T$

otteniamo $\underline{v}= [\underline{b}_1|\underline{b}_2|\ldots|\underline{b}_n]\, S\, [\mu_1, \mu_2,\ldots,\mu_n]^T$ e quindi $\underline{v}|_B=S\underline{v}|_C$ e $\underline{v}|_C=S^{-1}\underline{v}|_B$, in quanto S è invertibile perché le sue colonne sono un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Utilizzando il discorso precedente è facile trovare le *formule di rotazione* di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali.

Limitiamoci al piano, ma il procedimento può essere facilmente generalizzato per trovare le formule di rotazione nello spazio.

Supponiamo di aver riferito il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali Oxy come in figura:



Le coordinate (x,y) di un punto P rispetto ad Oxy sono le componenti del vettore rispetto alla base di R^2 rappresenta dai versori degli assi x,y, analogamente le coordinate (x',y') di P rispetto ad Ox'y' sono le componenti del vettore rispetto alla base di R^2 rappresenta dai versori degli assi x',y'.

Per trovare le formule di passaggio da x,y ad x',y', dobbiamo scrivere i versori degli assi x',y' in funzione dei versori degli assi x,y. Detto θ l'angolo che l'asse x forma con l'asse x' si ha che i versori dell'asse x' e dell'asse y' rispetto alla base formata dai versori degli assi x,y sono rispettivamente rappresentati da $[\cos\theta, \text{sen}\,\theta]_T$ e da $[-\text{sen}\,\theta, \cos\theta]_T$, la matrice di passaggio è dunque $\begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\text{sen}\,\vartheta \\ \text{sen}\,\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$, da cui si ricavano facilmente le formule di rotazione

$$\begin{cases} x' = x\cos\vartheta + y\,\text{sen}\,\vartheta \\ y' = -x\,\text{sen}\,\vartheta + y\cos\vartheta \end{cases}$$

<u>Esempio.</u>

r. Si considerino le due basi B'={$[2,0,2,0]^T$, $[-1,1,-1,1]^T$, $[0,0,0,1]^T$, $[0,0,2,2]^T$} e C={$[1,1,1,1]^T$, $[2,0,2,0]^T$, $[0,0,2,2]^T$, $[5,0,0,5]^T$} di R^4.
Scrivere la matrice di passaggio da B a C.

Dobbiamo rappresentare i vettori della base C rispetto alla base B.

Si ha:

$[1,1,1,1]^T = 1[2,0,2,0]^T + 1[-1,1,-1,1]^T + 0[0,0,0,1]^T + 0[0,0,2,2]^T$

$[2,0,2,0]^T = 1[2,0,2,0]^T + 0[-1,1,-1,1]^T + 0[0,0,0,1]^T + 0[0,0,2,2]^T$

$[0,0,2,2]^T = 0[2,0,2,0]^T + 0[-1,1,-1,1]^T + 0[0,0,0,1]^T + 1[0,0,2,2]^T$

$[5,0,0,5]^T = 5/2[2,0,2,0]^T + 0[-1,1,-1,1]^T - 5/2[0,0,0,1]^T + 10[0,0,2,2]^T$

Dunque le componenti dei vettori di C rispetto alla base B sono rispettivamente $[1,1,0,0]_T$, $[1,0,0,0]_T$, $[0,0,0,1]_T$, $[5/2,0,-5/2,10]_T$ e la matrice di passaggio da B a C è $S=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$.

<u>Equazioni parametriche e cartesiane dei sottospazi di uno spazio vettoriale di K^n</u>.

Sappiamo che se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita n, ogni suo sottospazio ha dimensione m≤n, in particolare *ogni sottospazio di dimensione n coincide con* V. Quindi i sottospazi di K^n hanno dimensione d con 0≤d≤n. L'unico sottospazio di dimensione n è K^n e l'unico sottospazio di dimensione 0 è il vettore nullo, tali sottospazi sono detti banali. Inoltre per ogni d con 0<d<n esistono sottospazi di dimensione d. Infatti, se si considerano d vettori

lineramente indipendenti $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_d\}$ di K^n lo spazio $L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_d)$ è un sottospazio di K^n di dimensione d.

Vediamo come si può rappresentare tale spazio:

sia $\underline{v}_1=\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix}, \underline{v}_2=\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \underline{v}_d=\begin{bmatrix} v_{1d} \\ v_{2d} \\ \vdots \\ v_{nd} \end{bmatrix}$ allora $\underline{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ appartiene a $L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_d)$ se e solo se

$\underline{x}=t_1\underline{v}_1+t_2\underline{v}_2+t_n\underline{v}_n$ ovvero se e solo se

$$\begin{cases} x_1=t_1v_{11}+t_2v_{12}+\dots+t_nv_{1d} \\ x_2=t_1v_{21}+t_2v_{22}+\dots+t_nv_{2d} \\ \vdots \\ x_n=t_1v_{n1}+t_2v_{n2}+\dots+t_nv_{nd} \end{cases}$$

le coordinate del generico vettore x di $L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_d)$ sono quindi scritte in funzione di n parametri arbitrari e delle coordinate dei vettori $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_d$. Il sistema appena scritto rappresenta il sottospazio sotto forma di *equazioni parametriche*.

Queste equazioni si possono anche scrivere nella forma matriciale

$$\underline{x}=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1d} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nd} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}=B\underline{t}$$

con B matrice di tipo (n,d) e rango d.

Sussiste la seguente

Proposizione 4. Per ogni sottospazio $W=L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_d)$ di dimensione d<n di K^n esiste una matrice A di tipo (n-d,n) a coefficienti in K e con rango n-d tale che W=Ker A, quindi W è definito da n-d equazioni lineari omogenee a coefficienti in K.

Dim. Lo spazio ker B^T (ovvero l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $B^T\underline{x}=\underline{0}$)dove B è la matrice formata dall'accostamento delle componenti di $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_d$ ha dimensione n-d per il teorema di nullità più rango. Sia $\{\underline{w}_1,\underline{w}_2,\dots,\underline{w}_{n-d}\}$ una base di ker B^T, e sia $A=[\underline{w}_1|\underline{w}_2|\dots|\underline{w}_{n-d}]^T$. A è una matrice di tipo (n-d,n) e di rango n-d (essendo le sue n-d righe linearmente indipendenti), quindi ker A è uno spazio vettoriale di dimensione d. I vettori $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_d$ appartengono a ker A, infatti per ogni i, $1\le i\le n-d$, si ha $B^T\underline{w}_i=\underline{0}$, da cui $(\underline{v}j)^T\underline{w}_i=0$ per ogni j, $1\le i\le d$, ovvero $(\underline{w}_i)^Tv_j=0$ e quindi $Av_j=\underline{0}$. Si ha allora $L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_d)\subseteq$ker A ed essendo dim $(L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_d))$=dim (ker A) si ottiene $L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_d)$=ker A.

Il sistema $A\underline{x}=\underline{0}$, ovvero ker A, è la rappresentazione di $L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_d)$ in equazioni cartesiane.

Studiamo ora i casi particolari n=2,3.

I *sottospazi non banali (o propri) di* K^2 devono avere dimensione 1.

Un sottospazio T di K^2 di dimensione 1 è generato da un vettore non nullo, $[\alpha,\beta]^T$, di K^2 quindi $T=\left\{t\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix} \mid t\in K\right\}$. Tutti e soli i vettori di T sono quindi rappresentati dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=\alpha t \\ y=\beta t \end{cases}$$

o dall'equazione cartesiana che si ottiene eliminando il parametro t dalle equazioni precedenti. Tale equazione è $\beta x-\alpha y=0$ (che diventa x=0 o y=0 se β=0 o α=0 rispettivamente). Lo spazio può essere visto come il ker della matrice $[\beta,-\alpha]^T$ di rango 1 (quindi il sottospazio può essere identificato con l'insieme dei punti della retta passante per l'origine con vettore direzione $[\alpha,\beta]^T$).

Viceversa il ker di una qualsiasi matrice [a,b] di tipo (1,2) con rango 1 è l'insieme delle soluzioni di equazione cartesiana ax+by=0 che geometricamente rappresenta una retta per l'origine e può essere identificato con il sottospazio $T=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \mid ax+by=0\right\}$ di K^2 di dimensione 1.Dall'equazione cartesiana si ottengono le equazioni parametriche di T

$$\begin{cases}x=-bt\\ y=at\end{cases}$$

che sono le equazioni dello sottospazio generato dal vettore $[-b,a]^T$.

I *sottospazi non banali (o propri) di* K^3 devono avere dimensione 1 o 2.

Sia T un *sottospazio di* K^3 *di dimensione* 1. T è generato da un vettore non nullo, $[\alpha,\beta,\gamma]^T$, di K^3 ovvero $T=\left\{t\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix} \mid t\in K\right\}$. Tutti e soli i vettori di T sono quindi rappresentati dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases}x=\alpha t\\ y=\beta t,\\ z=\gamma t\end{cases}$$

Il sottospazio può essere identificato con l'insieme dei punti della retta passante per l'origine con vettore direzione $[\alpha,\beta,\gamma]^T$.

Le equazione cartesiane dello spazio si ottengono eliminando il parametro t dalle equazioni precedenti.

Se $\alpha=\beta=0$ e allora $\gamma\neq 0$ le equazioni cartesiane sono

$$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases},$$

analogamente se $\alpha=\gamma=0$ e allora $\beta\neq 0$ le equazioni cartesiane sono

$$\begin{cases}x=0\\ z=0\end{cases},$$

se $\beta=\gamma=0$ e allora $\alpha\neq 0$ le equazioni cartesiane sono

$$\begin{cases}y=0\\ z=0\end{cases},$$

altrimenti diventano

$$\begin{cases}\beta x-\alpha y=0\\ \gamma x-\alpha z=0\end{cases}$$

dove al più uno fra α,β,γ è 0.

In tutti i casi le equazioni cartesiane di un sottospazio di dimensione 1 di K^2 formano un sistema lineare omogeneo di 2 equazioni in 3 incognite con matrice dei coefficienti con rango 2, quindi sono le equazioni corrispondenti al ker di una matrice di tipo (2,3) con rango 2.

Viceversa il ker di una qualsiasi matrice $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ di tipo (2,3) con rango 2 rappresenta le equazioni cartesiane del sottospazio $S=\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} | a_1x+b_1y+c_1z=0,\, a_2x+b_2y+c_2z=0\right\}$ e dal punto di vista geometrico una retta passante per l'origine. Dal sistema si ricavano (vedi geometria dello spazio) le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=(b_1c_2-b_2c_1)t \\ y=-(a_1c_2-a_2c_1)t \\ z=(a_1b_2-a_2b_1)t \end{cases}$$

che sono le equazioni dello sottospazio generato dal vettore $[(b_1c_2-b_2c_1), -(a_1c_2-a_2c_1), (a_1b_2-a_2b_1)]^T$.

Sia allora S *un sottospazio di* K^3 *di dimensione* 2. S è generato da due vettori linearmente indipendenti, $[\alpha_1,\beta_1,\gamma_1]^T$, $[\alpha_2,\beta_2,\gamma_2]^T$, di K^3, ovvero $S=\left\{t\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}+u\begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} | u,t \in K\right\}$. Tutti e soli i vettori di T sono quindi rappresentati dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=\alpha_1u+\alpha_2t \\ y=\beta_1u+\beta_2t, \\ z=\gamma_1u+\gamma_2t \end{cases}$$

che rappresentano geometricamente le equazioni parametriche di un piano passante per O e parallelo ai due vettori $[\alpha_1,\beta_1,\gamma_1]^T$, $[\alpha_2,\beta_2,\gamma_2]^T$. Eliminando i parametro t,u dalle equazioni precedenti si ottengono le equazioni cartesiane del piano.

Infatti, poiché i due vettori sono linearmente indipendenti, la matrice dei coefficienti di t ed u ha rango 2. Supponiamo $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$ allora abbiamo

$$\begin{cases} u=\dfrac{x\beta_2-y\alpha_2}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1} \\ t=\dfrac{y\alpha_1-x\beta_1}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1} \\ z=\gamma_1\dfrac{x\beta_2-y\alpha_2}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}+\gamma_2\dfrac{y\alpha_1-x\beta_1}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1} \end{cases}$$

e quindi si ottiene l'equazione cartesiana $x(\beta_1\gamma_2- \beta_2\gamma_1)-y(\alpha_1\gamma_2- \alpha_2\gamma_1)+z(\alpha_1\beta_2- \alpha_2\beta_1)=0$ che rappresenta il ker di una matrice di tipo (1,3) con rango 1..

Viceversa il ker di una qualsiasi matrice [a,b,c] di tipo (1,3) con rango 1 ha la forma $ax+by+cz=0$ e rappresenta l'equazione di un piano nello spazio passante per l'origine, che può essere identificato con lo spazio vettoriale $S=\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} | ax + by + cz = 0\right\}$. Dall'equazione cartesiana si ricavano le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=-bu-ct \\ y=au \\ z=at \end{cases}$$

che sono le equazioni parametriche del sottospazio di K^3 generato dai vettori $[-b,a,0]^T$, $[-c,0,a]^T$.

<u>Esempi</u>

s. Sia V il sottospazio di R^4 generato dai vettori $[1,0,3,-1]^T$ e [3,0,-2,1]T. Trovare le sue equazioni cartesiane.
Invece di utilizzare la Proposizione 4, procediamo direttamente trovando prima le equazioni parametriche di V:

$$\begin{cases} x=1u+3t \\ y=0u+0t \\ z=3u-2t \\ w=-1u+1t \end{cases}$$

ed eliminiamo tra le quattro equazioni i parametri u e t, otteniamo

$$\begin{cases} y=0 \\ t=w+u \\ u=x-3(w+u) \\ z=3u-2t \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y=0 \\ x+2z+w=0 \end{cases} .$$

t. Sia V ={$[x,y,z,u]^T$|x+y-3u=0, y+z=0}. Trovarne dimensione e una base.
V ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x+y-3u=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

le sue equazioni parametrico si ottengono risolvendo il sistema e sono dunque

$$\begin{cases} x = 3h - t \\ y = t \\ z = -t \\ u = h \end{cases}$$

Pertanto lo spazio V è generato dai vettori [-1,1,-1,0]T e [3,0,0,1] ,che sono linearmente indipendenti e dunque costituiscono una base per V, che pertanto ha dimensione 2.