Superfici e curve nello spazio

Superfici

- Si dice *superficie* il luogo dei punti dello spazio che soddisfano ad una equazione $F(x,y,z)=0$ nelle variabili x,y,z (in cui alcune variabili possono anche non comparire). L' equazione $F(x,y,z)=0$ si dice *equazione cartesiana* della superficie.
  - Se $F(x,y,z)$ è un polinomio di secondo grado allora la superficie si dice *quadrica*.
- Una superficie può anche essere rappresentata da *equazioni parametriche* del tipo

$$\begin{cases} x=f_1(t,u) \\ y=f_2(t,u) \\ z=f_3(t,u) \end{cases}$$

con t,u parametri reali.

Sfera

- Una *sfera* è il luogo dei punti dello spazio la cui distanza da un punto fisso detto *centro* è una costante detta *raggio.*
  - E' immediato che, se chiamiamo R il raggio e fissiamo l'origine degli assi in O, una sfera ha equazione $x^2+y^2+z^2=R^2$.
  - Se fissiamo il sistema di riferimento in modo generico ed (α,β,γ) sono le coordinate del centro, l'equazione risulta $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$, ovvero $x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-R^2=0$.
- In generale chiamiamo sfera il luogo dei punti del ~~piano~~ SPAZIO che soddisfano un'equazione del tipo $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$, ovvero un'equazione di secondo grado in x,y,z priva di termini misti e con coefficienti di x^2, y^2, z^2 uguali e non nulli (e quindi assunti =1).
  - L'equazione rappresenta una sfera con centro nel punto di coordinate $(-a/2,-b/2,-c/2)$ e raggio $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$ se $a^2+b^2+c^2-4d\geq 0$ (ridotta al solo centro se R=0), una sfera immaginaria se $a^2+b^2+c^2-4d<0$

Condizioni che individuano una sfera

- Una sfera dipende da quattro parametri essenziali ed è quindi completamente determinata se abbiamo *quattro condizioni lineari* sulla sfera
- Esempi di condizioni lineari sono:
  - il passaggio per un punto (1 condizione lineare)
  - le coordinate del centro (3 condizioni lineari)
  - il passaggio per un punto e il piano tangente in quel punto (3 condizioni lineari)
  - il passaggio per un punto e la retta tangente in quel punto (2 condizioni lineari)
  - …..

Curve nello spazio

- Si dice *curva* il luogo dei punti dello spazio che soddisfano ad un sistema di due equazioni : $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ nelle variabili x,y,z. Tali equazioni si chiamano *equazioni cartesiane* della curva.
- Una curva può anche essere rappresentata da *equazioni parametriche* del tipo $\begin{cases} x=f_1(t) \\ y=f_2(t) \\ z=f_3(t) \end{cases}$ ove t è un parametro reale.
- Una *curva* si dice *piana* se esiste un piano che contiene tutti i suoi punti, *gobba* in caso contrario.

Circonferenze nello spazio

- Un sistema $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0 \\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \end{cases}$, rappresenta il luogo dei punti comuni a una sfera S e a un piano π, cioè una circonferenza nello spazio e viceversa un sistema di equazioni cartesiane di una curva nello spazio rappresenta una circonferenza se e solo se può essere trasformato in un sistema equivalente costituito dall'equazione di una sfera e dall'equazione di un piano.
  - La circonferenza è una curva piana.
  - La circonferenza rappresentata dal precedente sistema è reale se la distanza del centro C della sfera S dal piano π è minore o uguale al raggio R della sfera (nel caso la distanza sia proprio R, la circonferenza è ridotta a un solo punto K è il piano π è tangente in quel punto alla sfera S). Se la distanza di C da π è maggiore di R allora la circonferenza è immaginaria.
  - Il centro della circonferenza è il punto proiezione ortogonale di C sul piano π, ed il raggio r della circonferenza si può ottenere dal teorema di Pitagora tramite questa relazione $R^2=r^2+dist(C,\pi)^2$

Fasci di sfere

- Siano $x^2+y^2+z^2+a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $x^2+y^2+z^2+a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ le equazioni di due sfere S_1 ed S_2. Si dice *fascio di sfere* (individuato da S_1 ed S_2) l'insieme di tutte e sole le superfici le cui equazioni hanno la forma $\lambda(x^2+y^2+z^2+a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\mu(x^2+y^2+z^2+a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$ con λ e μ parametri reali non entrambi nulli. Quando $\lambda\neq-\mu$ tali superfici rappresentano sfere, mentre per $\lambda=-\mu$, se le due sfere non sono concentriche, si ottiene il piano $(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)z+d_1-d_2=0$ (che può essere visto come sfera dal raggio infinito) detto *piano radicale* del fascio.
  - Se S_1 ed S_2 non sono concentriche tutte le sfere del fascio individuato da S_1 ed S_2 passano per la circonferenza che si ottiene intersecando una qualsiasi delle due sfere col piano radicale. Tale circonferenza è reale se la distanza dei due centri è maggiore uguale al valore assoluto della differenza dei due raggi e minore o uguale della loro somma. Nel caso in cui valga una delle uguaglianze la circonferenza è ridotta ad una punto e tutte le sfere del fascio sono tangenti al piano radicale in quel punto. Negli altri casi la circonferenza è immaginaria.
  - Se S_1 ed S_2 sono concentriche tutte le sfere del fascio hanno lo stesso centro.

Superfici di rotazione

- Data una curva γ ed una retta *r* la superficie decritta dai punti di γ durante una rotazione di 2π attorno alla retta *r* si dice *superficie di rotazione* generata da γ. La retta *r* si dice *asse di rotazione*.
  - La superficie di rotazione S ottenuta dalla rotazione di γ attorno ad *r* è quindi il luogo delle circonferenze che ogni punto P di γ descrive in tale rotazione. Queste circonferenze sono intersezione di una sfera per P con centro su *r* con il piano per P perpendicolare ad *r*. Se la retta *r* passa per C (α,β,χ) ed ha parametri direttori a,b,c, il generico punto P di γ di coordinate x_0,y_0,z_0 descrive la circonferenza $\begin{cases} a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=(x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2+(z_0-\gamma)^2 \end{cases}$
    A seconda che le equazioni di γ siano date in forma parametrica o in forma cartesiana, le coordinate di P dipendono da un solo parametro t o sono legate da due condizioni date dall'appartenenza di P alle due superfici che individuano γ, quindi nel primo caso l'equazione della circonferenza dipende solo da un parametro t, nel secondo dipende dai tre parametri x_0,y_0,z_0 legati da due condizioni. Eliminando i parametri si ottiene l'equazione della superficie S.

Superfici di rotazione in casi particolari

- L'equazione della superficie descritta dalla rotazione di γ di equazioni cartesiane $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ attorno all'asse x è $F(x, \sqrt{y^2+z^2})=0$.
  - Il generico punto P di γ ha coordinate $(x_0,y_0,0)$ con $F(x_0,y_0)=0$ e descrive nella rotazione la circonferenza di equazioni $x=x_0$, $x^2+y^2+z^2=x_0^2+y_0^2$, si tratta quindi di eliminare i due parametri x_0,y_0 fra le tre equazioni $F(x_0,y_0)=0$, $x=x_0$, $x^2+y^2+z^2=x_0^2+y_0^2$. Per fare questo basta sostituire x ad x_0 e $\sqrt{y^2+z^2}$ ad y_0 in $F(x_0,y_0)=0$. L'equazione della superficie diventa $F(x, \sqrt{y^2+z^2})=0$.
- L'equazione della superficie descritta dalla rotazione di γ di equazioni cartesiane
  - $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ attorno all'asse y è $F(\sqrt{x^2+z^2}, y) = 0$.
  - $\begin{cases} F(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$ attorno all'asse x è $F(x,\sqrt{z^2+y^2}) = 0$.
  - $\begin{cases} F(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$ attorno all'asse z è $F(\sqrt{x^2+y^2},z) = 0$.
  - $\begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ attorno all'asse y è $F(y,\sqrt{x^2+z^2}) = 0$.
  - $\begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ attorno all'asse z è $F(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$.

Coni

- Si dice *cono* un luogo di rette passanti tutte per uno stesso punto detto *vertice.*
  - Le rette che costituiscono il cono si dicono *generatrici* del cono.
  - Una curva tale che per ogni suo punto passi una generatrice si dice *direttrice* del cono.
  - Dati una curva γ e un punto V di coordinate (a,b,c), il cono che ha vertice V e direttrice γ è il luogo delle rette che passano per V e per un punto di γ. Dette (x_0,y_0,z_0) le coordinate del generico punto P di γ, le equazioni della generatrice PV sono $\begin{cases} x=a+(x_0-a)u \\ y=b+(y_0-b)u \\ z=c+(z_0-c)u \end{cases}$ dove u è un parametro reale. A seconda che le equazioni di γ siano date in forma parametrica o in forma cartesiana, le coordinate di P dipendono da un solo parametro t o sono legate da due condizioni date dall'appartenenza di P alle due superfici che individuano γ, quindi nel primo caso l'equazione della generica generatrice dipende dai due parametri t ed u, nel secondo dipende dai tre parametri x_0,y_0,z_0 legati da due condizioni e dal parametro t. Eliminando i parametri si ottiene l'equazione del cono.

Coni (2)

- Una equazione $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ in n variabili si dice *omogenea* di grado α se per ogni scalare t si ha $f(tx_1,tx_2,\dots,tx_n) = t^{\alpha}f(x_1,x_2,\dots,x_n)$.
  - Una equazione omogenea di grado α rappresenta un cono con vertice in O e viceversa.
- Un cono si dice *circolare* se ha una direttrice che è una circonferenza
- Un cono si dice *circolare retto* se è circolare e il piano su cui giace una circonferenza direttrice è perpendicolare alla retta r che congiunge vertice e centro della circonferenza.
  - Un cono circolare retto è una superficie di rotazione ottenuta ruotando una generatrice attorno alla retta r che è l'asse di rotazione
  - L' angolo che una generatrice forma con r è quindi costante ed è detto angolo di apertura del cono.
- Un cono si dice *quadrico* se la sua equazione è un polinomio di secondo grado.

Cilindri

- Si dice *cilindro* un luogo di rette tutte fra loro parallele
  - Le rette che costituiscono il cilindro si dicono *generatrici* del cilindro.
  - Una curva tale che per ogni suo punto passi una generatrice si dice *direttrice* del cilindro.
  - Data una curva γ e un vettore direzione $\vec{d} = (a,b,c)$, il cilindro che ha direttrice γ e le cui generatrici hanno direzione $\vec{d}$ è il luogo delle rette che passano per un punto di γ e hanno parametri direttori a,b,c. Dette (x_0,y_0,z_0) le coordinate del generico punto P di γ, le equazioni della generatrice passante per P sono $\begin{cases} x=x_0+au \\ y=y_0+bu \\ z=z_0+cu \end{cases}$ dove u è un parametro reale. A seconda che le equazioni di γ siano date in forma parametrica o in forma cartesiana, le coordinate di P dipendono da un solo parametro t o sono legate da due condizioni date dall'appartenenza di P alle due superfici che individuano γ, quindi nel primo caso l'equazione della generica generatrice dipende dai due parametri t ed u, nel secondo dipende dal parametro u e dai tre parametri x_0,y_0,z_0 legati da due condizioni. Eliminando i parametri si ottiene l'equazione del cilindro.

Cilindri (2)

- Un cilindro con generatrici parelle ad un asse cartesiano ha una equazione in cui non compare la variabile corrispondente a quell'asse e viceversa
- Un cilindro si dice *circolare* se ha una direttrice che è una circonferenza
- Un cilindro si dice *circolare retto* se è circolare e il piano su cui giace la circonferenza direttrice è perpendicolare alla direzione delle generatrici.
  - Un cilindro circolare retto è una superficie di rotazione ottenuta ruotando una generatrice attorno alla retta parallela alle generatrici passante per il centro della circonferenza direttrice
- Un cilindro si dice *quadrico* se la sua equazione è un polinomio di secondo grado.

Quadriche di rotazione

- Una quadrica che sia una superficie di rotazione si dice *quadrica di rotazione*.
  - I coni e cilindri circolari rette e le sfere sono quadriche di rotazione
  - Facendo ruotare l'ellisse $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ attorno all'asse x (y) si trova la quadrica di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$ ($\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$) detta *ellissoide di rotazione*.
  - Facendo ruotare l'iperbole $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ attorno all'asse x si trova la quadrica di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$ detta *iperboloide ellittico di rotazione*.
  - Facendo ruotare l'iperbole $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ attorno all'asse y si trova la quadrica di equazione $\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ detta *iperboloide iperbolico di rotazione*.
  - Facendo ruotare la parabola $\begin{cases} x^2=2py \\ z=0 \end{cases}$ attorno all'asse x si trova la quadrica di equazione $x^2+z^2=2py$ detta *paraboloide di rotazione*.